

文章编号: 1000-0887(2002) 05\_0533\_08

# 受沿任意方向单向拉伸的织物的屈曲分析\*

张义同, 徐家福

(天津大学 机械工程学院 力学系, 天津 300072)

(沈惠申推荐)

摘要: 对编织物受沿与其经线方向成任意角度  $\theta(0 < \theta < 90^\circ)$  的单向拉伸时的屈曲进行了分析, 得到了确定其屈曲方向角  $\beta$  的方程, 给出了当  $\theta = 45^\circ$  和  $\theta = 30^\circ$  时确定屈曲方向角  $\beta$  的方程的解曲线. 证明了当编织物受到沿非经向/非纬向的单向拉伸时, 屈曲是可能的, 得到了两种可能的屈曲模态(弯曲模态和拉伸模态)以及相应的屈曲条件. Zhang 和 Fu(2001)的结果为其结论的特例

关键词: 织物; 屈曲; 屈曲方向

中图分类号: O344 文献标识码: A

## 引言

由于服装 CAD 开发的需要, 织物屈曲的研究在近十几年被受到特别的关注<sup>[1,2]</sup>. 在织物力学中, 把织物条看作弹性薄板, 但织物有一些奇特的屈曲现象, 是一般的薄板所没有的. 低碳钢薄板在受压时会发生离面屈曲, 受拉时会发生颈缩但不会发生离面屈曲; 而织物受到沿非经向/非纬向的单向拉伸时很容易发生离面屈曲. Zhang 和 Fu<sup>[3]</sup>分析了织物受沿与织物经线成  $45^\circ$  方向的单向拉伸时的屈曲. 为了分析简单, 他们还对比织物的弹性常数作了以下假设:  $B_{11} = B_{22}$ ,  $B_{12} = 0$  ( $B_{11}$ ,  $B_{22}$  和  $B_{12}$  的定义见 Zhang 和 Fu<sup>[3]</sup>). 这些假设保证了织物只有拉伸变形而没有附加的剪切变形, 屈曲的方向总是和拉伸的方向垂直.

若织物受沿与其经线方向成任意角度  $\theta(0 < \theta < 90^\circ)$  单向拉伸时, 情况则要复杂得多. 图 1 是一张织物受沿与其经线方向成  $30^\circ$  的单向拉伸时的屈曲的照片, 从照片中可以看到, 屈曲方向的拉伸方向不垂直, 即角  $\beta$  不为零, 我们定义  $\beta$  角为屈曲方向角. 在本文中, 我们将导出确定屈曲方向角  $\beta$  的方程, 求出织物在这种一般条件下的屈曲模态及相应的屈曲条件.

由于织物在临界构型的变形比较大, 本文中采用的是在大变形上叠加小变形的屈曲分析方法<sup>[4,5]</sup>.

## 1 织物在单向拉伸下的均匀变形

考虑图 2 中的织物片. 我们通常会对织物片在初始构型下建立如下自然坐标系  $OWF$ : 原

\* 收稿日期: 2001\_07\_30; 修订日期: 2001\_11\_28

基金项目: 国家自然科学基金项目(19772032)

作者简介: 张义同(1945—), 男, 山西晋城市人, 教授, 博导.

点  $O$  在织物的中面,  $W, F$  坐标轴分别和织物的经线、纬线相平行. 现在我们要对织物片建立另一套坐标系  $X'$ :  $X'_3$  轴垂直于织物的中面( $X'_3$  轴未在图 2 中画出),  $X'_1, X'_2$  轴分别由  $W, F$  坐标轴绕  $X'_3$  轴逆时针方向旋转  $\theta$  角得到. 在初始构型  $B_0$  下, 织物片由下式所定义:

