应用数学和力学,第 23 卷 第 4 期(2002 年 4 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2002) 04_0359_12

关于 Banach 空间中增生和伪压缩型映象迭代序列的收敛性问题*

张石生

(四川大学 数学系, 成都 610064)

(我刊编委张石生来稿)

摘要: 得出了 Banach 空间中增生和伪压缩型映象 Ishikawa、Mann 和最速下降序列强收敛于其不动点的充分必要条件· 所得结果推广、改进和包含了某些最新的结果·

关 键 词; 增生映象; 伪压缩映象; Mann(Ishikawa) 迭代序列; 最速下降序列
中图分类号: O177.91 文献标识码: A

1 引言及预备知识

本文中处处假定 E 是一实 Banach 空间, E^* 是 E 的对偶空间, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表 E 与 E^* 间的配对, $D(T)$、$R(T)$、$N(T)$ 及 $F(T)$ 分别表映象 T 的定义域、值域、零点集及不动点集, 而 $J: E \to 2^{E^*}$ 表由下式定义的正规对偶映象:

$$J(x) = \left\{f \in E^*: \langle x,f\rangle = \|x\|\cdot\|f\|,\ \|f\| = \|x\|\right\} \qquad x \in E\cdot$$

定义 1.1 设 $T: D(T) \subset E \to E$ 是一映象·

1. T 称为增生的, 如果对任意的 $x, y \in D(T)$, 存在 $j(x-y) \in J(x-y)$ 使得
$$\langle Tx - Ty, j(x-y)\rangle \geqslant 0;$$
2. T 称为强增生的, 如果对任意的 $x, y \in D(T)$, 存在 $j(x-y) \in J(x-y)$ 使得
$$\langle Tx - Ty, j(x-y)\rangle \geqslant k\|x-y\|^2,$$
其中 $k \in (0,1)$ 是一常数;
3. T 称为伪压缩的, 如果对任意的 $x, y \in D(T)$, 存在 $j(x-y) \in J(x-y)$ 使得
$$\langle Tx - Ty, j(x-y)\rangle \leqslant \|x-y\|^2;$$
4. T 称为强伪压缩的, 如果对任意的 $x, y \in D(T)$, 存在 $j(x-y) \in J(x-y)$ 使得
$$\langle Tx - Ty, j(x-y)\rangle \leqslant k\|x-y\|^2,$$
其中 $k \in (0,1)$ 是一常数;
5. T 称为次_增生的, 如果 $N(T) \neq \emptyset$, 而且对任意的 $x \in D(T)$、$q \in N(T)$, 存在 $j(x-q) \in J(x-q)$ 使得
$$\langle Tx, j(x-q)\rangle \geqslant 0;$$
6. T 称为次_伪压缩的, 如果 $F(T) \neq \emptyset$, 而且对任意的 $x \in D(T)$、$p \in F(T)$, 存在 $j(x-$

---

* 收稿日期: 2000_12_12; 修订日期: 2001_11_05
作者简介: 张石生(1934—), 男, 云南曲靖人, 教授, 已发表论文 300 余篇, 获部省级奖 6 项.

$p) \in J(x - p)$ 使得

$$\langle Tx - p, j(x - p)\rangle \leqslant \|x - p\|^2•$$

由定义 1.1 直接可得下面的

命题 1.1

1. T 是增生的, 当而且仅当 I - T 是伪压缩的, 其中 I 是恒等映象;
2. T 是次增生的, 当而且仅当 I - T 是次_伪压缩的;
3. 如果 T 是增生的而且 $N(T) \neq$ ƒ, 则 T 是次增生的;
4. 如果 T 是伪压缩的, 而且 $F(T) \neq$ ƒ, 则 T 是次 _伪压缩的;
5. 如果 $T: D(T) \subset E \to E$ 是非扩张的, 则 T 是伪压缩的•

增生映象及伪压缩映象是两类重要的非线性映象, 它们是单调映象和非扩张映象的推广且与下面的初值问题的求解问题紧密相关:

$$\frac{du(t)}{dt} + Tu(t) = 0, \quad u(0) = u_0• \tag{1}$$

Browder[1] 证明, 如果 T 是局部 Lipschitz 的增生映象, 则方程(1)是可解的•

另外, Deimling 在[2]中还证明, 如果 $T: E \to E$ 是连续的强伪压缩映象, 则 T 有唯一的不动点• 如果 $T: E \to E$ 是连续的强增生映象, 则 T 是满射的, 即对任一 $f \in E$, 方程

$$Tx = f \tag{2}$$

在 E 中有解• 另外, Martin[3] 也证明, 如果 $T: E \to E$ 是连续的增生映象, 则 T 是 m_增生的, 即 I + T 是满射的, 故对任一 $f \in E$, 方程

$$x + Tx = f \tag{3}$$

在 E 中有解•

近年来, 许多作者研究了强伪压缩映象的不动点及强增生映象方程(2)和(3)的解的迭代逼近问题(见, 例如, [1, 2, 4~ 11, 12~ 15])•

本文的目的是研究 Banach 空间中次_伪压缩映象及次_增生映象的 Ishikawa 迭代序列、Mann 迭代序列及最速下降序列收敛于其不动点或零点的充分必要条件• 本文结果不仅包含文[7, 14]中的结果为特例, 同时也改进和发展了 Chidume_Osilike[8~ 10], Chang[4~ 6], Deng_Ding[11], Liu[12], Tan_Xu[13], Zhou[15] 及其他人的相应的结果•

下面的引理在本文中起到重要的作用•

引理 1.1[4] 设 E 是实 Banach 空间, $J: E \to 2^{E^*}$ 是正规对偶映象, 则对任意的 $x, y \in E$

$$\|x + y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\langle y, j(x + y)\rangle$$

对一切 $j(x + y) \in J(x + y)$ 成立•

引理 1.2[16] 设 E 是实的一致光滑的 Banach 空间, $T: D(T) \subset E \to 2^E$ 是一增生映象, 则 T 在 $D(T)$ 的内点处是局部有界的•

