应用数学和力学,第 23 卷 第 3 期(2002 年 3 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2002) 03_0229_10

微极连续统的耦合场理论的再研究(Ⅱ)—微极热压电弹性理论和电磁热弹性理论*

戴天民

(辽宁大学 数学系和数学应用中心, 沈阳 110036)

(我刊编委戴天民来稿)

摘要: W. Nowacki 曾建立起系统的微极热压电弹性理论和电磁热弹性理论• 戴天民对 W. Nowacki 建立的微极热压电弹性理论和电磁热弹性理论进行了再研究, 对这些理论局限于线性情形的原因和它们的不完整处进行了分析• 针对这些理论中所存在的问题, 建立起微极热压电弹性理论和电磁热弹性理论的更普遍的能量守恒原理和局部能量方程以及 Hamilton 原理• 从戴天民所建立的更普遍能量守恒原理和 Hamilton 原理很自然地推导出局部和非局部微极热压电和电磁热弹性理论的完整的运动方程和边界条件以及能率均衡方程• 通过引入两个新泛函和全变分还可另外得到位移、微转动、电势和温度边界条件•

关 键 词: 非局部; 微极; 热压电弹性; 电磁热弹性理论; 能量原理; Hamilton 原理
中图分类号: O33 文献标识符: A

引 言

在文献[1]中, 我们曾对 W. Nowacki[2] 提出的微极热弹性理论进行了再研究• 本文是文献[1]的继续•

W. Nowacki[2]提出的微极热压电和电磁热弹性理论中也存在着和他提出的微极热弹性理论类似的问题• 为此, 本文将针对这些理论进行再研究, 提出新的更普遍的能量守恒原理和局部能率均衡方程以及 Hamilton 原理, 从而自然地导出了较之专著[2]的结果更为普遍的相应结果• 通过局部化本文还给出完整的非局部微极热压电和电磁热弹性理论的运动方程和能率均衡方程• 按专著[2]提出的理论似乎是不可能得到这些完整的结果的•

有关参考文献可参阅专著[2, 3, 4], 本文不另列出•

为简便起见, 本文除作必要的说明外, 均采用专著[2]的符号和记法• 为区别起见, 本文给出的与专著[2]不同的结果分别用公式编号( )* 表示•

* 收稿日期: 2000_12_29; 修订日期: 2001_09_11
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10072024); 国家自然科学基金委员会对外交流与合作资助(10011130235)和德意志研究联合会资助(51520001)的国际合作研究项目; 辽宁省教育委员会 A 类科研项目(950111001)
作者简介: 戴天民(1931—), 男, 满族, 辽宁开原人, 博士, 教授, 博士生导师, 已发表专著译著 12 部和论文 50 余篇.

1 摘录和评注

为便于比较起见, 这里摘录专著[2]中有关结果, 并作相应的评注•

1.1 微极热压电弹性理论

1) 能量守恒原理和局部能量方程

专著[2]关于微极热压电弹性理论的出发点是下列能量守恒原理和 C_D 不等式:

$$\int_V(\rho\dot{v}_i v_i + J_{ji}\dot{w}_j w_i + \dot{U})\,\mathrm{d}v = \int_V(X_i v_i + Y_i w_i + W)\,\mathrm{d}V + \int_A(p_i v_i + m_i w_i - q_i n_i)\,\mathrm{d}A + \int_V E_i\dot{D}_i\,\mathrm{d}V \tag{1}$$

和

$$\int_V \dot{S}\,\mathrm{d}v \geqslant \int_V \frac{W}{T}\,\mathrm{d}V - \int_A \frac{q_i n_i}{T}\,\mathrm{d}A \cdot \tag{2}$$

这里式(1)最末一项是电动力学项, E_i 和 D_i 分别为电场和电位移矢量分量•

接触力和力矩可表示为

$$p_i = \sigma_{ji}n_j, \qquad m_i = \mu_{ji}n_j \cdot \tag{3}$$

通过变换, 可从式(1)得到局部能量方程

$$\dot{U} = (\sigma_{ji,j} + X_i - \rho\dot{v}_i)v_i + (\mu_{ji,j} + \varepsilon_{ijk}\sigma_{jk} + Y_i - J_{ji}\dot{w}_j)w_i + \sigma_{ji}\dot{\gamma}_{ji} + \mu_{ji}\dot{\chi}_{ji} - q_{i,i} + W + E_i\dot{D}_i, \tag{4a}$$

$$\dot{\gamma}_{ji} = v_{i,j} - \varepsilon_{kji}w_k, \qquad \dot{\chi}_{ji} = w_{i,j} \cdot \tag{4b}$$

