

文章编号: 1000-0887(2002) 04-0429-07

不同马赫数 Navier-Stokes 方程 计算方法的研究*

赵兴艳¹, 苏莫明², 苗永淼¹

(1. 西安交通大学 流体工程系, 西安 710049; 2. 西北工业大学 航空动力系, 西安 710072)

(林建忠推荐)

摘要: 为了在低马赫数到高马赫数范围内求解可压缩 Navier-Stokes 方程, 给出了基于预处理算法的 PLU_SGS 方法。将高分辨率 AUSMPW 格式与三阶 MUSCL 格式融合, 将其扩展到三阶精度, 并采用特征边界条件。为了验证该方法的有效性, 通过求解曲线坐标系可压缩 Navier-Stokes 方程, 对几个典型流动问题进行了数值计算。计算结果与文献计算结果或实验数据比较表明, 该方法对不同马赫数 Navier-Stokes 方程的计算, 具有较高的计算精度和收敛速度以及良好的稳定性。

关键词: 非线性双曲型方程; 计算流体动力学; 预处理算法; 隐式时间推进法;
特征边界条件; 高阶精度

中图分类号: O354 文献标识码: A

引 言

在计算流体力学中, 一般通过求解可压缩 Navier-Stokes 方程, 对可压缩粘性流动进行数值模拟。因缺乏分析非线性 Navier-Stokes 方程的数学工具, 一般采用数值方法通过离散形式求解该方程。近十年来, 计算机的速度、内存等性能得到迅速提高。相应地, 基于 Navier-Stokes 方程的守恒形式, 许多求解稳态可压缩流场的数值方法被提出。其中, 时间推进法被广泛接受和应用。非线性双曲型 Navier-Stokes 方程的求解。该方法是将定常 Navier-Stokes 方程改变为非定常 Navier-Stokes 方程, 进行数值求解。尽管方程形式发生了变化, 但仍然保持良好的初、边值问题特性, 并不影响最后的稳态解。这种处理方法也是有代价的, 这就是时间精确的 Navier-Stokes 方程存在刚性问题, 并取决于流动马赫数和雷诺数。当流动速度的大小远小于音速时, 任何时间推进法的收敛速度都要降低。因此, 为了解决此问题, 时间推进法中往往采用预处理算法。近几年, 预处理算法对可压缩和不可压缩流动的数值分析取得了很大进展^[1~3]。

本文目的是给出基于预处理算法的 PLU_SGS 方法, 结合高阶精度 AUSMPW 格式在低马赫数到超音速流动范围内有效而精确地求解非线性双曲型可压缩 Navier-Stokes 方程。为了检验该方法, 本文对顶盖驱动方腔流动以及喷管超音速流动进行计算, 并将计算结果与文献计算结果或实验数据比较, 以评价该方法的精度和特性。

* 收稿日期: 1999_10_13; 修订日期: 2001_10_12

作者简介: 赵兴艳(1967—), 男, 兰州人, 讲师, 博士。

1 数学模型

1.1 控制方程

在任意曲线坐标系 (ξ_1, ξ_2, ξ_3) 中, 三维可压缩 Navier-Stokes 方程组形式为

$$J \partial \mathbf{Q} / \partial t + \operatorname{div}(\mathbf{F}^C - \mathbf{F}^V) = 0, \quad (1)$$

其中, $\mathbf{Q} = [\rho \quad \rho u_1 \quad \rho u_2 \quad \rho u_3 \quad \rho E]^T \in \mathcal{R}^5$; $\mathbf{F}^C \in \mathcal{R}^5 \otimes \mathcal{R}^3$, $\mathbf{F}^V \in \mathcal{R}^5 \otimes \mathcal{R}^3$. \mathbf{F}_i^C 、 \mathbf{F}_i^V 定义为

$$\mathbf{F}_i^C = J \left[\rho U_i \quad \rho u_1 U_i + \frac{\partial \xi_i}{\partial x_1} p \quad \rho u_2 U_i + \frac{\partial \xi_i}{\partial x_2} p \quad \rho u_3 U_i + \frac{\partial \xi_i}{\partial x_3} p \quad \rho U_i H \right]^T, \quad (2)$$

$$\mathbf{F}_i^V = J \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \left[0 \quad \tau_{1j} \quad \tau_{2j} \quad \tau_{3j} \quad \tau_{ij} u_i + \kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} \right]^T, \quad (3)$$

