

文章编号: 1000-0887(2002) 03-0254-15

# 明渠层流失稳与沙纹成因机理研究<sup>\*</sup>

白玉川<sup>1</sup>, 罗纪生<sup>2</sup>

(1. 天津大学 河流海岸工程泥沙研究室, 天津 300072; 2. 天津大学 力学系, 天津 300072)

(周恒推荐)

**摘要:** 动床水流中, 泥沙起动之后, 往往要出现沙纹, 沙纹成因各家的解释不一。白玉川、罗纪生的观点是: 沙纹的尺度较小, 主要是由于明渠层流不稳定性波或床面近壁流层中小尺度拟序结构发展演化所致。当床面边界附近扰动波或拟序结构以及水流自身所产生的床面底部切应力大于 Shields 切应力后, 床面即产生响应, 形成沙纹; 如果扰动所产生的扰动切应力频率接近床面泥沙固有频率, 则产生与泥沙颗粒的共振, 这种现象也称之为“泥沙的检波性质”, 此时床面发生最大响应, 沙纹发展速度也最快。

**关键词:** 沙纹; 层流失稳; 拟序结构; 沙粒受迫振动

**中图分类号:** O357.4      **文献标识码:** A

## 引 言

当床面泥沙输移时, 推移质泥沙颗粒在河床表面上作各种不同形式的集体运动, 使床面形态时时都有改变, 这种泥沙颗粒在床面上的集体运动通称之为沙波运动。

随着水流强度的加强, 沙波运动及其相应的床面形态要以下几个不同的发展阶段, 即: 沙纹、沙垄、床面平整、沙浪、急潭、深潭(如图 1)<sup>[1]</sup>。本文仅就第一阶段: 平整床面过渡到沙纹阶段的机理进行探讨。

## 1 沙纹现象描述

为了便于说明问题, 现就平整床面均匀颗粒在清水恒定均匀流作用下的简单情况谈起。设想水流经过平整静止床面, 在水流流速达到一定强度以后, 部分泥沙颗粒开始发生运动, 此时泥沙颗粒呈间歇式运动状态。如水流强度再大, 泥沙即进入普遍运动阶段, 全部床面呈现出一层沙流。仔细观察, 在这种几乎是连续运动的过程中, 泥沙颗粒还伴随着摆动现象。此后不久, 在水流摆动力的作用下, 少量泥沙聚积在床面的某些部位形成小沙丘, 并徐徐向前移动, 连接而形成形状规则的沙纹。如图 1(a)、图 1(b)。

沙纹的纵剖面多不对称, 迎水面长而平坦, 背水面短而陡, 两者水平长度的比值常在 2~ 4 之间。一般沙纹波高在 0.5cm~ 2cm, 波长在 1cm~ 15cm 的范围。在沙纹形成之后, 由于水力

\* 收稿日期: 2000\_12\_27; 修订日期: 2001\_11\_08

基金项目: 自然科学基金(59809006; 59890200)

作者简介: 白玉川(1967—), 男, 山西人, 副教授, 博士, 中国水利学会泥沙专业委员会委员, 天津市水利学会泥沙专业委员会主任, 天津大学泥沙研究室主任(E-mail: Ychbai@tju.edu.cn)。

条件与床面变形的相互影响,随着时间的加长,沙波则以较快的速度向着波形不对称的沙垄发展。在这一过程中也经常伴随着沙纹、沙垄的合并、再生和消逝,因此沙纹现象是可能出现的一种不稳定的床面形态<sup>[2]</sup>。

沙纹的尺度小,主要是由于明渠层流不稳定性波或床面近壁层流层中小尺度拟序结构发展演化所致。同时沙纹也是受床面附近的物理量所制约的小规模床面形态,与平均水深的关系不大。在平面形态上有相互平行的,也有成鱼鳞状或舌状的。随着水流强度的加大,沙纹在平面上逐渐从顺直过渡到对称和不对称的鱼鳞状,如图 2,图 3<sup>[1]</sup>。