考虑到运动方程

$$\sigma_{ji,j} + X_i - \rho\dot{v}_i = 0, \tag{5}$$

$$\mu_{ji,j} + \varepsilon_{ijk}\sigma_{jk} + Y_i - J_{ji}\dot{w}_j = 0, \tag{6}$$

则由式(4a)得

$$\dot{U} = \sigma_{ji}\dot{\gamma}_{ji} + \mu_{ji}\dot{\chi}_{ji} - q_{i,i} + W + E_i D_i \cdot \tag{7}$$

应用自由能 $F = U - ST$ 和电焓 $H = F - U_i D_i$, 则式(7)具有下列形式

$$\dot{H} = \sigma_{ji}\dot{\gamma}_{ji}\dot{\chi}_{ji} - D_i\dot{E}_i - S\dot{T} - T\dot{S} - q_{i,i} + W \cdot \tag{8}$$

从式(8)和 C_D 不等式的局部形式

$$\dot{S} + \left(\frac{q_i}{T}\right)_{,i} - \frac{W}{T} \geqslant 0 \tag{9}$$

消去热源 W, 则得下列不等式:

$$(-\dot{T} + S\dot{H}) + \sigma_{ji}\dot{\gamma}_{ji} + \mu_{ji}\dot{\chi}_{ji} - D_i\dot{E}_i - \frac{q_i T_{,i}}{T} \geqslant 0 \cdot \tag{10}$$

假定 $H = H(\gamma_{ji}, \chi_{ji}, E_i, T, T_{,i})$, 则由式(10)可得本构关系

$$\sigma_{ji} = \frac{\partial H}{\partial \gamma_{ji}}, \qquad \mu_{ji} = \frac{\partial H}{\partial \chi_{ji}}, \qquad S = \frac{\partial H}{\partial T},$$

$$\frac{\partial H}{\partial T_{,i}} = 0, \qquad \frac{\partial H}{\partial E_i} = -D_i \tag{11}$$

和不等式

$$-\frac{1}{T}q_i T_{,i} \geqslant 0 \cdot \tag{12}$$

式(12)由下列 Fourier 热传导定律满足

$$q_i = - k_{ij}T_{,j}. \tag{13}$$

评注 1 显然, 由式(1) 只能得到局部能量均衡方程

$$\begin{aligned}\dot{U} = &(\sigma_{ji,j} + X_i - \rho\dot{v}_i)v_i + (\mu_{ji,j} + Y_i - J_{ji}\dot{w}_j)w_i + \\ &\sigma_{ji}v_{i,j} + \mu_{ji}w_{i,j} - q_{i,i} + W + E_i\dot{D}_i.\end{aligned} \tag{14}$$

此时,只有在上式右侧加一项 $\varepsilon_{ijk}\sigma_{jk}w_i$ 并减一项与之相等的项 $\varepsilon_{kji}\sigma_{ji}w_k$, 才能凑成角动量均衡方程和出现 $\sigma_{ji}(v_{i,j} - \varepsilon_{kji}w_k) = \sigma_{ji}\dot{\gamma}_{ji}$, 从而得到式(4a). 但这样一来, γ_{ji} 却凑成线性应变. 这便是为什么大多数学者都要先采用线性应变关系去从本身并不耦合的能量守恒原理去推导出具有耦合项的角动量均衡方程和局部能量方程的原因. 这是很凑巧, 但并不自然.

另外, 从式(1) 也不可能得到完整的非局部微极热压电弹性理论的完整的运动方程和能量方程. □

2) Hamilton 原理

专著[2] 定义下列两个泛函

$$\Pi = \int_V (H + ST - X_iu_i - Y_i\varphi_i)\,\mathrm{d}V - \int_A (p_iu_i + m_i\varphi_i - \sigma\phi)\,\mathrm{d}A, \tag{15}$$

$$\Psi = \int_V (\Gamma - S\dot{T} - WT)\,\mathrm{d}V + \int_A Q_in_i\,\mathrm{d}A, \tag{16}$$

这里 H, ϕ 和 σ 分别为电焓, 电势和电荷, 而

$$\Gamma = \frac{1}{2}k_{ji}T_{,i}T_{,j}, \quad q_i = - k_{ji}T_{,j}. \tag{17}$$

利用本构关系

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial H}{\partial \gamma_{ji}} = \sigma_{ji}, \quad \frac{\partial H}{\partial \chi_{ji}} = \mu_{ji}, \\ &\frac{\partial H}{\partial T} = - S, \quad \frac{\partial H}{\partial E_i} = - D_i,\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

则从 Hamilton 原理

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(K - \Pi)\,\mathrm{d}t = 0 \tag{19}$$