引理 1.3[14, p. 350] 设 E 是一致凸的 Banach 空间, D 是 E 中之一非空闭凸子集, $T: D \to D$ 是一非扩张映象• 如果 $F(T) \neq$ ƒ, 则对任一 $x \in D$, $q \in F(T)$ 及任意的 $j(x - q) \in J(x - q)$ 等式

$$\langle Tx - q, j(x - q)\rangle - \|x - q\|^2 = 0$$

成立的充分必要条件是 $x = q$•

定义 1.2

1) $T: E \to E$ 是一映象, $x_0 \in D(T)$, $\{\alpha_n\}$、$\{\beta_n\}$ 是 $[0, 1]$ 中的序列, 则由下式定义的序列 $\{x_n\}$:

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T x_n \end{cases} \quad n \geqslant 0, \tag{4}$$

称为 T 的 Ishikawa 迭代序列;

2) 在 (4) 中如果 $\beta_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, 则 $y_n = x_n$, 于是由下式定义的序列 $\{x_n\}$:

$$x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T x_n \quad n \geqslant 0 \tag{5}$$

称为 T 的 Mann 迭代序列;

3) 由下式定义的序列 $\{x_n\}$

$$x_{n+1} = x_n - c_n T x_n \quad n \geqslant 0 \tag{6}$$

称为 T 的最速下降序列•

2 次_伪压缩映象 Ishikawa 迭代序列收敛的充分必要条件

定理 2.1 设 E 是一实 Banach 空间, D 是 E 之一非空凸子集, $T: D \to D$ 是一致连续的次_伪压缩映象• 设 $\{\alpha_n\}$、$\{\beta_n\}$ 是 $[0, 1]$ 中满足下列条件的二实序列:

(i) $\alpha_n \to 0$, $\beta_n \to 0$ $(n \to \infty)$;

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$•

设 $x_0 \in D$ 是任意给定的点, $\{x_n\}$ 是由下式定义的 Ishikawa 迭代序列:

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n, \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T x_n• \end{cases} \tag{7}$$

1) 如果 $\{x_n\}$ 强收敛于 T 在 D 中的不动点 q, 则 $\{Tx_n\}$ 和 $\{Ty_n\}$ 均是有界的, 而且存在一不减函数 $\varphi: [0, \infty) \to [0, \infty)$, $\varphi(0) = 0$ 使得对任意的 x_n 和 q, 存在 $j(x_n - q) \in J(x_n - q)$ 满足

$$\langle Tx_n - q, j(x_n - q)\rangle \leqslant \|x_n - q\|^2 - \varphi(\|x_n - q\|) \quad \forall n \geqslant 0; \tag{8}$$

2) 反之, 如果 $\{Tx_n\}$ 和 $\{Ty_n\}$ 是有界的, 而且存在一严格增的函数 $\varphi: [0, \infty) \to [0, \infty)$, $\varphi(0) = 0$ 使得对给出的 $q \in F(T)$ 及 x_n, $n \geqslant 0$, 存在 $j(x_n - q) \in J(x_n - q)$ 满足条件 (8), 则 $x_n \to q$•

证 "必要性"• 设 $x_n \to q$, 由 T 的连续性、条件(i) 和(ii) 及 (7) 知 $y_n \to q$, $Tx_n \to q$, $Ty_n \to q$, 故 $\{Tx_n\}$、$\{Ty_n\}$ 均是有界的• 令

$$K = \sup_{u \geqslant 0}\{\|x_n - q\|\} < \infty•$$

如果 $K = 0$, 则 $x_n = q$ 对一切 $n \geqslant 0$ 成立, 故 (8) 对一切 $n \geqslant 0$ 成立;

如果 $K > 0$, 定义

$$G_t = \{n \in \mathbf{N}: \|x_n - q\| \geqslant t\} \quad t \in (0, K),$$
$$G_K = \{n \in \mathbf{N}: \|x_n - q\| = K\},$$

其中 $\mathbf{N}$ 是一切非负整数的集合•

因 $x_n \to q$, 故对任一 $t \in (0, K]$, 存在 $n_0 \in \mathbf{N}$ 使得当 $n \geqslant n_0$ 时有

$$\|x_n - q\| < t•$$

上式表明, 对每一 $t \in (0, K)$,

(a) G_t 是 $\mathbf{N}$ 之一非空的有限子集;

(b) $G_{t_1} \subset G_{t_2}$, 如果 $t_1 \geqslant t_2,\ t_1, t_2 \in (0, K)$;

(c) $G_K = \bigcap_{t \in (0,K)} G_t$.

因 $T: D \to D$ 是次_伪压缩的, 故对给定的 $q \in F(T)$ 和 x_n, 存在 $j(x_n - q) \in J(x_n - q)$ 使得

$$\langle Tx_n - q, j(x_n - q)\rangle \leqslant \| x_n - q \|^2 \qquad n \geqslant 0. \tag{9}$$

借助(9), 定义函数

$$g(t) = \min_{n \in G_t}\left\{ \| x_n - q \|^2 - \langle Tx_n - q, j(x_n - q)\rangle \right\} \qquad t \in (0, K).$$

由(9)及性质(b)得知

(a)′ $g(t) \geqslant 0$ 对一切 $t \in (0, K)$;

(b)′ $g(t)$ 对 t 是不减的.

现定义一函数

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{如果 } t = 0, \\ g(t) & \text{如果 } t \in (0, K), \\ \lim\limits_{s \to K_-} g(s) & \text{如果 } t \in [K, \infty). \end{cases}$$

易知 $\varphi: [0, \infty) \to [0, \infty)$ 是不减的, 而且 $\varphi(0) = 0$. 令 $t_n = \| x_n - q \|,\ n \geqslant 0$.