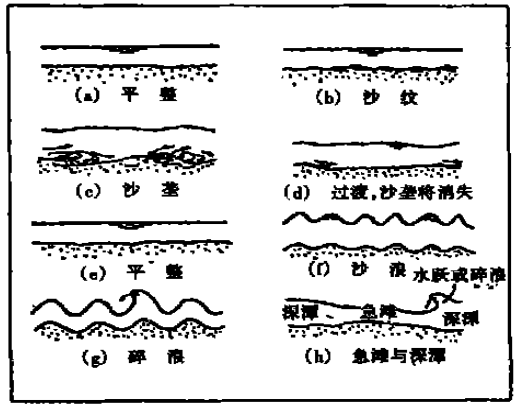


图 1 沙波不同发展阶段示意图

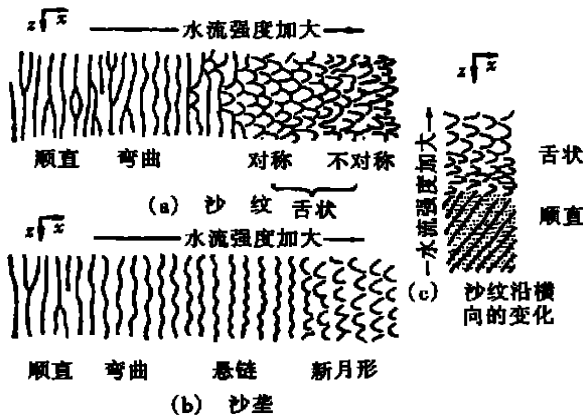


图 2 床面形态随水流强度的改变而出现的序列

## 2 层流边界层失稳形式

现就平板床面层流边界层失稳形式加以说明,1962 年 Klebanov 等<sup>[3]</sup>在层流边界层稳定性实验中发现,失稳虽然以二维扰动形式开始,但稍后必然出现三维扰动波,且幅值不断增长,导致边界层层流很快转捩成为湍流;1984 年 Saric 等人<sup>[4]</sup>又对层流边界层失稳进行了许多实验研究,通过烟线法,不但得到与 Klebanov 相似的试验结果,习惯上所称为 K 型失稳;同时也得到了另外两种非线性失稳的形式,即 C 型和 H 型失稳。其烟线结果见图 4(a)、图 4(b)、图 4(c)。

实验结果发现,三维扰动波不但增长很快,而且与二维波构成有序排列的“峰谷”结构。Saric 的实验表明,扰动波在下游演化时,看起来要“维护”这种有序的排列形式,就好象三维扰动波与二维扰动波“锁”在一起。如果以简单的形式加以表示,则开始为平行的烟线,到下游就变为局部呈周期变化的折线,如图 4(a)、(b)、(c),在若以  $\lambda_x$  代表流向波长,  $\lambda_y$  代表展向波长,对应于图 4(a),  $\lambda_x / \lambda_y = 1.5$ , 雷诺数  $Re = 784$ , 为 K 型失稳;对于图 4(b)、图 4(c),  $\lambda_x / \lambda_y = 0.67$ , 雷诺数  $Re = 1000$ ;  $\lambda_x / \lambda_y = 1.46$ , 雷诺数  $Re = 1000$ , 分别为 C 型和 H 型,究竟在实际中出现哪种形式的失稳,则取决于初始扰动波的幅值的大小。

### 3 沙纹形成的理论分析

通过对比河床沙纹示意图(图 2, 图 3) 以及边界层失稳发展过程的烟线图(图 4), 可以看出, 二者结构之间存在惊人的相似之处。边界层烟线图的快慢变化反映了失稳过程动力结构的演化情况; 沙纹则是床面附近明渠底边界动力结构发展所留下的“印迹”, 是床面对近底流场作用的一种动力响应。失稳过程烟线图与河床沙纹图之间的表观相似, 实际蕴藏着二者动力结构的内在必然联系。

床面沙纹的形成与发展, 就是明渠层流不稳定性或床面近壁层层中拟序结构动力作用的结果, 当床面边界附近扰动波或拟序结构所产生的床面底部切应力大于 Shields 切应力后, 床面即产生响应; 如果扰动所产生的扰动切应力频率接近床面泥沙的固有频率, 则产生泥沙颗粒的共振, 这种现象也称之为“泥沙的检波性质”<sup>[5]</sup>, 此时床面发生最大响应, 沙纹发展速度也最快。