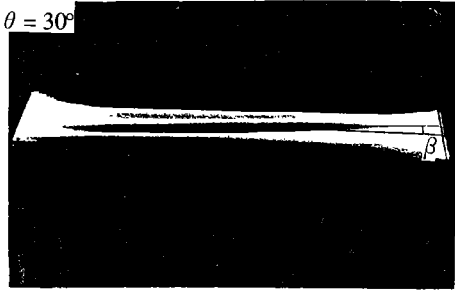


图 1 受沿与经向成 30 的单向拉伸的织物条的屈曲的照片

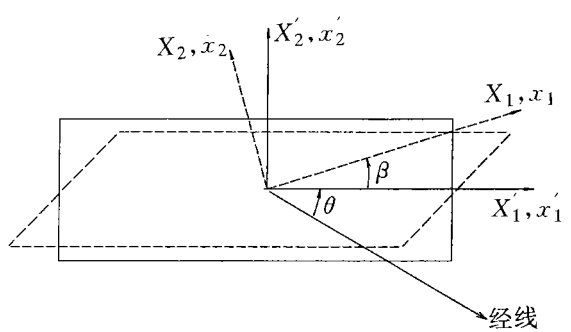


图 2 受沿  $X'_1$  轴单向拉伸的织物条的坐标系

$$-\infty < X'_1 < \infty, \quad |X'_2| \leq a, \quad |X'_3| \leq h, \tag{1}$$

这里, 织物片的厚度  $2h$  和织物片的宽度  $2a$  相比要小得多.

假设织物片的边界  $X'_2 = \pm a$  和  $X'_3 = \pm h$  为力自由边界, 沿  $X'_1$  方向的单位面积大小为  $S$  的单向拉力使织物片从初始构型  $B_0$  变形到另一均匀变形构型  $B_e$ . 相对于同一个坐标系  $X'$ , 在构型  $B_0$  下坐标为  $(X'_i)$  的质点, 在构型  $B_e$  下的坐标记为  $(x'_i)$ .

该均匀变形可以由下式来描述

$$x'_1 = \lambda_1 X'_1 + \omega X'_2, \quad x'_2 = \lambda_2 X'_2, \quad x'_3 = X'_3, \tag{2}$$

这里,  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  分别是  $x'_1$  和  $x'_2$  方向的伸长,  $\omega$  是剪切变形量. 显然, 变形梯度张量有以下形式

$$F' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \omega & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

根据织物的边界条件方程<sup>[6]</sup>和本构张量的坐标变换规则, 我们有

$$R' \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} B_{cc} \end{bmatrix} R'^{-1} \begin{bmatrix} E'_{11} \\ E'_{22} \\ E'_{12} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} S \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \tag{4}$$

其中  $B_{ij}$  是织物的弹性常数,  $E'_{ij}$  是格林应变张量的分量, 其顶上的“-”表示对应于变形  $B_0 \rightarrow B_e$ , 其右上角的“'”表示在坐标系  $X'$  下描述;  $R'$  是对应于坐标变换  $OWF \rightarrow OX'_1 X'_2$  的变换张量, 它的矩阵形式如下

$$R' = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \cos \theta \sin \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \cos \theta \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \theta & \cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix}. \tag{5}$$

由于  $X'_3 = \pm h$  为力自由边界, 该均匀变形场的以下第二皮奥拉-基尔霍夫应力张量的分量为零

$$T'_{33} = T'_{23} = T'_{31} = 0$$

由织物的本构方程<sup>[6]</sup>, 其它非零的应力张量的分量如下

$$\begin{Bmatrix} T'_{11} \\ T'_{22} \\ T'_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{R}' \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & -\frac{1}{4}B_{cc} \\ B_{12} & B_{22} & -\frac{1}{4}B_{cc} \\ 0 & 0 & \frac{3}{4}B_{cc} \end{bmatrix} \mathbf{R}'^{-1} \begin{Bmatrix} E'_{11} \\ E'_{22} \\ E'_{12} \end{Bmatrix}, \quad (6)$$

式中的  $B_{cc}$  是织物纤维之间的挤压弹性模量。

## 2 屈曲方程

我们假设在相同的边界条件下, 织物片的另一个非均匀变形构型——屈曲构型  $B_t$  也可能存在。在以下的分析中, 我们建立另一个坐标系  $X: X_{1\_}, X_{2\_}$  轴分别由  $X'_{1\_}, X'_{2\_}$  坐标轴绕  $X'_{3\_}$  轴逆时针方向旋转  $\beta$  角得到,  $X_{3\_}$  轴与  $X'_{3\_}$  轴重合。 $\beta$  角被定义为屈曲方向角, 将在下面的分析中确定。相对于坐标系  $X$ , 在构型  $B_0$  下坐标为  $(X_A)$  的质点, 在构型  $B_e$  下的坐标记为  $(x_i)$ , 在构型  $B_t$  下的坐标记为  $(x_i^t)$ 。记