1) 如果 $t_n = 0$, 则 $x_n = q$, 故 $\varphi(\| x_n - q \|) = 0$, 从而

$$\langle Tx_n - q, j(x_n - q)\rangle = \| x_n - q \|^2 - \varphi(\| x_n - q \|);$$

2) 如果 $t_n \in (0, K)$, 则 $n \in G_{t_n}$, 故

$$\varphi(\| x_n - q \|) = g(t_n) = \min_{m \in G_{t_n}}\left\{ \| x_m - q \|^2 - \langle Tx_m - q, j(x_m - q)\rangle \right\} \leqslant$$

$$\| x_n - q \|^2 - \langle Tx_n - q, j(x_n - q)\rangle;$$

3) 如果 $t_n = K$, 则 $n \in G_K = \bigcap_{s \in (0,K)} G_s$, 从而

$$\varphi(\| x_n - q \|) = \varphi(t_n) = \lim_{s \to K_-} g(s) =$$

$$\lim_{s \to K_-} \min_{m \in G_s}\left\{ \| x_m - q \|^2 - \langle Tx_m - q, j(x_m - q)\rangle \right\} \leqslant$$

$$\| x_n - q \|^2 - \langle Tx_n - q, j(x_n - q)\rangle.$$

必要性得证.

"充分性". 因 $\{Tx_n\}$ 和 $\{Ty_n\}$ 是有界的, 利用归纳法, 由(7)可证 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$ 都是有界的. 另外, 由引理 1.1 及条件(8)有

$$\begin{aligned} \| x_{n+1} - q \|^2 &= \| (1 - \alpha_n)(x_n - q) + \alpha_n (Ty_n - q) \|^2 \leqslant \\ &(1 - \alpha_n)^2 \| x_n - q \|^2 + 2\alpha_n \langle Ty_n - q, j(x_{n+1} - q)\rangle = \\ &(1 - \alpha_n)^2 \| x_n - q \|^2 + 2\alpha_n \langle Ty_n - Tx_{n+1}, j(x_{n+1} - q)\rangle + \\ &2\alpha_n [Tx_{n+1} - q, j(x_{n+1} - q)] \leqslant \\ &(1 - \alpha_n)^2 \| x_n - q \|^2 + 2\alpha_n k_n + \\ &2\alpha_n \left\{ \| x_{n+1} - q \|^2 - \varphi(\| x_{n+1} - q \|) \right\}, \end{aligned} \tag{10}$$

其中

$$k_n = \| Ty_n - Tx_{n+1} \| \cdot \| x_{n+1} - q \|.$$

下证 $k_n \to 0\ (n \to \infty)$. 事实上, 因 $\alpha_n \to 0$、$\beta_n \to 0$, 而且 $\{x_n\}$、$\{Tx_n\}$、$\{Ty_n\}$ 都是有界的, 故知

$$y_n - x_{n+1} = (\alpha_n - \beta_n) x_n + \beta_n Tx_n - \alpha_n Ty_n \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

由 T 的一致连续性, $\|Ty_n - Tx_{n+1}\| \to 0$, 故 $k_n \to 0\ (n \to \infty)$. 对(10) 进行简化, 得

$$\|x_{n+1} - q\|^2 \leqslant \frac{1}{1-2\alpha_n}\Big\{(1-\alpha_n)^2\|x_n - q\|^2 + 2\alpha_n k_n - 2\alpha_n\varphi(\|x_{n+1} - q\|)\Big\} = \|x_n - q\|^2 + \frac{\alpha_n}{1-\alpha_n}\Big\{\alpha_n\|x_n - q\|^2 + 2k_n - 2\varphi(\|x_{n+1} - q\|)\Big\}, \tag{11}$$

于是有

$$\|x_{n+1} - q\|^2 \leqslant \|x_n - q\|^2 - \frac{\alpha_n}{1-2\alpha_n}\varphi(\|x_{n+1} - q\|) - \frac{\alpha_n}{1-2\alpha_n}\Big\{\varphi(\|x_{n+1} - q\|) - \alpha_n M^2 - 2k_n\Big\}, \tag{12}$$

其中 $M = \sup_{n\geqslant 0}\|x_n - q\|$. 因 $\alpha_n \to 0$, 存在 n_0 使得当 $n \geqslant n_0$ 时有 $1-2\alpha_n > 0$. 故不失一般性, 可设(11) 和(12) 对一切 $n \geqslant 0$ 成立. 令

$$\sigma = \inf_{n\geqslant 0}\Big\{\|x_{n+1} - q\|\Big\}.$$

下证 $\sigma = 0$. 设相反, $\sigma > 0$. 故 $\|x_{n+1} - q\| \geqslant \sigma > 0$, 对一切 $n \geqslant 0$. 由 φ 的严格增性, $\varphi(\|x_{n+1} - q\|) \geqslant \varphi(\sigma) > 0$. 故由(12) 即得

$$\|x_{n+1} - q\|^2 \leqslant \|x_n - q\|^2 - \frac{\alpha_n}{1-2\alpha_n}\varphi(\sigma) - \frac{\alpha_n}{1-2\alpha_n}\Big\{\varphi(\sigma) - \alpha_n M^2 - 2k_n\Big\}.$$

因 $\alpha_n \to 0$, $k_n \to 0$, 故存在 n_1, 当 $n \geqslant n_1$ 时有 $\varphi(\sigma) - \alpha_n M^2 - 2k_n > 0$. 从而得知当 $n \geqslant n_1$ 时有

$$\|x_{n+1} - q\|^2 \leqslant \|x_n - q\|^2 - \frac{\alpha_n}{1-2\alpha_n}\varphi(\sigma),$$

即

$$\alpha_n\varphi(\sigma) \leqslant \frac{\alpha_n}{1-2\alpha_n}\varphi(\sigma) \leqslant \|x_n - q\|^2 - \|x_{n+1} - q\| \qquad \forall n \geqslant n_1.$$

于是对任意的正整数 $m \geqslant n_1$ 有

$$\sum_{n=n_1}^{m}\alpha_n\varphi(\sigma) \leqslant \|x_{n_1} - q\|^2 - \|x_{m+1} - q\|^2 \leqslant \|x_{n_1} - q\|^2.$$

让 $m \to \infty$ 即得

$$\infty = \sum_{n=n_1}^{\infty}\alpha_n\varphi(\sigma) \leqslant \|x_{n_1} - q\|^2.$$