可得

1) 运动方程

$$\sigma_{ji,j} + X_i - \rho\ddot{u}_i = 0, \tag{20}$$

$$\mu_{ji,j} + \varepsilon_{ijk}\sigma_{jk} + Y_i - J_{ji}\ddot{\varphi}_j = 0; \tag{21}$$

2) 电磁场方程

$$D_{i,i} = 0; \tag{22}$$

3) 边界条件

$$p_i = \sigma_{ji}n_j, \quad m_i = \mu_{ji}n_j, \tag{23}$$

$$\sigma = - D_in_i. \tag{24}$$

从 Hamilton 原理

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\Psi\,\mathrm{d}t = 0, \tag{25}$$

可得

1) 熵均衡方程

$$T\dot{S} = -q_{i,i} + W; \tag{26}$$

2) 边界条件

$$q_i = Q_i. \tag{27}$$

评注 2　专著[2]公设的非耦合的两个泛函都是不完整的，因此，只有先利用本构关系才可能推导出完整的运动方程. 另外，在[2]中采用的是"势能型"的变分，所以从该 Hamilton 原理也不可能得到由"余能型"的变分才可能导出的位移、微转动、电位移和温度边界条件. □

1.2 微极电磁热弹性理论

在专著[2]中所提出的微极电磁热弹性理论是以下列能量守恒原理为出发点的：

$$\int_V (\rho\dot{v}_i v_i + J\dot{w}_i w_i + \rho\dot{U} + \dot{U}_e)\,\mathrm{d}V = \int_V (X_i v_i + Y_i w_i + \rho h)\,\mathrm{d}V + \int_A \left[p_i v_i + m_i w_i - q_i n_i - (\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})_i n_i + U_e v_i n_i\right]\mathrm{d}A. \tag{28}$$

根据质量连续性方程，由上式得

$$\rho\dot{U} + \frac{\partial U_e}{\partial t} = (\sigma_{ji,j} + X_i - \rho\dot{v}_i)v_i + (\mu_{ji,j} + \varepsilon_{ijk}\sigma_{jk} + Y_i - J\dot{w}_i)w_i + \sigma_{ji}(v_{i,j} + w_{ji}) + \mu_{ji}w_{i,j} - q_{i,i} + \rho h + (\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})_{i,i}. \tag{29}$$

把 $\partial U_e/\partial t$ 代入上式，则得

$$\rho\dot{U} = [\sigma_{ji,j} + (\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B})_i + X_i - \rho\dot{v}_i]v_i + (\mu_{ji,j} + \varepsilon_{ijk}\sigma_{jk} + Y_i - J\dot{w}_i)w_i + \sigma_{ji}(v_{i,j} + w_{ji}) + \mu_{ji}w_{i,j} - q_{i,i} + \frac{1}{\sigma}j^2 + \chi_0 j_i\theta_{,i}, \tag{30}$$

这里 $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{H}$ 和 U_e 分别为电场，磁场和电磁能，而

$$\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{H}, \quad \boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E}, \tag{31}$$

$$\boldsymbol{j} = \sigma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} + \chi_0\,\mathrm{grad}\,\theta). \tag{32}$$

专著[2]利用能量均衡方程必须对物体均匀运动具有不变性，即

$$\boldsymbol{v} \to \boldsymbol{v} + \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{b} = \mathrm{const}. \tag{33}$$

把上式代入式(30)并减去原式，则得第一 Cauchy 运动方程

$$\sigma_{ji,j} + X_i + (\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B})_i - \rho\dot{v}_i = 0. \tag{34}$$

假定能量均衡方程对物体刚性转动具有不变性，即

$$\boldsymbol{v} \to \boldsymbol{v} + \Omega\times\boldsymbol{r}, \quad \boldsymbol{w} \to \boldsymbol{w} + \Omega, \quad \Omega = \mathrm{const} \tag{35a}$$

或

$$v_{i,j} \to v_{i,j} - \varepsilon_{ijp}\Omega_p, \quad w_{i,j} \to w_{i,j}, \tag{35b}$$

则得第二 Cauchy 运动方程

$$\mu_{ji,j} + \varepsilon_{ijk}\sigma_{jk} + Y_i - J\dot{w}_i = 0. \tag{36}$$

考虑到运动方程，则能量均衡方程的局部形式为

$$\rho\dot{U} = \sigma_{ji}(v_{i,j} + w_{ji}) + \mu_{ji}w_{i,j} + \rho h - q_{i,i} + \frac{1}{\sigma}j^2 + \chi_0 j_i\theta_{,i}. \tag{37}$$

从上式和 C-D 不等式

$$\rho\dot{\eta} + \left(\frac{q_i}{T}\right)_{,i} - \frac{\rho h}{T} \geqslant 0 \tag{38}$$