本文主要针对明渠层流中准 C 型失稳对床面的作用, 以及相应床面沙纹的形成机制进行研究, 而对于明渠附面层中拟序结构与床面泥沙的作用将另行研究(见“明渠底层(附面层)拟序结构演化与床面形态发展关系”一文)。明渠 C 型失稳亦以层流中扰动波“三波共振”的构造形式加以描述<sup>[6]</sup>, 解出动力场后, 探讨 C 型失稳过程中“共振三波”与床面泥沙的作用, 从而推出床面沙纹的形成过程。

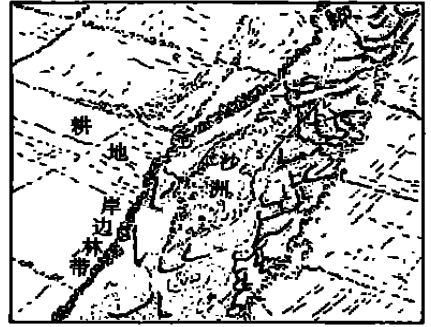


图 3 天然河道中舌状沙纹的平面分布

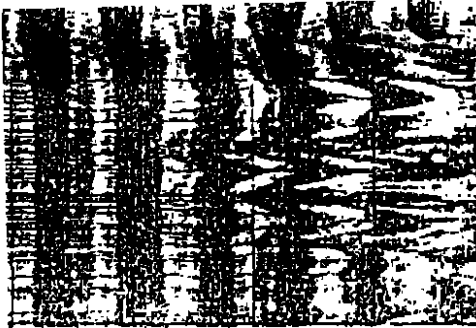


图 4(a) K 型失稳烟线图

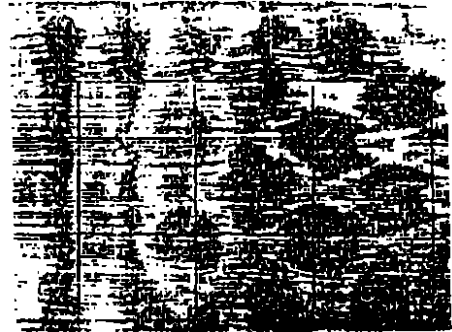


图 4(b) C 型失稳烟线图

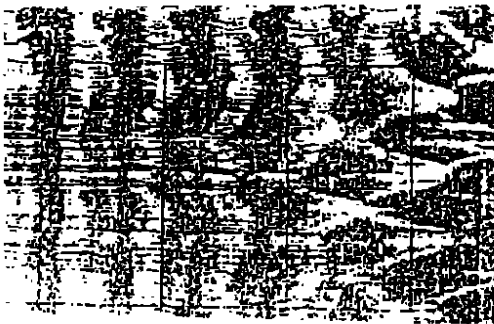


图 4(c) H 型失稳烟线图

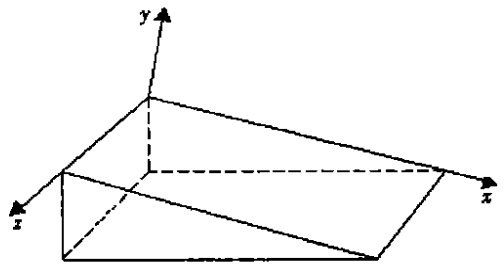


图 5 坐标系

### 3.1 基本方程

针对有坡度的明渠, 采取如图 5 所示坐标, 取无量纲量:

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad u^* = \frac{U}{U_m}, \quad v^* = \frac{V}{U_m},$$

$$w^* = \frac{W}{U_m}, \quad t^* = \frac{U_m \cdot t}{L}, \quad p^* = \frac{p}{\rho_m U_m^2}, \quad g^* = \frac{g}{g_0}, \quad \mu^* = \frac{\mu}{\mu_0}, \quad \rho^* = \frac{\rho}{\rho_0},$$

得无量纲化方程:

$$\nabla^* \cdot \mathbf{U}^* = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial t} + (\mathbf{U}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{U}^* = - \nabla^* \cdot \mathbf{P}^* + \frac{\mathbf{g}^*}{Fr^2} + \frac{\Delta \cdot \mathbf{U}^*}{Re}, \quad (2)$$

式中,  $Re$  为雷诺数,  $Re = U_m \cdot L / \nu$ ;  $Fr$  为弗汝德数,  $Fr = U_m / \sqrt{gL}$ ,  $\mathbf{U}^* = (u^*, v^*, w^*)$ ,  $\nabla^*$  为梯度算子,  $\Delta$  为 Laplace 算子. 对于以上为基本流方程, 本文特征长度  $L$  取水深  $h$ ; 特征速度明渠表层流速  $U_m = gh^2 \sin \alpha / 2\nu$  为分析方便, 无量纲速度、压力方程仍保留原来的符号.