其中, t 为时间, x_i 为直角坐标, ξ_i 为曲线坐标, u_i 为物理速度分量, U_i 为逆变速度分量, ρ 为气体密度, p 为气体压力, E 为总能, H 为总焓.

对于理想气体存在下列关系式:

$$p = \rho R_g T, \quad E = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho} + \frac{1}{2} u_i u_i, \quad H = E + \frac{p}{\rho}, \quad (4)$$

其中, R_g 为气体常数, γ 为气体比热比. Jacobi 矩阵行列式 J 、逆变速度分量 U_i 、应力张量的剪应力分量 τ_{ij} 分别定义为

$$J = \partial(x_1, x_2, x_3) / \partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad (5)$$

$$U_i = (\partial \xi_i / \partial x_j) u_j \quad (i = 1, 2, 3), \quad (6)$$

$$\tau_{ij} = \mu \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right] \quad (i, j, k = 1, 2, 3), \quad (7)$$

其中, μ 为分子粘性系数, κ 为分子导热系数, δ_{ij} 为 Kronecker 符号.

1.2 预处理算法

预处理算法的目的是通过改变时间导数项, 适应引入的时间尺度, 从而, 使方程更好地适合有效而精确的数值逼近. 许多预处理算法是通过改变时间导数项来实现的, 它不影响方程最后的稳态解. 通过预处理矩阵 Γ 将基于密度为求解变量 \mathbf{Q} 的 Navier-Stokes 方程, 改为基于压力为求解变量 ($\mathbf{W} = [p \quad u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad T]^T \in \mathcal{R}^5$) 的 Navier-Stokes 方程, 则方程(1)变为

$$J \Gamma \partial \mathbf{W} / \partial t + \operatorname{div}(\mathbf{F}^C - \mathbf{F}^V) = 0, \quad (8)$$

其中, Γ 为预处理矩阵, 其定义为^[1,3]

$$\Gamma = \partial \mathbf{Q} / \partial \mathbf{W} + \Theta \mathbf{r} \mathbf{s}^T, \quad (9)$$

其中 $\mathbf{r}^T = [1 \quad u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad H]$, $\mathbf{s}^T = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$,

$$\Theta = 1/U_{\text{ref}}^2 - 1/c^2, \quad (10)$$

$$U_{\text{ref}}^2 = \min[c^2, \max(|\mathbf{V}|^2, K|\mathbf{V}_\infty|^2)]J, \quad (11)$$

式中, $|\mathbf{V}|$ 为速度绝对值, $|\mathbf{V}_\infty|$ 为来流速度, c 为音速, K 为系数, 取为 0.25.

预处理方程组在 ξ_i 方向的最大特征值为^[4]

$$\lambda_{\max}^{\xi_i} = 0.5 \left\{ \left[\left(1 - \alpha + \beta \frac{M_{\text{ref}}^2}{c^2} \right) U_i + \sqrt{\left[\left(1 - \alpha + \beta \frac{M_{\text{ref}}^2}{c^2} \right) U_i \right]^2 + 4\beta M_{\text{ref}}^2 \left(|\nabla \xi_i|^2 - \frac{U_i^2}{c^2} \right)} \right] \right\}, \quad (12)$$

其中, $\alpha = 0$, $M_{\text{ref}}^2 = U_{\text{ref}}^2 / c^2$, $\beta = k \sqrt{R_g T}$, k 的定义为

$$k = \max \left\{ 1, \max_i \left[\frac{\alpha_i (\alpha_i - 1)}{\alpha_i - 1 + \sqrt{R_g T} / u_i^2} \right] \right\}, \quad (13)$$

$$\alpha_i = F_{\text{CFL}} / \sigma \text{Re}_{\Delta x_i}, \quad (14)$$

其中, F_{CFL} 为 Courant-Friedrichs-Lewy 数, σ 是 von Neumann 数, $\text{Re}_{\Delta x_i}$ 为网格雷诺数, Δx_i 为网格特征长度。