消去 $\rho h - q_{i,i}$ 项，则得

$$-\frac{\rho}{T}(\dot{\Psi} + \eta\dot{\theta}) + \frac{1}{T}\left[\sigma_{ji}(v_{i,j} + w_{ji}) + \mu_{ji}w_{i,j}\right] +$$

$$\frac{1}{T}\left(\frac{1}{\sigma}J^{2}+\chi_{0}j_{i}\theta_{,i}-\frac{q_{i}\theta_{,i}}{T}\right)\geqslant 0, \tag{39}$$

式中自由能 $\Psi=U-\eta T$•

设自由能具有形式

$$\Psi=\Psi(v_{i,j},w_{k},w_{i,k},\theta,\theta_{,i}), \tag{40}$$

由式(39)可得下列本构关系和不等式:

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_{ji}=\rho\frac{\partial\Psi}{\partial\gamma_{ji}}, &&\mu_{ji}=\rho\frac{\partial\Psi}{\partial\chi_{ji}},\\ &\eta=-\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}, &&\frac{\partial\Psi}{\partial\theta_{,i}}=0,\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

和

$$\frac{1}{\sigma}J^{2}+\chi_{0}j_{i}\theta_{,i}-\frac{1}{T}q_{i}\theta_{,i}\geqslant 0• \tag{42}$$

评注 3 和评注 1 中所述类似, 在微极电磁热弹性理论中, 由式(28)导出式(32)同样也是凑巧和不自然的•

在专著[1]中用物体均匀运动和刚性转动的不变性分别导出运动方程, 即式(34)和式(36)• 前者包括了电磁力项 $(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B})_i$, 而后者却与电磁场无关• 还要指出, 这里必须先利用式(34)然后再利用式(35), 亦即, 物体运动必须先做刚性平移然后再做刚性转动, 才能得出式(36)• 这个次序不容颠倒• 否则, 还必须考虑到下列关系

$$v_i\rightarrow v_i-\varepsilon_{ijk}x_j\,\Omega_k, \tag{43}$$

$$\dot{v}_i\rightarrow \dot{v}_i-\varepsilon_{ijk}v_j\,\dot{\Omega}_k• \tag{44}$$

因此, 从式(30)不可能得到式(36)• 另外, 由专著[2]的理论也不可能通过局部化给出完整的非局部微极电磁热弹性理论的完整的方程组• □

2 更普遍的微极热压电弹性理论

针对评注 1 和评注 2 指出的问题, 下面分别给出微极热压电弹性理论的更普遍的能量守恒原理和 Hamilton 原理•

2.1 更普遍的能量守恒原理

我们现在公设下列带有耦合项(交叉项)的能量守恒原理

$$\begin{aligned}&\int_V\left[\rho\dot{v}_iv_i+(J_{ji}\dot{w}_j+\varepsilon_{ijk}x_j\rho\dot{v}_k)w_i+\dot{U}\right]\mathrm{d}V=\\ &\quad\int_V\left[X_iv_i+(Y_i+\varepsilon_{ijk}x_jX_k)w_i+W\right]\mathrm{d}V+\\ &\quad\int_A\left[p_iv_i+(m_i+\varepsilon_{ijk}x_jp_k)w_i-q_in_i\right]\mathrm{d}A+\int_V E_i\dot{D}_i\mathrm{d}V\end{aligned} \tag{1*}$$

和 C_D 不等式

$$\int_V\dot{S}\mathrm{d}V\geqslant\int_V\frac{W}{T}\mathrm{d}V-\int_A\frac{q_in_i}{T}\mathrm{d}A• \tag{2}$$

由式(1)* 可得

$$\begin{aligned}\dot{U}=&(\sigma_{ji,j}+X_i-\rho\dot{v}_i)v_i+\left[\varepsilon_{ijk}x_j(\sigma_{lk,l}+X_k-\rho\dot{v}_k)+\right.\\ &\left.(\mu_{ji,j}+\varepsilon_{ilk}\sigma_{lk}+Y_i-J_{ji}\dot{w}_j)\right]w_i+\sigma_{ji}v_{i,j}+\end{aligned}$$

$$(\mu_{ji}+\varepsilon_{ilk}x_l\sigma_{jk})w_{i,j}+q_{i,i}+W+E_i\dot{D}_i\cdot \tag{4a*}$$

若考虑到运动方程,则从上式得能率均衡方程的局部形式为

$$\dot{U}=\sigma_{ji}v_{i,j}+\mu^*_{ji}w_{i,j}-q_{i,i}+W+E_i\dot{D}_i, \tag{7*}$$