### 3.2 明渠层流稳定性分析

#### 3.2.1 摄动分析

将明渠水流的速度、压力分解为两部分, 其中之一为时均量, 其二为局扰动所引起的波动项, 即小扰动项.

$$\left. \begin{aligned} U &= U + \varepsilon u, & V &= V + \varepsilon v, \\ W &= W + \varepsilon w, & P &= P + \varepsilon p \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$U, V, W, P$  为时均量,  $u, v, w, p$  为扰动速度、压力量,  $\varepsilon$  为小参数.

#### 3.2.2 恒定均匀明渠层流速度求解

对于二元明渠层流, 当水流均匀运动时, 有量纲方程可写成:

$$g \sin \alpha + \nu d^2 U / dy^2 = 0, \quad (4)$$

$$\frac{dp}{dy} + \rho g \cos \alpha = 0 \quad (5)$$

其速度分布:  $U = \frac{g\nu \sin \alpha}{2\nu} (2h - y)$ ; 表面最大流速:  $U_m = \frac{gh^2 \sin \alpha}{2\nu}$ , 无量纲长度:  $y = \frac{y}{h}$ .

无量纲速度:

$$U = 2y - y^2 \quad (6)$$

以上假定明渠整体全部为层流; 而在实际工程中, 往往是明渠水流沿竖垂向分布其中核心区为紊流, 只有在其床面附面层内才存在近似层流的流态, 这一层也称为粘性底层, 对于这种情况我们将另行考虑(见“明渠底层(附面层)拟序结构演化与床面形态发展关系”一文).

#### 3.2.3 扰动方程的建立

将(3)代和(1)~(2)式中得扰动量所满足的方程为:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Lu + v \frac{dU}{dy} + \frac{\partial p}{\partial x} = - \varepsilon \left[ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right], \quad (8)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + Lv + \frac{\partial p}{\partial y} = - \varepsilon \left[ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right], \quad (9)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + Lw + \frac{\partial p}{\partial z} = - \varepsilon \left[ u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right]. \quad (10)$$

L 为算子,  $L = U \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{Re} \cdot \nabla^2$ ; 边界条件:  $y = 0, u = v = w = 0; y = 1, u = v = w = 0$

### 3.2.4 动力场三波共振模型

明渠层流扰动波发展演化及其与床面泥沙相互作用, 形成三维结构的沙纹, 在空间结构上又表现出一定的随机性。根据前面的分析, 比较 C 型失稳烟线图和实际沙纹形态, 可以看出沙纹的发展过程, 与 C 型失稳三维扰动非线性作用的过程非常相似, 为了能使理论描述更接近实际, 其流体动力过程也用“三波共振”的形式加以描述<sup>6)</sup>。而沙纹的形程过程则可以看作是沙粒在基本流及扰动波作用下, 发生推移及微幅摆动的结果, 当扰动波的频率与沙粒固有频率相接近时, 这种作用表现的最为强烈。

为了在非线性的情况下, 能进一步研究三维扰动波的演化情况以及沙纹形成过程的三维结构, 建立动力场的“三波共振”以及动力场与泥沙场的“沙一波相互作用”即“沙一波共振”模型, 现将 T-S 扰动波写成一个二维波与一对沿展向(Z 向)对称的三维斜波, 在线性情况下, T-S 波写为:

$$\begin{cases} u_0 = \left\{ Au_{0a}(y) \exp[i(\alpha_a x - \omega_a t)] + Bu_{0b}(y) [\exp[i(\alpha_b x + \beta_z + \omega_b t)] + \exp[i(\alpha_b x - \beta_z + \omega_b t)]] \right\} + c. c, \\ v_0 = \left\{ Av_{0a}(y) \exp[i(\alpha_a x - \omega_a t)] + Bv_{0b}(y) [\exp[i(\alpha_b x + \beta_z + \omega_b t)] + \exp[i(\alpha_b x - \beta_z + \omega_b t)]] \right\} + c. c, \\ w_0 = \left\{ Bw_{0b} [\exp[i(\alpha_b x + \beta_z + \omega_b t)] - \exp[i(\alpha_b x - \beta_z + \omega_b t)]] \right\} + c. c, \\ p_0 = \left\{ Ap_{0a}(y) \exp[i(\alpha_a x - \omega_a t)] + Bp_{0b}(y) [\exp[i(\alpha_b x + \beta_z + \omega_b t)] + \exp[i(\alpha_b x - \beta_z + \omega_b t)]] \right\} + c. c, \end{cases} \quad (11)$$

c. c 表示共轭复函数。

### 3.2.5 “三波共振”特征方程(O-S)方程

将(11)代入(7)~(10)式中, 略去右端非线性项, 化简得 Orr-Sommerfield 方程:

$$\left\{ [D^2 - (\alpha_b^2 + \beta^2)]^2 - iRe[(\alpha_b U - \omega_b)(D^2 - (\alpha_b^2 + \beta^2)) - \alpha_b D^2 U] \right\} v_{0b}(y) = 0 \quad (12)$$

当  $y = 0$  或  $1$  时,  $v_{0b}(y) = Dv_{0b}(y) = 0$ ; 当  $\beta = 0, \alpha_b, \omega_b$  取  $\alpha_a, \omega_a$  时, 方程即变为二维 Orr-Sommerfield 方程。

通过解二维、三维 O-S 方程, 可以得到在一定雷诺数和一定流速分布形式下的二维和三维中扰动波的特征值, 即可获得二维、三维中性扰动波。在线性理论范围内, 认为中性扰动波可以长时间保持在明渠层流或明渠附面层中。但实际中, 扰动波在流体中的传播是一非线性作用发展的过程。受非线性的作用, 小扰动逐渐发展强化, 最后导致整个层流状态的破坏, 使之转捩为紊流。

### 3.2.6 “三维共振”的必要条件

将(11)代入(7)~(10)的非线性项中, 由一对三维斜波通过非线性作用, 产生包含因子  $\exp[2i(\alpha_a - \omega_a t)]$  的项; 由一个二维波和一个三维斜波通过非线性作用, 将产生包含因子  $\exp[i((\theta_a - \theta_b) \pm \beta_z - (\omega_a - \omega_b)t)]$  的项, 其中  $\theta_a = \alpha_a x, \theta_b = \alpha_b x$ 。因此, 要想使三维扰动波与二维扰动波之间产生强烈的相互作用, 就必须使非线性作用产生出来的项所包含的因子与原来基本三维波和二维波包含的因子相同, 这样才能通过非线性作用, 引起“三波共振”, 于是要求:

$$2(\theta_b - \omega_b t) = (\theta_a - \omega_a t), [(\theta_a - \theta_b) \pm \beta_z - (\omega_a - \omega_b)t] = [\theta_b \pm \beta_z - \omega_b t],$$

即: 1)  $\theta_a = 2\theta_b$ ,  $\alpha_{ar} = 2\alpha_{br}$ ; 2)  $\omega_a = 2 \cdot \omega_b$ . (13)

对于频率为  $\omega_a$  的二维基本波来说, 并不是任意一个频率为  $\omega_b/2$  的三维波都满足 1) 的要求, 通过选择  $\beta = \beta_0$ , 模拟 C 型失稳, 并唯一确定满足要求的三维亚谐波.

### 3.2.7 共振三波幅值演化计算

为了能进一步研究非线性情况下扰动波的相互作用和幅值演化情况, 我们采用空间模式:

$$\alpha_a = \alpha_{ar} + i\alpha_{ai}, \quad \alpha_b = \alpha_{br} + i\alpha_{bi}, \quad a = A \exp[-\alpha_{ai}x],$$

$$b = B \exp[-\alpha_{bi}x], \quad \theta_a = \alpha_{ar}x, \quad \theta_b = \alpha_{br}x,$$