这是一个矛盾. 故 $\sigma = 0$, 于是存在子序列 $\{x_{n_j}\} \subset \{x_n\}$ 使得

$$\|x_{n_j+1} - q\| \to 0 \qquad (n_j \to \infty).$$

因 $\alpha_n \to 0$, $k_n \to 0\ (n \to \infty)$, 故对任给的 $\varepsilon \in (0, 1)$ 存在 n_{j_0} 使得

$$\begin{cases} \|x_{n_{j_0}+1} - q\| < \varepsilon, \\ \alpha_n < \dfrac{\varphi(\varepsilon)}{2M^2},\ k_n < \dfrac{\varphi(\varepsilon)}{4} \qquad \forall n \geqslant n_{j_0}. \end{cases} \tag{13}$$

下证

$$\| x_{n_{j_0}+i} - q \| \leqslant \varepsilon \qquad 对一切\ i \geqslant 1. \tag{14}$$

事实上，当 $i = 1$ 时，结论由(13)得知。当 $i = 2$ 时，如果

$$\| x_{n_{j_0}+2} - q \| > \epsilon,$$

于是由 φ 的严格增性，有 $\varphi(\| x_{n_{j_0}+2} - q \|) > \varphi(\epsilon)$，上(11)得知

$$\| x_{n_{j_0}+2} - q \|^2 \leqslant \| x_{n_{j_0}+1} - q \|^2 + \frac{\alpha_{n_{j_0}+1}}{1 - 2\alpha_{n_{j_0}+1}} \left\{ \frac{\varphi(\epsilon)}{2} + \frac{\varphi(\epsilon)}{2} - 2\varphi(\epsilon) \right\} \leqslant$$

$$\| x_{n_{j_0}+1} - q \|^2 \leqslant \epsilon^2.$$

这是一个矛盾。因而得证 $\| x_{n_{j_0}+2} - q \| \leqslant \epsilon$。由归纳法可证(14)对一切 $i \geqslant 1$ 成立。由 $\epsilon \in (0, 1)$ 的任意性，可证 $x_n \to q$。定理 2.1 证毕。

由定理 2.1 可得下面的

定理 2.2 设 E 是一实 Banach 空间，D 是 E 之一非空凸子集，$T: D \to D$ 是一致连续的强伪压缩映象，$\{\alpha_n\}$、$\{\beta_n\}$ 是 $[0, 1]$ 中满足定理 2.1 中的条件(i)、(ii)的序列。则对任给的 $x_0 \in D$，由(7)定义的 Ishikawa 迭代序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 $q \in F(T)$ 当而且仅当 $\{Tx_n\}$、$\{Ty_n\}$ 是有界的。

证 因 T 是一致连续的强伪压缩现象，故 T 有唯一不动点 $q \in D$(见 Deimling[2])，而且对任一 $x \in D$ 及 $q \in D$，存在 $j(x - q) \in J(x - q)$ 使得

$$\langle Tx - q, j(x - q) \rangle \leqslant k \| x - q \|^2 =$$

$$\| x - q \|^2 - \varphi(\| x - q \|) \qquad k \in (0, 1),$$

其中 $\varphi(t) = (1 - k)t^2$。故定理 2.2 的结论由定理 2.1 直接可得。

注 1 定理 2.1 和定理 2.2 改进、推广和包含了 Chidume[7] 及 Xu_Roach[14] 的主要结果。定理 2.1 和定理 2.2 的充分部分也改进和推广了 Chidume[8~10], Chang[4~6], Deng_Ding[11], Liu[12], Tan_Xu[13] 及 Zhou[15] 的相应的结果。另外上述两定理中的证明方法也与前述诸文中所使用的方法迥异。

定理 2.3 设 E 是一致凸的光滑的实 Banach 空间，D 是 E 之一非空闭凸子集，$T: D \to D$ 是一非扩张映象且 $F(T) \neq \emptyset$，$\{\alpha_n\}$、$\{\beta_n\}$ 是 $[0, 1]$ 中满足定理 2.1 中的条件(i)、(ii)的二序列。则对任给的 $x_0 \in D$，由(7)定义的 Ishikawa 迭代序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 $q \in F(T)$ 当而且仅当 $\{Tx_n\}$ 及 $\{Ty_n\}$ 是有界的，而且存在严格增函数 $\varphi: [0, \infty) \to [0, \infty)$，$\varphi(0) = 0$ 使得

$$\langle Tx_n - q, J(x_n - q) \rangle \leqslant \| x_n - q \|^2 - \varphi(\| x_n - q \|) \qquad \forall n \geqslant 0. \tag{15}$$

证 因 $T: D \to D$ 是非扩张的，而且 $F(T) \neq \emptyset$，故 T 是一致连续的次_伪压缩映象，从而定理的充分性由定理 2.1 得知。

下证必要性。

设 $x_n \to q$，故 $Tx_n \to q$，从而 $y_n \to q$，$Ty_n \to q$。因而 $\{Tx_n\}$、$\{Ty_n\}$ 是有界的，又因 E 是光滑的 Banach 空间，故正规对偶映象 $J: E \to E^*$ 是单值的。定义

$$K = \sup_{n \geqslant 0} \{ \| x_n - q \| \} < \infty,$$

$$G_t = \{ n \in \mathbf{N}: \| x_n - q \| \geqslant t \} \qquad t \in (0, K),$$

$$G_K = \{ n \in \mathbf{N}: \| x_n - q \| = K \},$$

$$g(t) = \min_{n \in G_t} \{ \| x_n - q \|^2 - \langle Tx_n - q, J(x_n - q) \rangle \} \qquad t \in (0, K).$$

在定理 2.1 中我们已证明 $g(t)$ 是不减的, $g(t) \geqslant 0$, $\forall t \in (0, K)$. 现证 $g(t) > 0$, $\forall t \in (0, K)$. 事实上, 设相反, 存在 $t_0 \in (0, K)$ 使得 $g(t_0) = 0$. 因 G_{t_0} 是一有限集, 故存在 $n_0 \in G_{t_0}$ 使得

$$0 = g(t_0) = \|x_{n_0} - q\|^2 - \langle Tx_{n_0} - q, J(x_{n_0} - q)\rangle.$$

由引理 1.3 有 $x_{n_0} = q$, 即 $\|x_{n_0} - q\| = 0$. 但因 $n_0 \in G_{t_0}$, 由 G_{t_0} 的定义有 $\|x_{n_0} - q\| \geqslant t_0 > 0$. 矛盾. 从而得证 $g(t) > 0$, $\forall t \in (0, K)$.