式中

$$\mu^*_{ji}=\mu_{ji}+\varepsilon_{ilk}x_l\sigma_{jk}\cdot \tag{45}$$

对式(1)* 进行局部化,则很自然地得到非局部微极热压电弹性理论的

1) 运动方程

$$\sigma_{ji,j}+X_i-\rho\dot{v}_i=-\hat{X}_i, \tag{46*}$$

$$\mu_{ji,j}+\varepsilon_{imn}\sigma_{mn}+Y_i-J_{ji}\dot{w}_j=-\hat{Y}_i+\varepsilon_{imn}x_m\hat{X}_n \tag{47*}$$

和

2) 能率均衡方程

$$\dot{U}=\sigma_{ji}v_{i,j}+\mu^*_{ji}w_{i,j}-q_i+W+E_i\dot{D}_i-\hat{X}_iv_i-(\hat{Y}_i-\varepsilon_{imn}x_m\hat{X}_n)w_i+\hat{W}\cdot \tag{48*}$$

这里 $\hat{X}_i$, $\hat{Y}_i$ 和 $\hat{W}$ 分别为体力,体力矩和热源的非局部剩余·

应当指出,若从专著[2]的式(1)出发进行局部化是得不到像式(46)* ~ (48)* 这样完整的结果的· 这是因为式(1)本身并不含耦合项的缘故·

现引进自由能 $F=U-ST$ 和电焓 $H=F-E_iD_i$,则由

$$\dot{H}^*=\sigma_{ji}v_{i,j}+\mu^*_{ji}w_{i,j}-D_i\dot{E}_i-S\dot{T}-T\dot{S}-q_{i,i}+W \tag{8*}$$

和C_D 不等式

$$\dot{S}+\left(\frac{q_i}{T}\right)_{,i}-\frac{W}{T}\geqslant 0 \tag{9}$$

消去热源 W,并假定 $H^*=H^*(u_{i,j},\varphi_{i,j},\sigma_{ji},\mu^*_{ji},E_i,D_i,T,T_{,i},S)$,即得下列本构方程和不等式

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_{ji}=\frac{\partial H^*}{\partial u_{i,j}},\quad \mu^*_{ji}=\frac{\partial H^*}{\partial\varphi_{i,j}},\quad u_{i,j}=\frac{\partial H^*}{\partial\sigma_{ji}},\\
&\varphi_{i,j}=\frac{\partial H^*}{\partial\mu^*_{ji}},\quad \frac{\partial H^*}{\partial E_i}=-D_i,\quad \frac{\partial H^*}{\partial D_i}=0,\\
&S=-\frac{\partial H^*}{\partial T},\quad \frac{\partial H^*}{\partial T_{,i}}=0,\quad T=-\frac{\partial H^*}{\partial S},
\end{aligned}\right\} \tag{11*}$$

和

$$-\frac{1}{T}q_kT_{,k}\geqslant 0\cdot \tag{12}$$

我们假定的 H^* 与专著[2]中的 H 之间存在着本质差异· R. Stojanovic[5] 曾对有向弹性介质理论证明了内能函数只与变形梯度和方向子梯度相关,而不与方向子显式相关· 我们在文献[6]中对微极连续统理论给出了能率函数只与速度梯度和角速度梯度相关,而不与角速度显式相关的证明· 这两种情况,与我们这里所研究的问题类似,证明从略·

2.2 更普遍的 Hamilton 原理

现引进与式(15)和式(16)不同的两个带有耦合项的新泛函

$$\begin{aligned}
\Pi^*=&\int_V\left[H^*+ST-X_iu_i-(Y_i+\varepsilon_{ijk}x_jX_k)\varphi_i\right]\mathrm{d}V+\\
&\int_A\left[p_iu_i+\varphi_i(m_i+\varepsilon_{ijk}x_jp_k)+p_iu_i+(m_i+\varepsilon_{ijk}x_jp_k)\varphi_i+\sigma\delta\Phi+\Phi\delta\sigma\right]\mathrm{d}A,
\end{aligned} \tag{15*}$$

$$\Psi^* = \int_V (\Gamma - S\dot{T} - W T)\mathrm{d}v + \int_A (TQ_i + \bar{T}Q_i) n_i \mathrm{d}A \cdot \tag{16*}$$

取更普遍的 Hamilton 原理为

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(K^* - \Pi^*)\mathrm{d}t = 0, \tag{19*}$$

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\Psi^*\,\mathrm{d}t = 0, \tag{25*}$$

式中

$$K^* = \rho \ddot{u}_i u_i + (J_{ji}\ddot{\varphi}_j + \varepsilon_{ijk}x_j\rho\ddot{u}_k)\varphi_i \cdot \tag{49*}$$