于是 (11) 可写为:

$$\begin{cases} u_0 = \left\{ au_0a(y) \exp[i(\theta_a - \omega_a)t] + bu_0b(y) [\exp[i(\theta_b + \beta_z - \omega_bt)] + \exp[i(\theta_b - \beta_z - \omega_bt)]] \right\} + c. c, \\ v_0 = \left\{ av_0a(y) \exp[i(\theta_a - \theta_a)t] + bv_0b(y) [\exp[i(\theta_b + \beta_z - \omega_bt)] + \exp[i(\theta_b - \beta_z - \omega_bt)]] \right\} + c. c, \\ w_0 = \left\{ bw_0b [\exp[i(\theta_b + \beta_z - \omega_bt)] - \exp[i(\theta_b - \beta_z - \omega_bt)]] \right\} + c. c, \end{cases} \quad (14)$$

#### a) 摄动展开

考虑非线性的作用, 采用摄动法, 将扰动速度、压力展为:

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \cdot \mathcal{E}^i, \quad v = \sum_{i=1}^{\infty} v_i \cdot \mathcal{E}^i, \quad w = \sum_{i=1}^{\infty} w_i \cdot \mathcal{E}^i, \quad p = \sum_{i=0}^{\infty} p_i \cdot \mathcal{E}^i. \quad (15)$$

将 (15) 代入扰动方程 (7) ~ (10) 中, 可得出各阶速度所满足的方程组:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} + \frac{\partial w_i}{\partial z} \right] \mathcal{E}^i = 0, \quad (16)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial t} + Lu_i + v_i \frac{dU}{dy} + \frac{\partial p_i}{\partial x} \right] \mathcal{E}^i = -\varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^i \left[ u_k \frac{\partial u_{i-k}}{\partial x} + v_k \frac{\partial u_{i-k}}{\partial y} + w_k \frac{\partial u_{i-k}}{\partial z} \right] \mathcal{E}^i, \quad (17)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{\partial v_i}{\partial t} + Lv_i + \frac{\partial p_i}{\partial y} \right] \mathcal{E}^i = -\varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^i \left[ u_k \frac{\partial v_{i-k}}{\partial x} + v_k \frac{\partial v_{i-k}}{\partial y} + w_k \frac{\partial v_{i-k}}{\partial z} \right] \mathcal{E}^i. \quad (18)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{\partial w_i}{\partial t} + Lw_i + \frac{\partial p_i}{\partial z} \right] \mathcal{E}^i = -\varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^i \left[ u_k \frac{\partial w_{i-k}}{\partial x} + v_k \frac{\partial w_{i-k}}{\partial y} + w_k \frac{\partial w_{i-k}}{\partial z} \right] \mathcal{E}^i. \quad (19)$$

边界条件:  $y = 0$  或  $h$ ,  $u, v, w = 0$

本文采用流动稳定性弱非线性理论的最新修正方法<sup>[7],[8]</sup>, 利用空间模式进行分析: 对于线性部分, 即  $\mathcal{E}^0$  项, 各速度及压力扰动量仍设为形如  $U_0(y, a, \theta)$  的函数, 则  $U_0, p_0$  通过  $a, \theta$  隐含  $x$ , 是  $x$  的隐函数; 对于非线性部分, 即  $\varepsilon^n, n \geq 1$  的项,  $U_n, p_n$  为  $(y, x, \theta)$  的函数, 同时  $\theta$  又隐含  $x$  变量; 以上两部分对  $t$  的依赖仍为相应的指数函数. 这样, 针对线性和非线性项, 对于

$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x^2}$  的表达式在两种情况下有所不同:

线性部分有:  $\mathcal{E}^0, n = 0$

$$\frac{da}{dx} = -\alpha_{ai}a + \sum_{i=1}^{\infty} A_i(a, b) \mathcal{E}^i = A, \quad \frac{db}{dx} = -\alpha_{bi}b + \sum_{i=1}^{\infty} B_i(a, b) \mathcal{E}^i = B, \quad (20a)$$

