应用数学和力学, 第 23 卷 第 4 期(2002 年 4 月
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2002 04_0347_06

源于 Fermi_Pasta_Ulam 问题的非线性发展方程的相似约化*

谢福鼎, 闫振亚, 张鸿庆

(大连理工大学 应用数学系, 大连 116024

(我刊编委张鸿庆来稿

摘要: 利用 Clarkson 和 Kruskal 引入的直接法和 Lou 的改进的直接法, 给出了源于 Fermi_Pasta_Ulam 问题的非线性发展方程的 4 种类型的相似约化•

关 键 词: 非线性发展方程; FPU 问题; 相似约化
中图分类号: O175.29 文献标识码: A

引 言

Fermi, Pasta, Ulam[1] 提出的一个著名的 Fermi_Pasta_Ulam(FPU 问题: 为什么固体具有有限的热传导率? 他们用一维格子来描述此固体• 下面方程为格子的运动规律[1, 2]

$$\begin{cases} m u_{itt} = k(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})[1 + \alpha(u_{i+1} - u_{i-1})] \\ u_0 = u_N = 0 \end{cases} \quad (i = 1, 2, \cdots, N-1), \tag{1}$$

其中 k 为线性弹力常数, α 表示非线性的强度且大于零, u_i 为从平衡位置为起点的第 i 个替换位置• Kruskal 和 Zabusky[3] 从连续的观点出发来考虑 FPU 问题, 结果利用一系列的变换提出如下的方程

$$u_{tt} - \varepsilon c^2 \delta^2 u_{xxxx} - \varepsilon c^2 u_x u_{xx} - c^2 u_{xx} = 0• \tag{2}$$

(2 的孤波解已经被研究• 我们将从相似约化这方面来考虑下面方程

$$u_{tt} + \alpha u_{xxxx} + \beta u_x u_{xx} + \gamma u_{xx} = 0• \tag{3}$$

其为(2 的更一般形式, 其中 α、β、γ 为常数•

目前存在很多有效的约化偏微分方程的方法, 其中下面 3 种方法为常用的• 1 Lie 的古典法 ——无穷小变换的 Lie 群法[4]; 2 Blumann 和 Cole 的非古典法——条件对称法或第一类型的偏对称法[5]; 3 Clarkson 和 Kruskal 的直接法及 Lou 的改进的直接法[6, 7]• 直接法没有引入群论的概念, 并且用直接法可以产生前两种方法所不能得到的新的约化• 这种方法已被应用于研究很多方程(KdV 方程, Burgers 方程, mKdV 方程, KP 方程及 Boussinesq 方程等 [1, 8] 的相似约化、精确解和可积性[9]•

* 收稿日期: 2000_12_12; 修订日期: 2001_10_09
基金项目: 国家重点基础研究发展规划项目(G1998030600 ; 国家自然科学基金资助项目(10072013 ; 高等学校博士学科点专项科研基金资助课题(98014119
作者简介: 谢福鼎(1965— , 男, 河南长葛人, 讲师, 博士生.

本文将利用 Clarkson 和 Kruskal 的直接法[6]及 Lou 的改进的直接法[7]来考虑(3),结果得到了(3)的 4 种类型的相似约化•

1 直接法和方程(3)相似约化

对给定的(3),所有相似解可表示为:

$$u(x,t)=U(x,t,Q(Z))\qquad Z=Z(x,t), \tag{4}$$

其中 U 和 Z 为待定的函数;$Q(Z)$ 满足某一常微分方程(ODE),将(4)代入(3)或许可以得到• 但是类似于直接法[6,7,8],事实上,没有必要设这种一般形式,可以证明,只须令 u 为如下形式