$$x_i^t = x_i(X_A) + u_i(x_j), \quad (7)$$

这里,  $u_i(x_j)$  是相对于变形  $B_e \rightarrow B_t$  的微小位移。引入

$$x_{\bar{j}} = J^{-1}(\pi_{iA} - \pi_{iA}) F_{jA}, \quad (8)$$

这里,  $\pi_{iA}$  是相对于变形  $B_0 \rightarrow B_t$  的第一皮奥拉-基尔霍夫应力张量的分量,  $\pi_{iA}$  顶部加一横线是相对于变形  $B_0 \rightarrow B_e$ ;  $J$  其顶部加一横线是相对于变形  $B_0 \rightarrow B_e$  的变形梯度的行列式的值。

利用式(8)可得无体积力的平衡方程和死载荷的边界条件分别如下<sup>[3]</sup>

$$x_{\bar{j},j} = 0, \quad (9)$$

$$x_{\bar{j}} n_j = 0, \quad (10)$$

这里,  $n_j$  是构型  $B_e$  边界的单位外法矢。

在坐标系  $OX_1X_2$  下, 织物的本构方程可写为

$$\begin{Bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{21} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 2D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & 2D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & 2D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{21} \end{Bmatrix}, \quad (11)$$

这里

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 2D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & 2D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & 2D_{66} \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & -\frac{1}{4}B_{cc} \\ B_{12} & B_{22} & -\frac{1}{4}B_{cc} \\ 0 & 0 & \frac{3}{4}B_{cc} \end{bmatrix} \mathbf{R}^{-1}. \quad (12)$$

$\mathbf{R}$  是相对于  $OWF \rightarrow OX_1X_2$  的坐标变换矩阵, 它有和  $\mathbf{R}'$  类似的表达式, 把(5)式中的  $\theta$  用  $(\theta + \beta)$  来替换, 便得到  $\mathbf{R}$  的表达式。

把本构方程(11)扩展到三维空间  $OX_1X_2X_3$ , 有

$$\begin{Bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{23} \\ T_{31} \\ T_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 & 2D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & 0 & 0 & 0 & 2D_{26} \\ 0 & 0 & D_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2D_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2D_{55} & 0 \\ D_{61} & D_{62} & 0 & 0 & 0 & 2D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ E_{23} \\ E_{31} \\ E_{12} \end{Bmatrix}. \quad (13)$$

用本构张量写出上式

$$\mathbf{T}_{ij} = L_{jkl} \mathbf{E}_{kl}, \quad (14)$$

这里,  $L_{jkl}$  是本构张量的分量. 比较(13)和(14)式,可以得到  $L_{jkl}$  的非零分量如下

$$L_{iii} = D_{ii}, \quad i = 1, 2, 3; L_{2211} = D_{21}, L_{1122} = D_{12};$$

$$L_{1112} = L_{1121} = D_{16}, L_{2212} = L_{2221} = D_{26}; L_{1211} = L_{2111} = D_{61}, L_{1222} = L_{2122} = D_{62};$$

$$L_{2323} = L_{3223} = L_{3232} = D_{44}; L_{3131} = L_{1331} = L_{3113} = L_{1313} = D_{55};$$

$$L_{1212} = L_{2112} = L_{1221} = L_{2121} = D_{66}.$$

$x_{ij}$  关于  $u_{i,j}$  的线性部分的表达式如下<sup>[3]</sup>

$$x_{ij} = A_{jilk} u_{k,l} \quad (15)$$

其中  $A_{jilk}$  是第一阶瞬时弹性模量张量, 与 Zhang 和 Fu<sup>[3]</sup> 给出的形式相同.