2 差分格式

当前迎风差分格式的研究都希望具有 Van Leer 提出的 FVS(flux vector splitting) 格式的高计算效率和 Roe 提出的 FDS(flux difference splitting) 格式的高计算精度。从 90 年代开始, 出现一种衍生的迎风格式。Liou 等^[4] 提出的 AUSM(advective upwind splitting method) 格式, 融合了 Van Leer 的 FVS 格式和 Roe 的 FDS(flux difference splitting) 格式的优点, 并相继出现了改进的 AUSM⁺ 格式^[5]。Kim^[6] 进一步改进上述格式, 提出了 AUSMPW(AUSM by pressure-based weight functions) 格式。本文对 Navier-Stokes 方程对流项的离散采用 AUSMPW 格式。

AUSMPW 格式本身只具有一阶空间精度, 并取决于计算单元界面左、右侧变量的确定。对一阶空间精度格式, 界面左、右侧原始变量分别取界面相邻节点 (i, j, k) 、 $(i+1, j, k)$ 的值。本文为了将 AUSMPW 格式扩展到三阶精度, 采用基于原始变量具有三阶精度 MUSCL 格式, 确定界面左、右侧原始变量。三阶精度 MUSCL 格式为^[7]:

$$\begin{cases} \mathbf{W}_{i+1/2, j, k}^L = \mathbf{W}_{i, j, k} + \left\{ \frac{\mu}{4} [(1 - \phi) \Delta_+ + (1 + \phi) \Delta_+] \right\}_{i, j, k}, \\ \mathbf{W}_{i+1/2, j, k}^R = \mathbf{W}_{i+1, j, k} - \left\{ \frac{\mu}{4} [(1 - \phi) \Delta_+ + (1 + \phi) \Delta_-] \right\}_{i+1, j, k}, \end{cases} \quad (15)$$

其中, $(\Delta_+)_{i, j, k} = \mathbf{W}_{i+1, j, k} - \mathbf{W}_{i, j, k}$, $(\Delta_-)_{i, j, k} = \mathbf{W}_{i, j, k} - \mathbf{W}_{i-1, j, k}$, $\phi = 1/3$, μ 为通量限制器, 其定义为

$$\mu = (2 \Delta_+ \cdot \Delta_+ + \varepsilon) / ((\Delta_+)^2 + (\Delta_-)^2 + \varepsilon), \quad (16)$$

式中, $\phi = 1/3$, ε 为一小值, 取 $\varepsilon = 10^{-16}$ 。

3 隐式求解过程

3.1 离散和线性化

对于方程(8), 时间项采用 Euler 一侧后差格式离散, 对流项采用 AUSMPW 格式离散, 粘性项采用中心差分格式离散, 并线性化得

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{I}}{\Delta t_{i, j, k}} \Gamma + (\delta_{\xi_1}^+ \mathbf{A}_1^+ + \delta_{\xi_2}^+ \mathbf{A}_1^- + \delta_{\xi_2}^- \mathbf{A}_2^+ + \delta_{\xi_2}^+ \mathbf{A}_2^- + \delta_{\xi_3}^+ \mathbf{A}_3^+ + \delta_{\xi_3}^+ \mathbf{A}_3^-) \Gamma \right]^n \Delta \mathbf{W}_{i, j, k}^{n+1} = \\ & - \mathbf{R}_{i, j, k}^n, \end{aligned} \quad (17)$$