$$u(x,t)=A(x,t)+B(x,t)Q(Z(x,t))\qquad Z=Z(x,t), \tag{5}$$

其中 $A(x,t)$、$B(x,t)$、$Z(x,t)$ 为待定的函数,$Q(Z)$ 满足某一常微分方程•

将(5)式代入(3)式,得

$$\begin{aligned}u_{tt}+&\alpha u_{xxxx}+\beta u_xu_{xx}+\gamma u_{xx}=\alpha BZ_x^4Q''''+\alpha(4B_xZ_x^3+6Z_x^2Z_{xx})Q'''+\\&[\alpha(6B_{xx}Z_x^2+12B_xZ_xZ_{xx}+3BZ_{xx}^2+4BZ_xZ_{xx})+\beta A_xBZ_x^2+\gamma BZ_x^2+\\&BZ_t^2]Q''+[\alpha(4B_{xxx}Z_x+6B_{xx}Z_{xx}+BZ_{xxxx}+4B_xZ_{xxx})+\beta(A_{xx}BZ_x+\\&BB_xZ_{xx}+A_xBZ_{xx}+2A_xB_xZ_x)+\gamma(BZ_{xx}+2B_xZ_x)+BZ_{tt}+\\&2B_tZ_t]Q'+\beta B_xB_{xx}Q^2+[\alpha B_{xxxx}+\beta(A_{xx}B_x+A_xB_{xx})+\gamma B_{xx}+B_{tt}]Q+\\&\beta B^2Z_x^3Q'Q''+\beta BB_xZ_x^2QQ''+\beta(2BB_xZ_x^2+B^2Z_xZ_{xx})Q'^2+\beta(2B_x^2Z_x+\\&BB_{xx}Z_x)QQ'+\alpha A_{xxxx}+\beta A_xA_{xx}+\gamma A_{xx}+A_{tt}=0,\end{aligned} \tag{6}$$

其中(′)表示 $\mathrm{d}/\mathrm{d}Z$• 为了使方程(6)化为常微分方程,则 Q 及其导数的各种组合项的系数之比仅为 Z 的函数 $\Gamma(Z)$• 因此当 $Z_x\neq 0$ 时,得(以 Q'''' 项的系数 αBZ_x^4 作为标准)

$$\alpha(4B_xZ_x^3+6Z_x^2Z_{xx})=\alpha BZ_x^4\Gamma_1(Z), \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\alpha(6B_{xx}Z_x^2+12B_xZ_xZ_{xx}+3BZ_{xx}^2+4BZ_xZ_{xx})+\beta A_xBZ_x^2+\gamma BZ_x^2+BZ_t^2=\\\alpha BZ_x^4\Gamma_2(Z),\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\alpha(4B_{xxx}Z_x+6B_{xx}Z_{xx}+BZ_{xxxx}+4B_xZ_{xxx})+\beta(A_{xx}BZ_x+BB_xZ_{xx}+\\A_xBZ_{xx}+2A_xB_xZ_x)+\gamma(BZ_{xx}+2B_xZ_x)+BZ_{tt}+2B_tZ_t=\\\alpha BZ_x^4\Gamma_3(Z),\end{aligned} \tag{9}$$

$$\beta B_xB_{xx}=\alpha BZ_x^4\Gamma_4(Z), \tag{10}$$

$$\alpha B_{xxxx}+\beta(A_{xx}B_x+A_xB_{xx})+\gamma B_{xx}+B_{tt}=\alpha BZ_x^4\Gamma_5(Z), \tag{11}$$

$$\beta B^2Z_x^3=\alpha BZ_x^4\Gamma_6(Z), \tag{12}$$

$$\beta BB_xZ_x^2=\alpha BZ_x^4\Gamma_7(Z), \tag{13}$$

$$\beta(2BB_xZ_x^2+B^2Z_xZ_{xx})=\alpha BZ_x^4\Gamma_8(Z), \tag{14}$$

$$\beta(2B_x^2Z_x+BB_{xx}Z_x)=\alpha BZ_x^4\Gamma_9(Z), \tag{15}$$

$$\alpha A_{xxxx}+\beta A_xA_{xx}+\gamma A_{xx}+A_{tt}=\alpha BZ_x^4\Gamma_{10}(Z), \tag{16}$$

其中 $\Gamma_i(Z)$ $(i=1,2,\cdots,10)$ 仅为 Z 的待定函数•

为了确定 $A(x,t)$、$B(x,t)$、$Z(x,t)$、$Q(Z)$、Γ_i,需要引入如下规则:

规则(**a**) 若 $A(x,t)=A_0(x,t)+B(x,t)W(Z)$,则取 $W(Z)=0$,(可作变换 $Q(Z)\to Q(Z)-W(Z)$)•

规则(b) 若 $B(x,t)=B_0(x,t)W(Z)$，则取 $W(Z)=1$(可作变换 $Q(Z)\to Q(Z)W_0/Q$)•

规则(c) 若 $Z(x,t)$ 由 $Z_0(x,t)=W(Z)$ 确定，且 $W(Z)$ 为可逆函数，则取 $W(Z)=Z$(可作变换 $Z\to W^{-1}(Z)$)•