### 3 屈曲分析

我们寻找以下形式的屈曲解

$$u_1 = 0, \quad u_j = H_j(kx_3) e^{ikx_2} + \text{C. C.} \quad (j = 2, 3), \quad (16)$$

这里,  $i$  是虚数单位,  $k$  是模态数, C. C. 表示前一项的复共轭. 将上式代入(15)式, 再代入平衡方程(9), 得到

$$C_{11} H_2(kx_3) + C_{12} [iH_3'(kx_3) + H_2''(kx_3)] = 0, \quad (17)$$

$$C_{21} H_3(kx_3) + iC_{22} H_2'(kx_3) + D_{33} H_3''(kx_3) = 0, \quad (18)$$

$$C_{31} H_2(kx_3) + C_{32} [iH_3'(kx_3) + H_2''(kx_3)] = 0, \quad (19)$$

其中,

$$C_{11} = -D_{11} F_{21}^4 - (2D_{16} + 2D_{61}) F_{21}' F_{22} - (D_{12} + D_{21} + 4D_{66}) F_{21}^2 F_{22}^2 - (2D_{26} + 2D_{62}) F_{21} F_{22}^3 - D_{22} F_{22}^4 - T_{11} F_{21}^2 - 2T_{12} F_{21} F_{22} - T_{22} F_{22}^2,$$

$$C_{12} = C_{22} = D_{55} F_{21}^2 + D_{44} F_{22}^2,$$

$$C_{21} = -D_{55} F_{21}^2 - D_{44} F_{22}^2 - T_{11} F_{21}^2 - 2T_{12} F_{21} F_{22} - T_{22} F_{22}^2,$$

$$C_{31} = -D_{11} F_{11} F_{21}^3 - D_{61} F_{21}^3 F_{12} - (D_{61} + D_{16}) F_{11} F_{21}^2 F_{22} - (D_{21} + 2D_{66}) F_{12} F_{21}^2 F_{22} - (D_{12} + 2D_{66}) F_{11} F_{21} F_{22}^2 - (D_{26} + D_{62}) F_{12} F_{21} F_{22}^2 - D_{62} F_{11} F_{22}^3 - D_{22} F_{12} F_{22}^3,$$

$$C_{32} = D_{55} F_{11} F_{21} + D_{44} F_{12} F_{22}.$$

在(17)、(18)、(19)三个方程中, 包含了两个未知的形函数  $H_2(kx_3)$  和  $H_3(kx_3)$ , 和一个未知的参数  $\beta$ .

令

$$C_{11} C_{32} - C_{12} C_{31} = 0. \quad (20)$$

则方程(17)和(19)为同解方程. 解方程(17)、(18)可求得形函数  $H_2(kx_3)$  和  $H_3(kx_3)$ . 而方程

(20) 中只含有一个未知的参数  $\beta$  (以及已知的参数  $\theta$  和  $S$ ), 它便是确定屈曲方向角  $\beta$  的方程。

解方程(17)、(18) 可得

$$\begin{aligned} -iH_2(kx_3) &= A_2 \sinh(p_1 kx_3) + A_4 s \sinh(p_2 kx_3) + \\ &A_1 \cosh(p_1 kx_3) + A_3 \cosh(p_2 kx_3), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} H_3(kx_3) &= q_1 [A_2 \cosh(p_1 kx_3) + A_1 \sinh(p_1 kx_3)] + \\ &q_2 [A_4 \cosh(p_2 kx_3) + A_3 \sinh(p_2 kx_3)] \end{aligned} \quad (22)$$

其中  $A_j$  为任意常数, 而

$$q_j = -\frac{C_{11} + C_{12} p_j^2}{C_{12} p_j} \quad (j = 1, 2).$$

其中的  $p_1$  和  $p_2$  由下式给出

$$p_1 = \sqrt{m + \sqrt{n}}, \quad p_2 = \sqrt{m - \sqrt{n}},$$

其中

$$\begin{aligned} m &= -\frac{1}{2C_{12}D_{33}}(C_{12}C_{21} + C_{12}C_{22} + C_{11}D_{33}), \quad n = -\frac{\sqrt{r}}{2C_{12}D_{33}}, \\ r &= (C_{12}C_{21} + C_{12}C_{22} + C_{11}D_{33})^2 - 4C_{11}C_{12}C_{21}D_{33}. \end{aligned}$$