现定义一函数

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{如果 } t = 0, \\ \dfrac{t}{1+t} g(t) & \text{如果 } t \in (0, K), \\ \dfrac{t}{1+t} \lim\limits_{s \to K_-} g(s) & \text{如果 } t \in [K, \infty). \end{cases}$$

因 g 是不减的且 $g(t) > 0$, $\forall t \in (0, K)$, 故 $\varphi(t): [0, \infty) \to [0, \infty)$ 是严格增的, $\varphi(0) = 0$. 用与定理 2.1 的证明中使用的相同方法, 可证 φ 满足条件(15). 证毕.

注 2 定理 2.3 推广了 Xu_Roach[14] 的定理 2.

在定理 2.1 中, 如果削弱映象 T 的条件, 而加强对空间 E 的条件, 则有下面的

定理 2.4 设 E 是一实的一致光滑的 Banach 空间, D 是 E 之一非空的开凸子集, $T: D \to D$ 是一伪压缩映象且 $F(T) \neq \emptyset$, $\{\alpha_n\}$、$\{\beta_n\}$ 是满足定理 2.1 中的条件(i)、(ii) 的两个序列. 对任给的 $x_0 \in D$, 令 $\{x_n\}$ 是由(7) 定义的 Ishikawa 迭代序列.

1) 如果 $x_n \to q \in F(T)$, 则 $\{Tx_n\}$、$\{Ty_n\}$ 有界且存在一不减函数 $\varphi: [0, \infty) \to [0, \infty)$, $\varphi(0) = 0$, 使得

$$\langle Ty_n - q, J(y_n - q)\rangle \leqslant \|y_n - q\|^2 - \varphi(\|y_n - q\|) \qquad \forall n \geqslant 0. \tag{16}$$

2) 反之, 如果 $\{Tx_n\}$、$\{Ty_n\}$ 有界, 而且存在一严格增的函数 $\varphi: [0, \infty) \to [0, \infty)$, $\varphi(0) = 0$, 满足条件(16), 则 $x_n \to q$.

证 "必要性". 设 $x_n \to q \in D$, 因 D 是开的, 故 q 是 D 的内点. 又因 T 是伪压缩的, 故 $I - T$ 是增生映象. 由引理 1.2, $\{(I - T)x_n\}$ 是有界的, 从而 $\{Tx_n\} = \{(x_n - (I - T)x_n)\}$ 是有界的. 于是得知

$$y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n Tx_n \to q \qquad (n \to \infty).$$

类似可证 $\{Ty_n\}$ 是有界的.

因 E 是一致光滑的, 故正规对偶映象 $J: E \to E^*$ 是单值的, 且在 E 的任一有界集上是一致连续的. 另由命题 1.1(4), T 是次_伪压缩的, 故对任意的 y_n, $n \geqslant 0$ 及 $q \in F(T)$, 有

$$\langle Ty_n - q, J(y_n - q)\rangle \leqslant \|y_n - q\|^2. \tag{17}$$

定义

$$L = \sup_{n \geqslant 0}\{\|y_n - q\|\} < \infty,$$
$$H_t = \{n \in \mathbf{N}: \|y_n - q\| \geqslant t\} \qquad t \in (0, L),$$
$$H_L = \{n \in \mathbf{N}: \|y_n - q\| = L\},$$
$$h(t) = \min_{n \in H_t}\{\|y_n - q\|^2 - \langle Ty_n - q, J(y_n - q)\rangle\} \qquad t \in (0, L).$$

用与定理 2.1 的证明过程中的相同方法, 可证 $h(t)$ 是不减的, 而且 $h(t) \geqslant 0$, $\forall t \in (0, L)$.

现定义函数 φ 如下:

$$\varphi(t)=\begin{cases}0 & \text{如果 } t=0,\\ h(t) & \text{如果 } t\in(0,L),\\ \lim\limits_{s\to L-}h(s) & \text{如果 } t\in[L,\infty)\cdot\end{cases}$$

仿定理 2.1, 可证 $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 是不减的, $\varphi(0)=0$, 而且满足条件(16)• 必要性得证•

"充分性"• 设$\{Tx_n\}$、$\{Ty_n\}$是有界的, 而且存在一严格增的函数 $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$, $\varphi(0)=0$ 满足条件(16)• 由(7) 及归纳法可证$\{x_n\}$和$\{y_n\}$都是有界的•

另由引理 1.1 及(16) 有

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-q\|^2&=\|(1-\alpha_n)(x_n-q)+\alpha_n(Ty_n-q)\|^2\leqslant\\&(1-\alpha_n)^2\|x_n-q\|^2+2\alpha_n\langle Ty_n-q,J(x_{n+1}-q)\rangle=\\&(1-\alpha_n)^2\|x_n-q\|^2+2\alpha_n\langle Ty_n-q,J(x_{n+1}-q)-J(y_n-q)\rangle+\\&2\alpha_n\langle Ty_n-q,J(y_n-q)\rangle\cdot\end{aligned}\tag{18}$$

现考察(18) 右端第二项• 因$\{Ty_n-y_n\}$及$\{x_n-Tx_n\}$都是有界的, 而且

$$\begin{aligned}x_{n+1}-q-(y_n-q)&=(1-\alpha_n)(x_n-y_n)+\alpha_n(Ty_n-y_n)=\\&(1-\alpha_n)\beta_n(x_n-Tx_n)+\alpha_n(Ty_n-y_n)\cdot\end{aligned}$$