规则(d) 对于上述规则中 Z 的待定的函数，在进行一些运算(微分，积分，求幂等)后，我们仍用同样的字母[如 $\Gamma(Z)$ 的导数仍记为 $\Gamma(Z)$]•

根据(12)，利用规则(b)，若令 $\Gamma_6(Z)=\beta/\alpha$，则

$$B(x,t)=Z_x\text{•}\tag{17}$$

将(17)代入(7)，可得

$$Z_x\Gamma_1(Z)-10Z_{xx}/Z_x=0\text{•}\tag{18}$$

关于 x 积分(18)一次且用规则(d)，得

$$\Gamma(Z)+\ln Z_x=Z_0(t),\tag{19}$$

其中 $Z_0(t)$ 为积分函数• (19)可写为

$$Z_x\Gamma(Z)=Z_1(t)\text{•}\tag{20}$$

再关于 x 积分(20)且用规则(d)，得 $\Gamma(Z)=xZ_1(t)+Z_2(t)$ 且 $Z_2(t)$ 为积分函数•

利用规则(c)，我们有

$$Z(x,t)=x\theta(t)+\phi(t)\text{•}\tag{21}$$

利用规则(a)，从(8)可得

$$\Gamma_2(Z)=0,\quad \beta A_xBZ_x^2+\gamma BZ_x^2+BZ_t^2=0\text{•}\tag{22}$$

将(17)和(21)代入(22)，得

$$A(x,t)=-\frac{1}{3\beta\theta^2\theta_t}(x\theta_t+\phi_t)^3-\frac{\gamma}{\beta}x+A_0(t),\tag{23}$$

其中 $A_0(t)$ 为待定的积分函数•

最后将(17)、(21)和(23)代入(7)～(16)，在 $A(x,t)\neq0$ 时，我们得到(3)的下面的相似约化

$$u=-\frac{\theta(t)}{3M\beta}[M\theta(t)x+M\phi(t)+N]^3-\frac{\gamma}{\beta}x+R\theta(t)+\theta(t)Q(z),\tag{24}$$

$$Z(x,t)=\theta(t)x+\phi(t),\tag{25}$$

$$\theta_t=M\theta^3,\quad \phi_t=\theta^2(M\phi+N);\tag{26}$$

$$\alpha Q''''+\beta Q'Q''+3M(MZ+N)Q'+3M^2Q-\frac{6M}{\beta}(MZ+N)^3+3M^2R=0,\tag{27}$$

其中 $M\neq0$，N、R 为常数•

类型 1 $M\neq0$• (26)的一般解为

$$\theta(t)=\frac{1}{\sqrt{M_0-2Mt}},\quad \phi(t)=\frac{1-N\sqrt{M_0-2Mt}}{M\sqrt{M_0-2Mt}},\tag{28}$$

则我们得到(3)的相似约化

$$u=-\frac{1}{\beta\sqrt{M_0-2Mt}}\left[\frac{M}{\sqrt{M_0-2Mt}}x+\frac{1-N\sqrt{M_0-2Mt}}{\sqrt{M_0-2Mt}}+N\right]^3-\frac{\gamma}{\beta}x+\frac{R}{\sqrt{M_0-2Mt}}+\frac{1}{\sqrt{M_0-2Mt}}Q(z),\tag{29}$$

$$Z(x,t)=\frac{1}{\sqrt{M_0-2Mt}}x+\frac{1-N\sqrt{M_0-2Mt}}{M\sqrt{M_0-2Mt}},\tag{30}$$

其中 $Q(Z)$ 满足(27)•

如果令 $\Gamma_2(Z)\neq 0$ 且

$$A(x,t)=-\frac{\gamma}{\beta}x+A_1(t),\tag{31}$$

将(17、(21 和(31 代入(7 ~ (16 ,得

$$\left.\begin{aligned}&\Gamma_1(Z)=\Gamma_4(Z)=\Gamma_7(Z)=\Gamma_8(Z)=\Gamma_9(Z)=0,\\&\Gamma_{10}(Z)=\Gamma_{10}=\mathrm{const},\end{aligned}\right\}\tag{32}$$