对式(19)* 进行全变分, 并考虑到式(11)*, 则有

$$\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\Big[\int_V\Big\{(\rho\ddot{u}_i - X_i - \sigma_{ji,j})\delta u_i + [\varepsilon_{jik}x_j(\rho\ddot{u}_k - X_k - \sigma_{lk,l}) +$$
$$(J_{ji}\ddot{\varphi}_j - Y_i - \mu_{ji,j} - \varepsilon_{ilk}\sigma_{lk})]\delta\varphi_i\Big\}\mathrm{d}V + \int_v\Big\{u_i\delta(\rho\ddot{u}_i - X_i + \sigma_{ji,j}) +$$
$$\varphi_i[\varepsilon_{ijk}x_j\delta(\rho\ddot{u}_k - X_k - \sigma_{lk,l}) + \delta(J_{ji}\ddot{\varphi}_j - y_i - \mu_{ji,j} - \varepsilon_{ilk}\sigma_{lk})] + D_{i,i}\delta\phi\Big\}\mathrm{d}V +$$
$$\int_A\Big\{(\sigma_{ji,j}n_j - p_i)\delta u_i + [(\mu_{ji}n_j - \mu_i) + \varepsilon_{ilk}x_l(\sigma_{ji,j}n_j - p_i)]\delta\varphi_i + (u_i - \bar{u}_i)\delta p_i +$$
$$(\varphi_i - \bar{\varphi}_i)\delta(m_i + \varepsilon_{ijk}x_j p_k) + (D_i n_i + \sigma)\delta\varphi + \varphi\delta\sigma\Big\}\mathrm{d}A\Big] = 0 \cdot \tag{50*}$$

由上式可以得到

1) 运动方程

$$\sigma_{ji,j} + X_i - \rho\ddot{u}_i = 0, \tag{20}$$

$$\mu_{ji,j} + \varepsilon_{ijk}\sigma_{jk} + Y_i - J_{ji}\ddot{\varphi}_j = 0; \tag{21}$$

2) 电磁场方程

$$D_{i,i} = 0; \tag{22}$$

3) 边界条件

$$p_i = \sigma_{ji}n_j, \quad m_i = \mu_{ji}n_j, \tag{23}$$

$$\sigma = - D_i n_i, \tag{24}$$

$$u_i = \bar{u}_i, \quad \varphi_i = \bar{\varphi}_i, \tag{51*}$$

$$\varphi = 0 \cdot \tag{52*}$$

类似地, 从式(25)* 通过全变分可得

1) 熵均衡方程

$$T\dot{S} = - q_{i,i} + W; \tag{26}$$

2) 边界条件

$$Q_i = \bar{Q}_i, \tag{27}$$

$$\dot{T} = \bar{T} \cdot \tag{53*}$$

3 更普遍的微极电磁热弹性理论

针对评注 3 指出的问题, 下面给出微极电磁热弹性理论的更普遍的能量守恒原理•

现公设带有耦合项的更普遍的能量守恒原理如下:

$$\int_V[\rho\dot{v}_i v_i + (J\dot{w}_i + \varepsilon_{ijk}x_j\rho\dot{v}_k)w_i + \rho(\dot{U} + \dot{U}_e)]\mathrm{d}V =$$

$$\int_V [X_i v_i + (Y_i + \varepsilon_{ijk} x_j X_k) w_i + \rho h] \mathrm{d}V +$$
$$\int_A [p_i v_i + (m_i + \varepsilon_{ijk} x_j p_k) w_i - q_i n_i - (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H})_i n_i + U_e v_i n_i] \mathrm{d}A. \qquad (28)^*$$

根据质量连续性方程, 由上式得下列能率守恒原理的局部形式

$$\rho\dot{U} + \frac{\partial U_e}{\partial t} = (\sigma_{ji,j} + X_i - \rho\dot{v}_i) v_i + \Big\{(\mu_{ji,j} + \varepsilon_{ilk}\sigma_{lk} + Y_i - J\dot{w}_i) + \varepsilon_{ijk} x_j (\sigma_{lk,l} + X_k - \rho\dot{v}_k)\Big\} w_i + \sigma_{ji} v_{i,j} + (\mu_{ji} + \varepsilon_{ilk} x_l \sigma_{jk}) w_{i,j} - q_{i,i} + \rho h + (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H})_{i,i}. \qquad (29)^*$$