其中 $\Delta \mathbf{W}_{i, j, k}^{n+1} = \mathbf{W}_{i, j, k}^{n+1} - \mathbf{W}_{i, j, k}^n$, $\Delta t_{i, j, k}$ 为时间步长, δ_i^+ 和 δ_i^- 为向前和向后的差分算子, \mathbf{A}_i^+ 和 \mathbf{A}_i^- 为 Jacobi 矩阵分裂成的正、负矩阵, $\mathbf{R}_{i, j, k}^n$ 为离散方程右端项。

3.2 PLU_SGS 方法

LU_SGS 方法由 Jameson & Yoon^[8] 针对未预处理的 Navier-Stokes 方程提出的。该方法因不需要矩阵求逆, 其收敛速度比传统隐式时间推进法快。与 ADI 方法相比, LU_SGS 方法具有计算效率高、稳定性好的优点, 尤其对多维问题更为明显。Jacobi 矩阵可以分裂为

$$A_i^{\pm} = 0.5(A_i \pm \lambda_{\max}^{\xi} I), \quad (18)$$

其中 A_i 是 F_i^C 的 Jacobi 矩阵, $A_i = \partial F_i^C / \partial Q$, I 是单位矩阵。

本文根据 Yoon 和 Jameson^[8] 提出的 LU-SGS 方法的思想, 将离散方程构造为

$$(L + D)D^{-1}(D + U)\Delta W_{i,j,k}^{n+1} = -R_{i,j,k}^n, \quad (19)$$

其中

$$L = (A_1^+ \Gamma)_{i-1,j,k} + (A_2^+ \Gamma)_{i,j-1,k} + (A_3^+ \Gamma)_{i,j,k-1}, \quad (20)$$

$$U = -[(A_1^- \Gamma)_{i+1,j,k} + (A_2^- \Gamma)_{i,j+1,k} + (A_3^- \Gamma)_{i,j,k+1}], \quad (21)$$

$$D = \frac{J \cdot \Gamma}{\Delta t_{i,j,k}} + (\lambda_{\max}^{\xi_1} + \lambda_{\max}^{\xi_2} + \lambda_{\max}^{\xi_3}) I \cdot \Gamma. \quad (22)$$

方程 (19) 求解可以分为三步:

第一步: 从计算区域的左下角开始计算, 向右上角扫描, 即

$$(L + D)\Delta W_{i,j,k}^* = -R_{i,j,k}^n; \quad (23)$$

第二步: 从计算区域的右上角开始计算, 向左下角扫描, 即

$$(D + U)\Delta W_{i,j,k}^{n+1} = D\Delta W_{i,j,k}^*; \quad (24)$$

第三步: 更新全场求解变量, 即

$$W_{i,j,k}^{n+1} = W_{i,j,k}^n + \Delta W_{i,j,k}^{n+1}. \quad (25)$$

3.3 局部时间步长法

对同一 F_{CFL} 数, 每一个网格节点取不同的时间步长, 可以加速收敛。本文采用局部时间步长法, 其局部时间步长定义为

$$\Delta t_{i,j,k} = F_{CFL} \min\left[1/\lambda_{\max}^{\xi_1}, 1/\lambda_{\max}^{\xi_2}, 1/\lambda_{\max}^{\xi_3}\right], \quad (26)$$

其中 F_{CFL} 是 Courant-Friedrichs-Lewy 数。

3.4 收敛指标

将对数相对全局残差 K 作为衡量迭代过程收敛性的指标, 其定义为

$$K = \lg(R(N)/R(1)) \leq \varepsilon, \quad (27)$$

其中, N 为迭代次数, $\varepsilon = -4.0$, 全局残差 $R(N)$ 定义为

$$R(N) = \left[\frac{\sum_{i=2}^{I_{\max}-1} \sum_{j=2}^{J_{\max}-1} \sum_{k=2}^{K_{\max}-1} \sum_{m=1}^5 \left(\frac{m W_{i,j,k}^{n+1} - m W_{i,j,k}^n}{m W_{rms}^{n+1}} \right)^2}{5(I_{\max}-2)(J_{\max}-2)(K_{\max}-2)} \right]^{1/2}, \quad (28)$$