$$\left.\begin{aligned}&\Gamma_2(Z)=\frac{(HZ+G)^2}{\alpha},\ \Gamma_3(Z)=\frac{5H(HZ+G)}{\alpha},\\&\Gamma_5(Z)=\frac{3H^2}{\alpha},\ \Gamma_6(Z)=\frac{\beta}{\alpha};\end{aligned}\right\}\tag{33}$$

$$A_{1tt}=\alpha\Gamma_{10}\theta^5,\ B(x,t)=\theta(t);\tag{34}$$

$$\theta_t=H\theta^3,\ \phi_t=\theta^2(H\phi+G),\tag{35}$$

其中 H、G 为常数• 将(32) ~ (34) 代入(6), 我们得到(3) 的相似约化

$$u(x,t)=\theta(t)Q(Z)-\frac{\gamma}{\beta}x+A_1(t),\ Z(x,t)=\theta(t)x+\phi(t),\tag{36}$$

其中 $A_1(t)$、$\theta(t)$、$\phi(t)$ 满足(38) 和(35), 且 $Q(Z)$ 满足

$$\alpha Q''''+\beta Q'Q''+(HZ+G)^2Q''+5H(HZ+G)Q'+3H^2Q+\Gamma_{10}=0•\tag{37}$$

下面我们进一步考虑两种特殊情形:

类型 2 当 $H=0$ 时, (34) 和(35) 的一般解为

$$\theta(t)=c_1,\ \phi(t)=Gc_1^2t+c_2,\ A_1(t)=\alpha\Gamma_{10}c_1t+A_0,\tag{38}$$

其中 c_1、c_2、A_0 为积分常数• 因此从(36) 和(37), 我们得到(3 的相似约化

$$\left.\begin{aligned}&u(x,t)=c_1Q(Z)-\frac{\gamma}{\beta}x+\alpha\Gamma_{10}c_1t+A_0,\\&Z(x,t)=c_1x+(Gc_1^2+c_2);\end{aligned}\right\}\tag{39}$$

$$\alpha Q'''+\frac{\beta}{2}Q'^2+G^2Q'+c_3+\Gamma_{10}Z=0,\tag{40}$$

其中 c_3 为积分常数•

类型 3 当 $H\neq 0$ 时, (34) 和(35) 的一般解为

$$\left.\begin{aligned}&\theta(t)=\frac{1}{\sqrt{c_4-2Ht}},\ \phi(t)=\frac{1-G\sqrt{c_4-2Ht}}{H\sqrt{c_4-2Ht}},\\&A_1(t)=\frac{1}{3H^2\sqrt{c_4-2Ht}}+A_0•\end{aligned}\right\}\tag{41}$$

因此我们得到(3 的相似约化

$$\begin{aligned}&u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{c_4-2Ht}}Q(z)-\frac{\gamma}{\beta}x+\frac{1}{3H^2\sqrt{c_4-2Ht}}+A_0,\\&Z=\frac{1}{\sqrt{c_4-2Ht}}x+\frac{1-G\sqrt{c_4-2Ht}}{H\sqrt{c_4-2Ht}};\end{aligned}\tag{42}$$

$$\alpha Q'''+\frac{\beta}{2}Q'^2+H^2Z^2Q'+2HGZQ'+3H^2ZQ+$$

$$(G^2 + 3HG)Q + \Gamma_{10}Z + c_5 = 0, \tag{43}$$

其中 c_4、c_5、A_0 为常数•

类型 4 当 $Z_x = 0$ 时, 即 $Z = Z(t)$•

类似于 Lou 等人的做法[8], 我们可简单地取 $Z(t) = t$(做变换 $t \to Z^{-1}(t)$, Z^{-1} 为 $Z(t)$ 的反函数)• 对于 $Z(t) = t$ 时, (10) 约化为

$$\begin{aligned} &u_{tt} + \alpha u_{xxxx} + \beta(u_x u_{xx} + \gamma u_{xx}) = BQ'' + 2B_tQ' + \beta B_x B_{xx} Q^2 + [\alpha B_{xxxx} + \\ &\quad \beta(A_{xx}B_x + A_xB_{xx}) + \gamma B_{xx}]Q + \alpha A_{xxxx} + \beta A_x A_{xx} + \gamma A_{xx} + A_{tt} = 0• \end{aligned} \tag{44}$$