把 $\partial U_e / \partial t$ 代入上式, 则得

$$\rho\dot{U} = [\sigma_{ji,j} + (\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B})_i + X_i - \rho\dot{v}_i] v_i + [(\mu_{ji,j} + \varepsilon_{ilk}\sigma_{lk} + Y_i - J\dot{w}_i) + \varepsilon_{jik} X_j (\sigma_{lk,l} + x_k - \rho\dot{v}_k)] w_i + \sigma_{ji} v_{i,j} + (\mu_{ji} + \varepsilon_{ilk} x_l \sigma_{jk}) w_{i,j} - q_{i,i} + \frac{1}{\sigma} j^2 + \chi_0 j_i \theta_{,i}. \qquad (30)^*$$

我们取

$$v_i \to v_i + \delta v_i, \qquad \delta v_i = \text{const}; \qquad (54\text{a})$$
$$w_i \to w_i + \delta w_i, \qquad \delta w_i = \text{const}, \qquad (54\text{b})$$

并把它们代入式(30)*, 再从中减去原式(30)*, 则得

$$[\sigma_{ji,j} + (\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B})_i + X_i - \rho\dot{v}_i]\delta v_i + [(\mu_{ji,j} + \varepsilon_{ilk}\sigma_{lk} + Y_i - J\dot{w}_i) + \varepsilon_{ijk} x_j (\sigma_{lk,l} + X_l - \rho\dot{v}_l)]\delta w_i = 0. \qquad (55)$$

由于 δv_i 和 δw_i 是任意的, 故按Stojanovic[5] 和戴天民[6] 提出的广义Piola定理的原意可得运动方程

$$\sigma_{ji,j} + (\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B})_i + X_i - \rho\dot{v}_i = 0, \qquad (34)$$
$$\mu_{ji,j} + \varepsilon_{ilk}\sigma_{lk} + Y_i - J\dot{w}_i - \varepsilon_{ijk} x_j (\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B})_k = 0. \qquad (36)^*$$

再由式(30)* 可得能率均衡方程的局部形式如下:

$$\rho\dot{U} = \sigma_{ji} v_{i,j} + (\mu_{ji} + \varepsilon_{ilk} x_l \sigma_{jk}) w_{i,j} - q_{i,i} + \frac{1}{\sigma} j^2 + \chi_0 j_i \theta_{,i}. \qquad (37)^*$$

通过局部化, 则易得非局部微极电磁热弹性理论的运动方程和能率均衡方程如下:

$$\sigma_{ji,j} + (\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B})_i + X_i - \rho\dot{v}_i = -\hat{X}_i, \qquad (56)^*$$
$$\mu_{ji,j} + \varepsilon_{ilk}\sigma_{lk} + Y_i - J\dot{w}_i - \varepsilon_{ijk} x_j (\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B})_k = -\hat{Y}_i + \varepsilon_{ijk} x_j \hat{X}_k; \qquad (57)^*$$
$$\rho\dot{U} = \sigma_{ji} v_{i,j} + (\mu_{ji} + \varepsilon_{ilk} x_l \sigma_{jk}) w_{i,j} - q_{i,i} + \frac{1}{\sigma} j^2 + \chi_0 j_i \theta_{,i} - \hat{X}_i v_i - (\hat{Y}_i - \varepsilon_{ijk} x_j \hat{X}_k) w_i. \qquad (58)^*$$

现在反过来再对比地看一下专著[2] 和本文结果之间的差异. Nowacki[2] 之所以要先利用式(33) 给出式(34), 然后再利用式(35) 给出式(36) 的原因是他提出的作为出发点的式(28) 本身并无耦合项, 但又要式(36) 能出现耦合项 $\varepsilon_{ijk}\sigma_{jk}$, 并要满足刚性转动的不变性的要求所致. 由于这样凑合, 故在式(37) 中出现与微转角率相关的项 $-\varepsilon_{ijk}\sigma_{ji} w_k$.

现用本文的方法, 即取 $\delta w_i = 0$, $\delta v_i = \text{const}$ 和 $\delta v_i = 0$, $\delta w_i = \text{const}$, 则由式(30), 亦即

$$[\sigma_{ji,j} + (\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B})_i + X_i - \rho\dot{v}_i]\delta v_i + [(\mu_{ji,j} + \varepsilon_{ijk}\sigma_{jk} + Y_i - J\dot{w}_i)\delta w_i - \varepsilon_{kji}\sigma_{ji}\delta w_k] = 0 \qquad (\text{a})$$

只能分别得到

$$\sigma_{ji,j} + (\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B})_i + X_i - \rho\dot{v}_i = 0 \tag{b}$$

和

$$\mu_{ji,j} + Y_i - J\dot{w}_i = 0。 \tag{c}$$

再利用这两个“运动方程”, 从式(30)只能得到下列“能率均衡方程”

$$\rho\dot{U} = \sigma_{ji}v_{i,j} + \mu_{ji}w_{i,j} - q_{i,i} + \frac{1}{\sigma}j^2 + \chi_0 j_i\theta_{,i}。 \tag{d}$$