其中, ${}^m W$ 为求解变量第 m 个分量, ${}^m W_{rms}$ 为全局均方根求解变量, I_{\max} 、 J_{\max} 、 K_{\max} 分别为 ξ_1 、 ξ_2 、 ξ_3 方向的最大节点数。

3.5 边界条件

对于 Navier-Stokes 方程, 采用特征边界条件, 可获得精确的边界点的值, 可以加速收敛到稳态解。由于方程预处理时, 改变了方程的形式, 同时也改变了特征方程。于是, 原来的特征变量不能正确度量马赫数趋于零的情况, 并且在极限情况下不能获得好的边界条件。所以, 修改或改进特征边界条件是必需的。本文采用文献[2]给出的基于预处理算法的特征边界条件。

4 数值试验分析

为了检验该方法, 本文对方腔顶盖驱动流动以及超音速喷管粘性流动进行了计算, 并将计

算结果与文献计算结果或实验数据进行比较。

4.1 方腔顶盖驱动流动

第一个研究问题是方腔顶盖驱动流动。方腔顶盖驱动流动具有几何形状简单、边界条件提法明确等优点。所以经常被计算流体力学研究者用作典型的流动问题来检验他们所提出的计算方法、差分格式等。文献[9]利用涡函数_流函数的方法,给出的方腔顶盖驱动流动的计算结果,被公认为该算例的基准解。

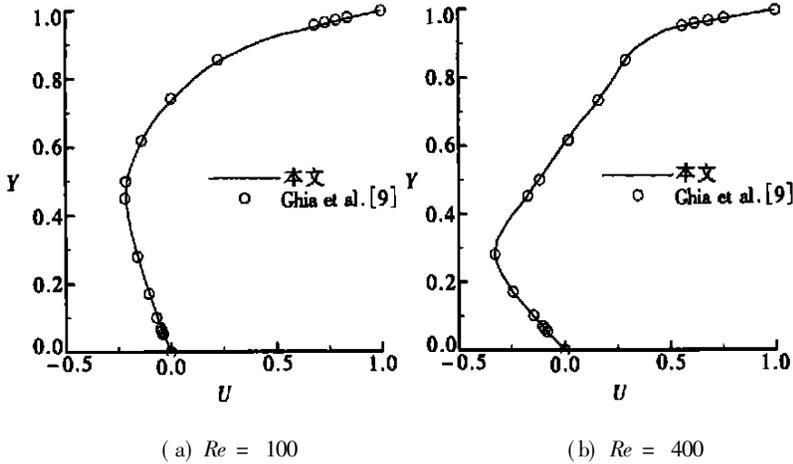


图1 速度分量 u 沿方腔垂直中心线的分布 ($U = u/U_\infty$, $Y = y/L$)