故 $x_{n+1}-q-(y_n-q)\to\theta\ (n\to\infty)$• 由 J 的一致连续性及$\{Ty_n-q\}$的有界性知

$$p_n:=\langle Ty_n-q,J(x_{n+1}-q)-J(y_n-q)\rangle\to0\qquad(n\to\infty),\tag{19}$$

把(16)、(19) 代入(18) 得

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-q\|^2&\leqslant(1-\alpha_n)^2\|x_n-q\|^2+2\alpha_np_n+\\&2\alpha_n\{\|y_n-q\|^2-\varphi(\|y_n-q\|)\}\cdot\end{aligned}\tag{20}$$

下面我们对 $\|y_n-q\|^2$ 作估计:

$$\begin{aligned}\|y_n-q\|^2&=\|(1-\beta_n)(x_n-q)+\beta_n(Tx_n-q)\|^2\leqslant\\&(1-\beta_n)^2\|x_n-q\|^2+2\beta_n\langle Tx_n-q,J(y_n-q)\rangle\leqslant\\&(1-\beta_n)^2\|x_n-q\|^2+2\beta_nM_1,\end{aligned}\tag{21}$$

其中

$$M_1=\sup_{n\geqslant0}\{\|Tx_n-q\|\cdot\|y_n-q\|\}<\infty\cdot$$

把(21) 代入(20) 并使用 $M_2=\sup\limits_{n\geqslant0}\|x_n-q\|^2$ 和 $M_3=\max\{M_1,M_2\}$ 进行化简得

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-q\|^2&\leqslant[(1-\alpha_n)^2+2\alpha_n(1-\beta_n)^2]\|x_n-q\|^2+\\&2\alpha_n(p_n+2\beta_nM_1)-2\alpha_n\varphi(\|y_n-q\|)\leqslant\\&\|x_n-q\|^2-\alpha_n\varphi(\|y_n-q\|)-\\&\alpha_n\{\varphi(\|y_n-q\|)-(\alpha_n+6\beta_n)M_3-2p_n\}\cdot\end{aligned}\tag{22}$$

令

$$\sigma=\inf_{n\geqslant0}\{\|y_n-q\|\}\cdot$$

下证 $\sigma=0$• 设相反 $\sigma>0$, 则 $\|y_n-q\|\geqslant\sigma>0$, $\forall n\geqslant0$• 故 $\varphi(\|y_n-q\|)\geqslant\varphi(\sigma)>0$• 由(22) 即得

$$\|x_{n+1}-q\|^2\leqslant\|x_n-q\|^2-\alpha_n\varphi(\sigma)-\alpha_n\{\varphi(\sigma)-(\alpha_n+6\beta_n)M_3-2p_n\}\cdot$$

因 $\alpha_n\to0$, $\beta_n\to0$, $p_n\to0$, 故存在 n_2, 当 $n\geqslant n_2$ 时, $\varphi(\sigma)-(\alpha_n+6\beta_n)M_3-2p_n>0$• 于是有

$$\|x_{n+1}-q\|^2 \leqslant \|x_n-q\|^2-\alpha_n\varphi(\sigma) \qquad \forall n \geqslant n_2.$$

即 $$\alpha_n\varphi(\sigma) \leqslant \|x_n-q\|^2-\|x_{n+1}-q\|^2 \qquad \forall n \geqslant n_2.$$

于是对任意的 $n \geqslant n_2$, 有

$$\sum_{n=n_2}^{m}\alpha_n\varphi(\sigma) \leqslant \|x_{n_2}-q\|^2-\|x_{m+1}-q\|^2 \leqslant \|x_{n_2}-q\|^2.$$

记 $m \to \infty$, 即得

$$\infty=\sum_{n=n_2}^{\infty}\alpha_n\varphi(\sigma) \leqslant \|x_{n_2}-q\|^2.$$

矛盾. 由此矛盾知 $\sigma=0$. 故存在子序列 $\{y_{n_j}\} \subset \{y_n\}$ 使得 $y_{n_j} \to q\ (n_j \to \infty)$, 即

$$y_{n_j}=(1-\beta_{n_j})x_{n_j}+\beta_{n_j}Tx_{n_j} \to q \qquad (n_j \to \infty).$$

因 $\alpha_n \to 0$, $\beta_n \to 0$, 且 $\{Tx_n\}$、$\{Ty_n\}$ 是有界的, 故得

$$x_{n_j} \to q \qquad (n_j \to \infty). \tag{23}$$

由(23)即得

$$x_{n_j+1}=(1-\alpha_{n_j})x_{n_j}+\alpha_{n_j}Ty_{n_j} \to q \qquad (n_j \to \infty),$$

从而

$$y_{n_j+1}=(1-\beta_{n_j+1})x_{n_j+1}+\beta_{n_j+1}Tx_{n_j+1} \to q \qquad (n_j \to \infty).$$

用归纳法可证: $x_{n_j+i} \to q$, $y_{n_j+i} \to q\ (n_j \to \infty)$, $\forall i \geqslant 0$. 因而 $x_n \to q$. 定理 2.4 证毕.

3 次_伪压缩映象 Mann 迭代序列收敛的充分必要条件

在本节中我们将研究次_伪压缩映象的 Mann 迭代序列收敛的充分必要条件. 在定理 2.1 ~ 2.4 中, 如果 $\beta_n=0$, $\forall n \geqslant 0$, 则有下面的结果:

定理 3.1 设 E 是一实 Banach 空间, D 是 E 之一非空凸子集, $T: D \to D$ 是一致连续的次_伪压缩映象. 设 $\{\alpha_n\}$ 是 $[0,1]$ 中满足下述条件的序列:

(i) $\alpha_n \to 0\ (n \to \infty)$;

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$.