由此可见, 在上列运动方程和能率均衡方程中均无耦合项出现。 实际上, 如果把专著[2]中第352页中 $w_{ji} = -\varepsilon_{jik}w_k$ 更正为 $w_{ji} = -\varepsilon_{kji}w_k$, 并考虑到 $\varepsilon_{ijk}\sigma_{jk}w_i = \varepsilon_{kji}\sigma_{ji}w_k$, 则式(30)立即变成为不带耦合项的能率均衡方程

$$\rho\dot{U} = [\sigma_{ji,j} + (\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B})_i + X_i - \rho\dot{v}_i]v_i + (\mu_{ji,j} + Y_i - J\dot{w}_i)w_i +$$
$$\sigma_{ji}v_{i,j} + \mu_{ji}w_{i,j} - q_{i,i} + \frac{1}{\sigma}j^2 \chi_0 j_i\theta_{,i}。 \tag{e}$$

如果进行局部化, 则只能得到下列结果。

$$\sigma_{ji,j} + (\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B})_i + X_i - \rho\dot{v}_i = -\hat{X}_i, \tag{f}$$

$$\mu_{ji,j} + Y_i - J\dot{w}_i = -\hat{Y}_i, \tag{g}$$

$$\rho\dot{U} = -\hat{X}_i v_i - \hat{Y}_i w_i + \sigma_{ji}v_{i,j} + \mu_{ji}w_{i,j} - q_{i,i} + \frac{1}{\sigma}j^2 + \chi_0 j_i\theta_{,i}。 \tag{h}$$

上列式(a)–式(h)才是专著[2]提出的微极电磁热弹性理论所应得到的结果。 然而这些结果却是不自然的, 而且也是不完整的。

4 结　　语

本文对专著[2]中提出的微极热压电弹性理论和微极电磁热弹性理论进行了再研究。

给出了与[2]不同的带有耦合项的微极热压电弹性理论的能量守恒原理, 从而推导出新的能率均衡方程以及完整的非局部微极情形的运动方程和能率均衡方程。 通过引进两个新泛函, 由更普遍的Hamilton原理进行全变分除了得到与[2]相同的结果外, 还给出位移, 微转动、电势和温度边界条件。

给出了与[2]不同的带有耦合项的微极电磁热弹性理论的能率守恒原理, 从而除第一Cauchy运动方程与[2]相同外还推导出新的带有电磁力矩项的第二Cauchy运动方程和能率均衡方程以及非局部微极情形的完整的运动方程和能率均衡方程。

本文提出的结果可用来作为进一步建立更加完整的局部和非局部极性、压电热弹性理论和电磁热弹性理论的理论依据。

[参　考　文　献]

[1] 戴天民. 微极连续统的耦合场理论的再研究(Ⅰ)——微极热弹性理论[J]. 应用数学和力学, 2002, **23**(2): 111—118.

[2] Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity[M]. Oxford: Pergamon Press, 1986.

[3] Eringen A C, Kafadar C B. 微极场论[M]. 戴天民 译. 南京: 江苏科学技术出版社, 1982.

[4] Eringen A C. 非局部微极场论[M]. 戴天民 译. 南京: 江苏科学技术出版社, 1982.

[5] Stojanovic R. On the principle of virtual work in the theory of oriented elastic media[J]. ZAMM, 1973, **53**, 779–782.

[6] 戴天民. 广义连续统场论中新的功能及功率能率原理[J]. 应用数学和力学, 2001, **22**(11): 1111—1118.

Restudy of Coupled Field Theories for Micropolar Continua (Ⅱ) —Thermopiezoelectricity and Magnetothermoelasticity

DAI Tian_min
(Center for the Application of Mathematics & Department of Mathematics, Liaoning University, Shenyang 110036, P R China)

Abstract: The theories of thermopiezoelectricity and magnetoelasticty for microplar continua have been systemetically developed by W. Nowacki. In this paper the theories are restudied. The reason why they were restricted to linear cases is analyzed. The more general conservation principle of energy, energy balance equation and Hamilton principle of thermopiezoelectricity and magnetoelasticity for micropolar continua are established. The corresponding complete equations of motion and boundary conditions as well as balance equations of energy rate for local and nonlocal micropolar thermopiezoelectricity and magnetothermoelasticity are naturally derived. By means of two new functionals and total variation the boundary conditions of displacement, microrotation, electric potential and temperature are also given.

Key words: nonlocal; micropolar; thermopiezoelectricity; magnetothermoelasticity; principle of energy conservation; Hamilton principle