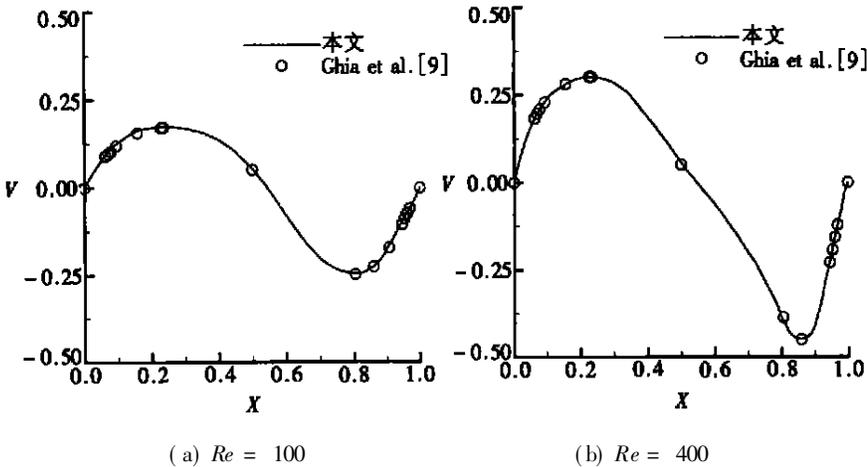


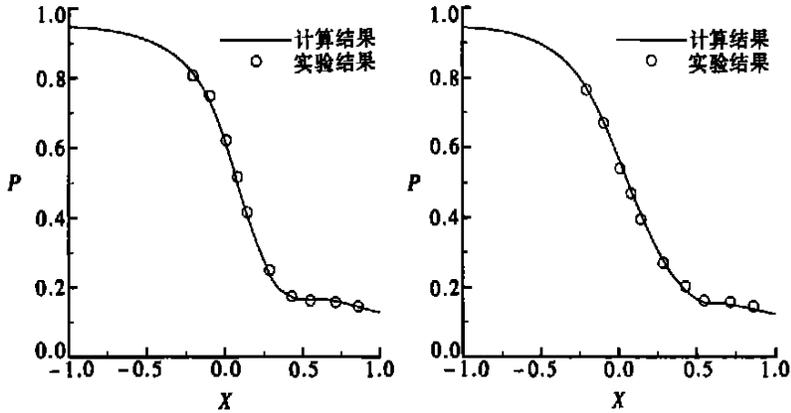
图2 速度分量 v 沿方腔水平中心线的分布 ($V = v/U_\infty$, $X = x/L$)

方腔内的流动由顶盖的水平运动来驱动。本文对 $Re = 100, 400$ 工况进行了数值计算,确定雷诺数 Re 时,特征速度取为顶盖的移动速度 U_∞ ,特征长度取为方腔的高度 L 。采用网格数为 81×81 。两种工况下速度分量 ($U = u/U_\infty$) 沿方腔垂直中心线 $Y (Y = y/L)$ 的分布和速度分量 $V (V = v/U_\infty)$ 沿方腔水平中心线 $X (X = x/L)$ 的分布如图 1、2 所示。本文计算结果与文献[9] 结果吻合得很好。

4.2 超音速喷管粘性流动

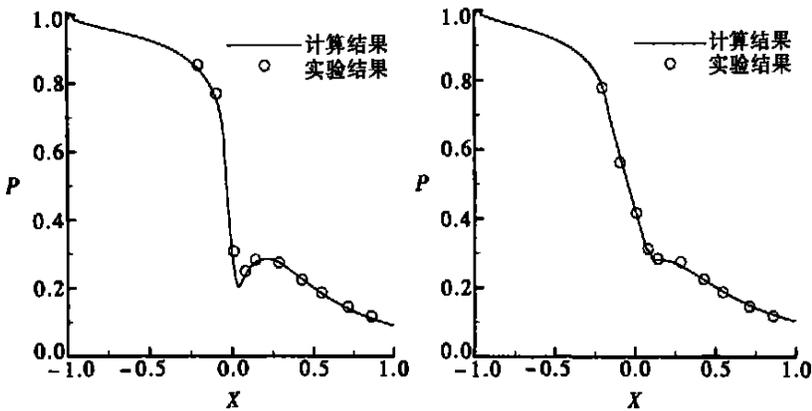
第二个研究问题是超音速喷管粘性流动。该问题的特点是马赫数变化范围大 ($Ma \approx 0.2 \sim 2.0$), 并且文献[10]对超音速喷管进行了实验研究,并给出了实验数据。喷管 B1 和 B2 的详细几何参数可参见文献[10], 喷管 B1 和 B2 的基本几何尺寸是相同的, 两者的主要差别在于

喷管的喉部, B2 喷管较 B1 喷管在喉部处的过渡要光滑一些。也正是由于在喉部的不同, 导致二个喷管在性能上有所差异, 这就要求数值计算能够准确地区分。基于上述原因, 特选取其中的 B1 和 B2 两个拉伐尔喷管作为算例。网格数为 $97 \times 61 \times 17$, 网格在壁面和喉部处适当加密。计算时, 雷诺数 Re 为 75×10^6 , 特征长度取喷管进口高度的一半。B1 和 B2 两个喷管的压力沿喷管中心线的分布以及与实验数据的比较如图 3 所示, 压力沿喷管壁面分布以及与实验数据的比较如图 4 所示。由比较可以看出, 本文的计算结果与文献[10] 实验结果相符很好, 准确区分了 B1 和 B2 两个喷管在性能上的差异。