将上述  $u_2$  和  $u_3$  的解代入边界条件(10), 在边界  $x_3 = \pm h$  上, 对自由指标  $i = 1, 2$ , 我们得到

$$b_1(h) = 0, \quad b_1(-h) = 0, \quad b_2(h) = 0, \quad b_2(-h) = 0, \quad (23)$$

这里, 函数  $b_1$  和  $b_2$  由下式给出

$$\begin{aligned} b_1(h) &= (A_4 - A_3)p_1 \cosh(hkp_1) + (A_2 - A_1)p_2 \cosh(hkp_2) + \\ &(A_4 - A_3)p_1 \sinh(hkp_1) + (A_2 - A_1)p_2 \sinh(hkp_2) + \\ &(A_1 + A_2)p_2 (\cosh[hk(2p_1 + p_2)] + \sinh[hk(2p_1 + p_2)]) + \\ &(A_3 + A_4)p_1 (\cosh[hk(p_1 + 2p_2)] + \sinh[hk(p_1 + 2p_2)]), \\ b_2(h) &= A_1 \cosh(hkp_1) (C_{11} + C_{12}p_1^2) + A_3 \cosh(hkp_2) (C_{11} + C_{12}p_2^2) + \\ &A_2 \sinh(hkp_1) (C_{11} + C_{12}p_1^2) + A_4 s \sinh(hkp_2) (C_{11} + C_{12}p_2^2). \end{aligned}$$

将  $u_2$  和  $u_3$  的解代入边界条件(10), 在边界  $x_3 = \pm h$  上, 对自由指标  $i = 3$ , 我们得到和(23) 式中头两个方程完全相同的方程。

Zhang 和 Fu<sup>[3]</sup> 就一般的情形已经证明, 当解  $x_j$  在边界  $x_3 = \pm h$  上逐点满足边界条件(10) 时,  $x_{ij}$  在边界  $x_2 = \pm a$  上的合力(即沿织物厚度的积分) 自动为零。即在  $x_2 = \pm a$  上的边界条件在一种放松了的条件下自动满足。

化简(23) 中的第一和第二式, 得到

$$A_2 p_2 \cosh(hkp_2) + A_4 p_1 \cosh(hkp_2) = 0, \quad (24)$$

$$A_1 p_2 \sinh(hkp_1) + A_3 p_1 \sinh(hkp_2) = 0. \quad (25)$$

化简(23) 中的第三和第四式, 得到

$$A_2 (C_{11} + C_{12}p_2^2) \sinh(hkp_1) + A_4 (C_{11} + C_{12}p_2^2) \sinh(hkp_2) = 0, \quad (26)$$

$$A_1 (C_{11} + C_{12}p_1^2) \cosh(hkp_1) + A_3 (C_{11} + C_{12}p_2^2) \cosh(hkp_2) = 0. \quad (27)$$

方程(24) 和(26) 是关于  $A_2, A_4$  的线性方程组, 它有非平凡解的条件是其系数矩阵的行列式为零

$$(C_{11} + C_{12}p_2^2)p_2 \cosh(hkp_1) \sinh(hkp_2) -$$

$$(C_{11} + C_{12}p_1^2)p_1 \sinh(hkp_1) \cosh(hkp_2) = 0 \quad (28)$$

当上述关系满足时, 方程(25)和(27)只有关于  $A_1, A_3$  的平凡解。此时, 对应的  $u_3$  是  $x_3$  的偶函数, 我们称此时的屈曲模态为弯曲模态。类似地, 方程(25)和(27)有关于  $A_1, A_3$  的非平凡解的条件是

$$\begin{aligned} & (C_{11} + C_{12}p_2^2)p_2 \sinh(hkp_1) \cosh(hkp_2) - \\ & (C_{11} + C_{12}p_1^2)p_1 \cosh(hkp_1) \sinh(hkp_2) = 0, \end{aligned} \quad (29)$$

此时, 对应的  $u_3$  是  $x_3$  的奇函数, 我们称该屈曲模态为拉伸(或桶形)模态。

当(29)式满足时, 方程(24)和(26)也只有关于  $A_2, A_4$  的平凡解, 所以弯曲模态和拉伸模态不耦合。当且仅当对  $kh \neq 0$ , 方程(28)或(29)有关于  $S$  的非零解时, 织物的屈曲是可能的。