设 $x_0 \in D$ 是任一给定的点, $\{x_n\}$ 是由下式定义的 Mann 迭代序列:

$$x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_nTx_n. \tag{24}$$

1) 如果 $\{x_n\}$ 收敛于 T 在 D 中的不动点 q, 则 $\{Tx_n\}$ 是有界的, 而且存在不减的函数 $\varphi: [0,\infty) \to [0,\infty)$, $\varphi(0)=0$, 使得对 q 及对任意的 x_n, 存在 $j(x_n-q) \in J(x_n-q)$ 满足

$$\langle Tx_n-q, j(x_n-q)\rangle \leqslant \|x_n-q\|^2-\varphi(\|x_n-q\|) \qquad \forall n \geqslant 0; \tag{25}$$

2) 反之, 如果 $\{Tx_n\}$ 是有界的, 而且存在一严格增的函数 $\varphi: [0,\infty) \to [0,\infty)$, $\varphi(0)=0$, 使得对给定的 $q \in F(T)$ 及任意的 x_n, 存在 $j(x_n-g) \in J(x_n-q)$ 满足条件(25), 则 $x_n \to q$.

定理 3.2 设 E 是一实 Banach 空间, D 是 E 之一非空凸子集, $T: D \to D$ 是一致连续的强伪压缩映象, $\{\alpha_n\}$ 是 $[0,1]$ 中满足定理 3.1 中的条件(i)、(ii)的序列. 则对任给的 $x_0 \in D$, 由(24)定义的 Mann 迭代序列 $\{x_n\}$ 收敛于 $q \in F(T)$ 当而且仅当 $\{Tx_n\}$ 是有界的.

定理 3.3 设 E 是一致凸的光滑的实 Banach 空间, D 是 E 之一非空闭凸集, $T: D \to D$ 是一非扩张映象且 $F(T) \neq \emptyset$, $\{\alpha_n\}$ 是 $[0,1]$ 中满足定理 3.1 中的条件(i)、(ii)的序列. 则对

给定的 $q \in F(T)$ 及对给定的 $x_0 \in D$, 由(24) 定义的 Mann 迭代序列$\{x_n\}$强收敛于q, 当而且仅当$\{Tx_n\}$是有界的, 而且存在一严格增的函数 $\varphi: [0, \infty) \to [0, \infty)$, $\varphi(0) = 0$, 使得

$$\langle Tx_n - q, J(x_n - q)\rangle \leqslant \|x_n - q\|^2 - \varphi(\|x_n - q\|) \qquad \forall n \geqslant 0. \tag{26}$$

定理 3.4 设 E 是一致光滑的实 Banach 空间, D 是E 之一非空开凸子集, $T: D \to D$ 是一伪压缩映象且 $F(T) \neq \emptyset$, $\{\alpha_n\}$ 是$[0, 1]$ 中满足定理3.1中的条件(i)、(ii) 的序列. 对任给的 $x_0 \in D$, 设$\{x_n\}$ 是由(24) 定义的Mann 迭代序列.

1) 如果 $x_n \to q \in F(T)$, 则$\{Tx_n\}$是有界的, 而且存在一不减的函数 $\varphi: [0, \infty) \to [0, \infty)$, $\varphi(0) = 0$, 使得

$$\langle Tx_n - q, J(x_n - q)\rangle \leqslant \|x_n - q\|^2 - \varphi(\|x_n - q\|) \qquad \forall n \geqslant 0. \tag{27}$$

2) 反之, 如果$\{Tx_n\}$是有界的, 而且存在一严格增的函数 $\varphi: [0, \infty) \to [0, \infty)$, $\varphi(0) = 0$ 满足条件(27), 则 $x_n \to q$.

4 次_增生映象的 Ishikawa 迭代序列收敛性的充分必要条件

定理 4.1 设 E 是一实Banach 空间, $T: E \to E$ 是一致连续的次_增生映象, $\{\alpha_n\}$、$\{\beta_n\}$ 是$[0, 1]$ 中满足定理 2.1 中条件(i)、(ii) 的序列. 设 $x_0 \in E$ 是任给的点, $\{x_n\}$ 是由下式定义的 Ishikawa 迭代序列:

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n(I - T)y_n \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n(I - T)x_n \end{cases} \qquad \forall n \geqslant 0. \tag{28}$$

1) 如果$\{x_n\}$强收敛于$p \in N(T)$(T在E 中的零点的集合), 则$\{(I - T)x_n\}$、$\{(I - T)y_n\}$均为有界的, 而且存在一不减的函数 $\varphi: [0, \infty) \to [0, \infty)$, $\varphi(0) = 0$ 使得对 p 及任一x_n, $n \geqslant 0$, 存在$j(x_n - p) \in J(x_n - p)$ 满足

$$\langle Tx_n, j(x_n - p)\rangle \geqslant \varphi(\|x_n - p\|) \qquad \forall n \geqslant 0; \tag{29}$$

2) 反之, 如果$\{(I - T)x_n\}$和$\{(I - T)y_n\}$是有界的, 而且存在一严格增的函数 $\varphi: [0, \infty) \to [0, \infty)$, $\varphi(0) = 0$, 满足条件(29), 则 $x_n \to p$.

证 因T是一致连续的次 _增生映象, 由命题1.1, $(I - T)$ 是一致连续的次 _伪压缩映象, 而且如果 p 是T 在 E 中的零点, 则p 是$(I - T)$ 在 E 中的不动点. 由定理2.1, 如果由(28) 定义的Ishikawa迭代序列$\{x_n\}$收敛于p, 则$\{(I - T)x_n\}$和$\{(I - T)y_n\}$都是有界的, 而且存在一不减函数 $\varphi: [0, \infty) \to [0, \infty)$, $\varphi(0) = 0$, 使得对给定的p 和任一x_n, 存在$j(x_n - p)$ 满足

$$\langle (I - T)x_n - p, j(x_n - p)\rangle \leqslant \|x_n - p\|^2 - \varphi(\|x_n - p\|).$$

因p 是$I - T$ 的不动点, 故有

$$\begin{aligned} &\langle (I - T)x_n - (I - T)p, j(x_n - p)\rangle = \\ &\quad \|x_n - p\|^2 - \langle Tx_n - Tp, j(x_n - p)\rangle \leqslant \\ &\quad \|x_n - p\|^2 - \varphi(\|x_n - p\|). \end{aligned}$$

因$Tp = 0$, 故有

$$\langle Tx_n, j(x_n - p)\rangle \geqslant \varphi(\|x_n - p\|).$$

必要性得证.