如同 $Z_x \neq 0$ 情形的一样, 为了使(44) 约化为一个 ODE, 我们得到如下的微分方程组

$$2B_t = B\Gamma_1(t), \tag{45}$$

$$\beta B_x B_{xx} = B\Gamma_2(t), \tag{46}$$

$$\alpha B_{xxxx} + \beta(A_{xx}B_x + A_xB_{xx}) + \gamma B_{xx} + B_{tt} = B\Gamma_3(t), \tag{47}$$

$$\alpha A_{xxxx} + \beta A_x A_{xx} + \gamma A_{xx} + A_{tt} = B\Gamma_4(t), \tag{48}$$

其中 $\Gamma_1(t)$、$\Gamma_2(t)$、$\Gamma_3(t)$、$\Gamma_4(t)$ 为 t 的待定的函数•

利用规则(a ～ (c ,我们得到(3 的新相似约化

$$u(x, t) = a_3(t)x^3 + a_2(t)x^2 + a_1(t)x + a_0(t) + \exp\left(\frac{1}{2}t + t_0\right)Q(t), \tag{49}$$

其中 $a_i(t)$ $i = 0, 1, 2, 3$ 及 $Q(t)$ 满足

$$\begin{cases} a_{3tt} + 18\beta a_3^2 = 0, \\ a_{2tt} + 18\beta a_2 a_3 = 0, \\ a_{1tt} + 2\beta(2a_2^2 + 3a_1a_3) + 6\gamma a_3 = 0, \\ a_{0tt} + 2\beta a_1 a_2 + 2\gamma a_2 - \exp\left(\frac{1}{2}t + t_0\right)\Gamma_4(t) = 0, \\ Q'' + Q' + \frac{1}{4} + \Gamma_4(t) = 0, \end{cases} \tag{50}$$

其中 Γ_4 为 t 的任意函数•

2 结　　论

总之, 将 Clarkson 和 Kruskal 引入的直接法和 Lou 的改进的直接法应用于(3 ,本文给出了源于 Fermi_Pasta_Ulam 问题的非线性发展方程的 4 种类型的相似约化• 利用这些约化方程, 我们或许可以进一步来研究(3 的新解及其它的性质• 这将在以后考虑•

[参 考 文 献]

[1] Fermi E, Pasta J, Ulam S. Studies of Nonlinear Problems[M]. In: Newell Ed. Lectures in Appl Math, **15**, Providence: American Math Society, 1974, 143—196.

[2] Newell A C. Solitons in Mathematics and Physics[M]. Philadelphia: SIAM, 1985.

[3] Kruskal M D, Zabusky N J. Progress on the FPU nonlinear string problem[A]. In: Kruskal M D Ed. Princeton Plasma Physics Laboratory Annual Rept[C]. MATT_Q_21, Princeton: NJ, 1963, 61—83.

[4] Ovler P J. Applications of Lie Group to Differential Equations[M]. Berlin: Springer_Verlag, 1989.

[5] Blumann G W, Cole J D. Nonclassical symmetries of partial differential equations[J]. J Math Mech, 1969, **10**(5): 1025—1032.

[6] Clarkson P A, Kruskal M D. New similarity reductions of the Boussinesq equation[J]. J Math

Phys, 1989, **30**(3): 2201—2213.

[7] Lou S Y. Nonclassical symmetry reductions for the dispersive wave equations in shallow water[J]. J Math Phys, 1992, **33**(10): 4300—4305.

[8] 闫振亚, 张鸿庆. 广义变系数 KP 方程的相似约化[J]. 应用数学和力学, 2000, **21**(6): 645—651.

[9] Ablowitz M J, Ramani A, Segur H. A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P_type Ⅰ [J]. J Math Phys, 1980, **21**(4): 715—725.

[10] Ablowitz M J, Clarkson P A. Soliton Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scatting[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.

[11] Eilenberger G. Solitons_Mathematical Methods for Physics[M]. New York: Springer_Verlag, 1981.

Similarity Reductions for the Nonlinear Evolution Equation Arising in the Fermi_Pasta_Ulam Problem

XIE Fu_ding, YAN Zhen_ya, ZHANG Hong_qing

(Department of Applied Mathematics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, P R China

Abstract: Four families of similarity reductions are obtained for the nonlinear evolution equation arising in the Fermi_Pasta_Ulam problem via using both the direct method due to Clarkson and Kruskal and the improved direct method due to Lou.

Key words: nonlinear evolution equation; FPU problem; similarity reduction