$$\frac{d\theta_a}{dx} = -\alpha_{ar} \sum_{i=1}^{\infty} C_i(a, b) \mathcal{E}^i = C, \quad \frac{d\theta_b}{dx} = -\alpha_{br} + \sum_{i=1}^{\infty} D_i(a, b) \mathcal{E}^i = D, \quad (20b)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = A \frac{\partial}{\partial a} + B \frac{\partial}{\partial b} + C \frac{\partial}{\partial \theta_a} + D \frac{\partial}{\partial \theta_b}, \quad (20c)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} = & A^2 \frac{\partial^2}{\partial a^2} + B^2 \frac{\partial^2}{\partial b^2} + C^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta_a^2} + D^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta_b^2} + 2AB \frac{\partial^2}{\partial a \partial b} + \\ & 2AC \frac{\partial^2}{\partial a \partial \theta_a} + 2AD \frac{\partial^2}{\partial a \partial \theta_b} + \left( A \frac{\partial A}{\partial a} + B \frac{\partial A}{\partial b} \right) \frac{\partial}{\partial a} + \left( A \frac{\partial B}{\partial a} + B \frac{\partial B}{\partial b} \right) \frac{\partial}{\partial b} + \\ & \left( A \frac{\partial C}{\partial a} + B \frac{\partial C}{\partial b} \right) \frac{\partial}{\partial \theta_a} + \left( A \frac{\partial D}{\partial a} + B \frac{\partial D}{\partial b} \right) \frac{\partial}{\partial \theta_b}. \end{aligned} \quad (20d)$$

非线性部分有  $\varepsilon_n, n \geq 1$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\theta_a}{dx} = & a_{nr} + \sum_{i=1}^{\infty} C_i(a, b) \varepsilon^i = C, \quad \frac{d\theta_b}{dx} = \alpha_r + \sum_{i=0}^{\infty} D_i(a, b) \varepsilon^i = D, \\ \frac{\partial}{\partial x} = & \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta_a} \frac{d\theta_a}{dx} + \frac{\partial}{\partial \theta_b} \frac{d\theta_b}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + C \frac{\partial}{\partial \theta_a} + D \frac{\partial}{\partial \theta_b}, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} = & \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial C}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta_a} + \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta_b} + 2C \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta_a} + 2D \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta_b} + \\ & 2CD \frac{\partial^2}{\partial \theta_a \partial \theta_b} + C^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta_a^2} + D^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta_b^2}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

将(20), (21)代入(16)~(19)中,并引入如下算子:

$$\begin{aligned} l_n = & A_n \frac{\partial}{\partial a} + B_n \frac{\partial}{\partial b} + C_n \frac{\partial}{\partial \theta_a} + D_n \frac{\partial}{\partial \theta_b}, \\ S_n = & \sum_{i=0}^n A_i A_{n-i} \frac{\partial^2}{\partial a^2} + \sum_{i=0}^n B_i B_{n-i} \frac{\partial^2}{\partial b^2} + \sum_{i=0}^n C_i C_{n-i} \frac{\partial^2}{\partial \theta_a^2} + \\ & \sum_{i=0}^n D_i D_{n-i} \frac{\partial^2}{\partial \theta_b^2} + 2 \sum_{i=0}^n A_i B_{n-i} \frac{\partial^2}{\partial a \partial b} + 2 \sum_{i=0}^n A_i C_{n-i} \frac{\partial^2}{\partial a \partial \theta_a} + \\ & 2 \sum_{i=0}^n A_i D_{n-i} \frac{\partial^2}{\partial a \partial \theta_b} + 2 \sum_{i=0}^n B_i C_{n-i} \frac{\partial^2}{\partial b \partial \theta_a} + 2 \sum_{i=0}^n B_i D_{n-i} \frac{\partial^2}{\partial b \partial \theta_b} + \\ & 2 \sum_{i=0}^n C_i D_{n-i} \frac{\partial^2}{\partial \theta_a \partial \theta_b} + \sum_{i=0}^n A_i \frac{\partial A_{n-i}}{\partial a} \frac{\partial}{\partial a} + \sum_{i=0}^n A_i \frac{\partial B_{n-i}}{\partial a} \frac{\partial}{\partial b} + \\ & \sum_{i=0}^n A_i \frac{\partial C_{n-i}}{\partial a} \frac{\partial}{\partial \theta_a} + \sum_{i=0}^n A_i \frac{\partial D_{n-i}}{\partial a} \frac{\partial}{\partial \theta_b} + \sum_{i=0}^n B_i \frac{\partial A_{n-i}}{\partial b} \frac{\partial}{\partial a} + \\ & \sum_{i=0}^n B_i \frac{\partial B_{n-i}}{\partial b} \frac{\partial}{\partial b} + \sum_{i=0}^n B_i \frac{\partial C_{n-i}}{\partial b} \frac{\partial}{\partial \theta_a} + \sum_{i=0}^n B_i \frac{\partial D_{n-i}}{\partial b} \frac{\partial}{\partial \theta_b}, \\ L_0 = & U l_0 - \frac{1}{R} S_0 - \frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right); \quad L_n = U l_n - \frac{1}{R} S_n \quad (n \geq 1), \\ T_n = & C_n \frac{\partial}{\partial \theta_b} + D_n \frac{\partial}{\partial \theta_b}, \\ S'_n = & \frac{\partial C_n}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta_a} + \frac{\partial D_n}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta_b} + 2C_n \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta_a} + 2D_n \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta_b} + \\ & 2 \sum_{i=0}^n C_i D_{n-i} \frac{\partial^2}{\partial \theta_a \partial \theta_b} + 2 \sum_{i=0}^n D_i D_{n-i} \frac{\partial^2}{\partial \theta_b^2} + \sum_{i=0}^n C_i C_{n-i} \frac{\partial^2}{\partial \theta_a^2}, \\ l'_0 = & \frac{\partial}{\partial x} + T_0; \quad l'_n = T_n \quad (n \geq 0), \\ L'_0 = & U l'_0 - \frac{1}{R} S'_0 - \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right); \quad L'_n = U l'_n - S'_n \quad (n \geq 1), \end{aligned}$$