仿定理2.1 的充分性的证明方法, 可证定理 4.1 的充分性. 证毕.

定理 4.2 设 E 是一实 Banach 空间, $T: E \to E$ 是一致连续的强增生映象. 设$\{\alpha_n\}$、$\{\beta_n\}$ 是$[0, 1]$ 中满足定理2.1中条件(i)、(ii) 的序列, 则对任一 $x_0 \in E$ 由(28) 定义的 Ishikawa 迭

代序列$\{x_n\}$强收敛于T 在 E 中的零点当而且仅当$\{(I-T)x_n\}$、$\{(I-T)y_n\}$有界•

证 因T 是一致连续的强增生映象,故(I- T) 是一致连续的强伪压缩映象• 如果 p 是T 的零点,则 p 是(I- T)的不动点,故定理的结论由定理 2.2 可得•

定理 4.3 设 E 是一实 Banach 空间,$T: E \to E$ 是一致连续的次_增生映象,$\{\alpha_n\}$、$\{\beta_n\}$是 $[0,1]$ 中满足定理 3.1 中条件(ⅰ)、(ⅱ) 的序列• 设 $x_0 \in E$ 是任给的点,$\{x_n\}$是由下式定义的最速下降序列:

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_n T x_n \qquad n \geqslant 0• \tag{30}$$

1) 如果$\{x_n\}$强收敛于 $p \in N(T)$,则$\{(I-T)x_n\}$是有界的,而且存在不减的函数 $\varphi:[0,\infty) \to [0,\infty)$,$\varphi(0)=0$ 使得对给定的 p 及任一 x_n, $n \geqslant 0$,存在 $j(x_n - p) \in J(x_n - p)$ 满足

$$\langle Tx_n, j(x_n - p)\rangle \geqslant \varphi(\|x_n - p\|) \qquad \forall n \geqslant 0; \tag{31}$$

2) 反之,如果$\{(I-T)x_n\}$是有界的,而且存在一严格增的函数 $\varphi:[0,\infty) \to [0,\infty)$,$\varphi(0) = 0$ 满足条件(31),则 $x_n \to p$•

证 在(28) 中取 $\beta_n = 0$, $\forall n \geqslant 0$,则 $y_n = x_n$,而且

$$x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n(I-T)x_n = x_n - \alpha_n T x_n,$$

故定理4.3 的结论由定理 4.1 直接可得•

注 4.3 定理 4.1、4.3 也改进和推广了 Chidume[7]和 Xu_Roach[14] 的主要结果•

[参 考 文 献]

[1] Browder F E. Nonlinear mappings of nonexpansive and accretive type in Banach spaces[J]. Bull Amer Math Soc, 1967, **73**: 875—882.

[2] Deimling K. Zeros of accretive mapping[J]. Manuscripta Math, 1974, **13**: 365—374.

[3] Martin R H. A global existence theorem for autonomous differential equations in Banach spaces[J]. Proc Amer Math Soc, 1970, **26**: 307—314.

[4] CHANG Shih_sen. On Chidume' s open questions and approximate solutions of multivalued strongly accrettive mapping equations in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 1997, **216**: 94—111.

[5] CHANG Shih_sen. Some problems and results in the study of nonlinear analysis[J]. Nonlinear Anal TMA, 1997, **30**: 4197—4208.

[6] CHANG Shih_sen, Cho Y J, Lee B S, et al. Iterative approximations of fixed points and solutions for strongly accretive and strongly pseudo_contractive mappings in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 1998, **224**: 149—165.

[7] Chidume C E. Steepest descent approximations for accretive operator equations[J]. Nonlinear Anal, TMA, 1996, **26**: 299—311.

[8] Chidume C E, Osilike M O. Nonlinear accretive and pseudo_contractive operator equations in Banach spaces[J]. Nonlinear Anal, TMA, 1998, **31**: 779—789.

[9] Chidume C E. Iterative solutions of nonlinear equations with strongly accretive operators[J]. J Math Anal Appl, 1995, **192**: 502—518.

[10] Chidume C E. Global iteration schemes for strongly pseudo_contractive maps[J]. Proc Amer Math Soc, 1998, **126**(9): 2614—2649.

[11] Deng L, Ding X P. Iterative approximation of Lipschitz strictly pseudo_contractive mappings in uniformly smooth Banach spaces[J]. Nonlinear Anal, TMA, 1995, **24**: 981—987.

[12] Liu L W. Approximation of fixed points of a strongly pseudo_contractive mappings[J]. Proc Amer Math Soc, 1997, **125**: 1363—1366.

[13] Tan K K, Xu H K. Iterative solution to nonlinear equations and strongly accretive operators in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 1993, **178**: 9—21.

[14] Xu Z B, Roach G F. A necessary and sufficient condition for convergence of streepest descent approximation to accretive operator equations[J]. J Math Anal Appl, 1992, **167**: 340—354.

[15] Zhou H Y, Jia Y T. Approximation of fixed points of strongly pseudo_contractive maps without Lipschitz assumption[J]. Proc Amer Math Soc, 1997, **125**: 1705—1709.

[16] Fitzpatrick P M, Hess P, Kato T. Local boundedness of monotone type operators[J]. Proc Japan Acad, 1972, **48**: 275—277.

[17] Kato T. Nonlinear semigroups and evolution equations[J]. J Math Soc Japan, 1967, **19**: 508—520.

Some Convergence Problem of Iterative Sequences for Accretive and Pseudo_Contractive Type Mappings in Banach Spaces

ZHANG Shi_sheng

(Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, P R China)

Abstract: Some necessary and sufficient conditions for convergence of Ishikawa Mann and steepest descent iterative sequence for accretive and pseudo_contractive type mappings in Banach spaces were obtained. The results improve, extend and include some recent results.

Key words: accretive mapping; pseudo_contractive mapping; hemi_accretive mapping; hemi_pseudo_contractive mapping; Ishikawa iterative sequence; Mann iterative sequence; steepest descent sequence