(a) 喷管 B1

(b) 喷管 B2

图 3 沿喷管中心线的压力分布 ($P = p/p_0$, $X = x/L$)

(a) 喷管 B1

(b) 喷管 B2

图 4 沿喷管壁面的压力分布

5 结 论

采用基于预处理算法的 PLU_SGS 方法, 结合高阶精度 AUSMPW 格式, 求解了曲线坐标系可压缩 Navier-Stokes 方程, 达到对低速到超音速范围内可压缩流动进行数值模拟的目的。算例数值结果与文献的数值结果和实验数据基本一致, 表明该方法在低速到超音速范围内求解可压缩 Navier-Stokes 方程, 具有较高的模拟精度和较快的收敛速度以及良好的稳定性。

[参 考 文 献]

- [1] Choi Y H, Merkle C L. The application of preconditioning in viscous flows[J]. Journal of Computational Physics, 1993, **105**(2): 207—233.
- [2] Turkel E, Radespiel R, Kroll N. Assessment of preconditioning methods for multidimensional aerodynamic[J]. Computers & Fluids, 1997, **26**(6): 613—634.
- [3] Edwards J K, Roy C. Preconditioned multigrid methods for two-dimensional combustion calculations at all speeds[J]. AIAA Journal, 1998, **36**(2): 185—192.
- [4] Liou M_S, Steffen C J. A new flux splitting scheme[J]. Journal of Computational Physics, 1993, **107**(1): 23—39.
- [5] Liou M_S. A sequel to AUSM: AUSM⁺ [J]. Journal of Computational Physics, 1996, **129**(2): 364—382.
- [6] Kim K H, Kim G C, Rho O H. An improvement of AUSM schemes by introducing the pressure-based weight functions[J]. Computers & Fluids, 1998, **27**(2): 311—346.
- [7] Anderson W K, Thomas J L, Van Leer B. Comparison of finite volume flux vector splitting for the Euler equations[J]. AIAA Journal, 1986, **24**(9): 1453—1460.
- [8] Yoon S, Jameson A. Lower_Upper Symmetric_Gauss_Seidel method for the Euler and Navier-Stokes equations[J]. AIAA Journal, 1988, **26**(9): 1061—1069.
- [9] Ghia U, Ghia K N, Shin C T. High_Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method[J]. Journal of Computational Physics, 1982, **48**(3): 387—411.
- [10] Mason M L, Putnam L E, Re J. The effect of throat contouring on two-dimensional converging-diverging nozzle at static condition[R]. NASA TN_1704, 1980.

A Computational Method for the Navier-Stokes Equations at All Speeds

ZHAO Xing_yan¹, SU Mo_ming², MIAO Yong_miao¹

(1. Department of Fluid Machinery, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, P R China;

2. Department of Aerospace Power, Northwestern Polytechnical University,
Xi'an 710072, P R China)

Abstract: A PLU_SGS method based on a time_derivative preconditioning algorithm and LU_SGS method is developed in order to calculate the Navier-Stokes equations at all speeds. The equations were discretized using AUSMPW scheme in conjunction with the third_order MUSCL scheme with Van Leer limiter. The present method was applied to solve the multidimensional compressible Navier-Stokes equations in curvilinear coordinates. Characteristic boundary conditions based on the eigensystem of the preconditioned equations were employed. In order to examine the performance of present method, driven_cavity flow at various Reynolds numbers and viscous flow through a convergent-divergent nozzle at supersonic were selected to test this method. The computed results were compared with the experimental data or the other numerical results available in literature and good agreements between them are obtained. The results show that the present method is accurate, self_adaptive and stable for a wide range of flow conditions from low speed to supersonic flows.

Key words: nonlinear hyperbolic system; computational fluid dynamic; preconditioning algorithm; implicit time marching method; characteristic boundary condition; high_order_accuracy