## 4 说明和结束语

由 Zhang 和 Fu<sup>[3]</sup> 的假设:  $\theta = 45^\circ, B_{11} = B_{22} = 0$  和  $B_{12} = 0$ , 可得  $\omega = 0$  令  $\beta = 0$ , 有

$$F_{12} = F_{21} = 0, \quad D_{62} = 0 \quad (30)$$

于是有  $C_{31} = C_{32} = 0$ 。这样, 式(20)成为恒等式,  $\beta = 0$  是方程(20)的解。这意味着, 屈曲方向和拉伸的方向垂直。

对 Zhang 和 Fu<sup>[3]</sup> 所讨论的情形, 我们有

$$F_{22} = \lambda_2, \quad T_{22} = -S/2 = -Q$$

由上式,  $\omega = 0$  以及式(30), 可得

$$\begin{aligned} C_{11} + C_{12}p_1^2 &= -\lambda_2^2(D_{22}\lambda_2^2 - Q - D_{44}p_1^2), \\ C_{11} + C_{12}p_2^2 &= -\lambda_2^2(D_{22}\lambda_2^2 - Q - D_{44}p_2^2). \end{aligned}$$

将上式代入屈曲条件(28)、(29), 它们将蜕化为 Zhang 和 Fu<sup>[3]</sup> 所给出的屈曲条件。

作为示例, 我们画出了确定屈曲方向角的方程(20)和屈曲条件方程(28)、(29)的解曲线。在画这些解曲线的时候, 织物的无量纲弹性常数取了以下值

$$B_{11}/B_{cc} = 1.96, \quad B_{22}/B_{cc} = 1.85, \quad B_{12}/B_{cc} = 0.1,$$

并假设

$$D_{33} = B_{11}, \quad D_{44} = D_{55} = B_{11}/2$$

对一个固定的  $\theta$  值, 给定  $S/B_{cc}$  一个值, 方程(20)中便只有一个未知的变量  $\beta$ 。解方程(20)(采用迭代方法求解), 可求得  $\beta$  相应的值。在图3中画出了当  $\theta = 30^\circ$  和  $\theta = 45^\circ$  时  $\beta$  和  $S/B_{cc}$  的关系曲线。

在得到一对  $\beta$  和  $S/B_{cc}$  的数值后, 解方程(28)得到相应于弯曲屈曲模态的  $kh$  值; 解方程(29)得到相应于拉伸屈曲模态的  $kh$  值。在图4中画出了当  $\theta = 30^\circ$  时的弯曲屈曲模态屈曲条件曲线(虚线)和拉伸屈曲模态屈曲条件曲线(点划线)。 $\theta$  取其他值时的屈曲条件曲线可类似画出。

从图4可以看出, 与弯曲模态对应的载荷总是小于拉伸模态对应的载荷, 所以在织物屈曲实验中观察到的只有弯曲模态, 如图1中的照片所示。

与  $kh$  的最小值对应的载荷便是屈曲的临界载荷。将临界载荷代入方程(20)便可以确定屈曲方向角  $\beta$ 。 $kh$  的最小值由织物片的位移约束条件所确定。本文的结果是很一般性的, 不涉及位移约束的限制。

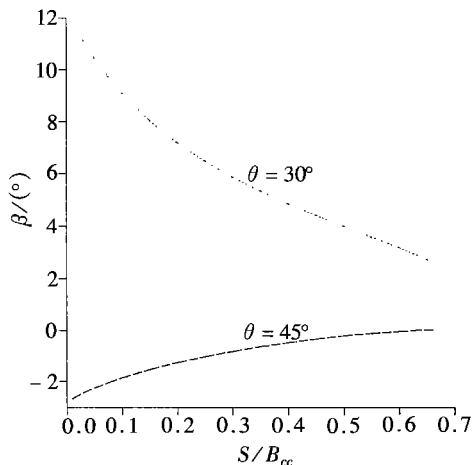


图3  $\theta = 45^\circ$  和  $\theta = 30^\circ$  时, 确定屈曲方向角  $\beta$  的方程的解曲线

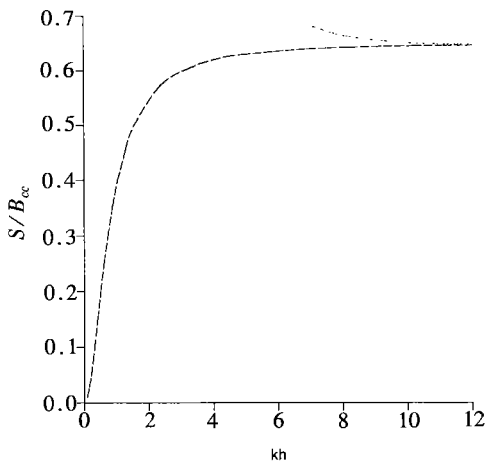


图4  $\theta = 30^\circ$  时的屈曲条件曲线

本文实际上提供了一种预测正交异型或各向异性板屈曲方向或弹性波传播方向的一种一般的方法, 它可以处理比 Conner 和 Ogden<sup>[7]</sup> 以及 Roxburgh 和 Ogden<sup>[8]</sup> 所解决了的更复杂的材料的板的屈曲和弹性波传播问题。Zhang<sup>[9]</sup> 已给出了各向异性弹性板在受压下的屈曲分析。

致谢 本文工作是在英国 Keele 大学数学系访问期间开始的, 感谢与 Yibin Fu 教授的许多有益的讨论。

### [ 参 考 文 献 ]

- [1] Anirbayat J, Hearle J W S. The anatomy of buckling of textile fabrics: drape and conformability[J]. Journal of the Textile Institute, 1989, **26**(1): 51—68.
- [2] Kim J H. Fabric mechanics analysis using large deformation orthotropic shell theory[D]. Ph D Thesis. Dept of Mechanical and Aerospace Engineering, North Carolina State University, 1991.
- [3] Zhang Yi\_tong, Fu Y B. A micromechanical model of woven fabric and its application to the analysis of buckling under uniaxial tension Part 2: Buckling analysis[J]. Inter J Eng Sci, 2001, **39**(1): 1—13.
- [4] Fu Y B, Ogden R W. Nonlinear stability analysis of pre\_stressed elastic bodies[J]. Continuum Mech Thermodyn, 1999, **11**: 141—172.
- [5] Ogden R W. Non\_linear Elastic Deformations [M]. New York: Dover Publications, 1984.
- [6] ZHANG Yi\_tong, Fu Y B. A micromechanical model of woven fabric and its application to the analysis of buckling under uniaxial tension Part 1: The micromechanical model[J]. Inter J Eng Sci, 2000, **38**(17): 1895—1906.
- [7] Conner P, Ogden R W. The influence of shear strain and hydrostatic stress on stability and elastic waves in a layer[J]. Int J Engng Sci, 1996, **34**(3): 375—397.
- [8] Roxburgh D G, Ogden R W. Stability and vibration of pre\_stressed compressible elastic plate[J]. Int J Engng Sci, 1994, **32**(3): 427—454.
- [9] ZHANG Yi\_tong. On the orientation of buckling direction of anisotropic elastic plate under uniaxial compression[J]. Acta Mechanica Solida Sinica (English Edition), 2001, **14**(2): 130—137.

## Buckling Analysis of Woven Fabric Under Uniaxial Tension in Arbitrary Direction

ZHANG Yi\_tong, XU Jia\_fu

( Department of Mechancis , Inst itute of Mechanical Engin eering ,  
Tianjin University , Tianjin 300072, P R China )

**Abstract:** The buckling of a fabric sheet subjected to a uniaxial tension in a direction making arbitrary angle,  $\theta$  ( $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ) say, with respect to that of warp is investigated. The equation to determine the buckling direction angle,  $\beta$  say, was obtained and, as illustration, the solution curves of the equation for  $\theta = 45^\circ$  and  $\theta = 30^\circ$  were plotted. It is shown that when the fabric sheet is subjected to tension in non\_warp/non\_weft direction the out\_of\_plane buckling of fabric is possible, two buckling modes ( flexural and extensional modes) and the both corresponding buckling conditions are obtained. The results given by Zhang and Fu (2001) are the special cases of this paper.

**Key words:** woven fabric; buckling; buckling direction