可得各阶扰动量所满足的方程:

b) 各阶扰动量所满足的方程:

$\varepsilon^0$  项(一阶):

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + L u_0 + v_0 \frac{dU}{dy} + l_0 p_0 = 0, \quad (22)$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial t} + L v_0 + \frac{\partial p_0}{\partial y} = 0, \quad (23)$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial t} + L w_0 + \frac{\partial p_0}{\partial z} = 0, \quad (24)$$

$$l_0 u_0 + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0. \quad (25)$$

$\varepsilon^1$  项(二阶):

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + L_0 u_1 + v_1 \frac{dU}{dy} + l_0 p_1 = - \left\{ u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} + w_0 \frac{\partial u_0}{\partial z} \right\} - L_1 u_0 - l_1 p_0 \quad (26)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + L_0 v_1 + \frac{\partial p_1}{\partial y} = - \left\{ u_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_0}{\partial y} + w_0 \frac{\partial v_0}{\partial z} \right\} - L_1 v_0, \quad (27)$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} + L_0 w_1 + \frac{\partial p_1}{\partial z} = - \left\{ u_0 \frac{\partial w_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial w_0}{\partial y} + w_0 \frac{\partial w_0}{\partial z} \right\} - L_1 w_0, \quad (28)$$

$$l_0 u_1 + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = - l_1 u_0. \quad (29)$$

$\varepsilon^2$  项(三阶):

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + L_0^2 u_2 + v_2 \frac{dU}{dy} + l_0 p_2 = - \sum_{i=0}^1 \left\{ u_i \frac{\partial u_{1-i}}{\partial x} + v_i \frac{\partial u_{1-i}}{\partial y} + w_i \frac{\partial u_{1-i}}{\partial z} \right\} - L_2 u_0 - l_2 p_0 - L_1 u_1 - l_1 p_1, \quad (30)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + L_0^2 v_2 + \frac{\partial p_2}{\partial y} = - \sum_{i=0}^1 \left\{ u_i \frac{\partial v_{1-i}}{\partial x} + v_i \frac{\partial v_{1-i}}{\partial y} + w_i \frac{\partial v_{1-i}}{\partial z} \right\} - L_2 v_0 - L_1 v_1, \quad (31)$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial t} + L_0^2 w_2 + \frac{\partial p_2}{\partial z} = - \sum_{i=0}^1 \left\{ u_i \frac{\partial w_{1-i}}{\partial x} + v_i \frac{\partial w_{1-i}}{\partial y} + w_i \frac{\partial w_{1-i}}{\partial z} \right\} - L_2 w_0 - L_1 w_1. \quad (32)$$

$$l_0 u_2 + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z} = - l_2 u_0 - T_1 u_1. \quad (33)$$

c) 各阶方程求解方法及解的形式

▲  $\varepsilon^0$ :

方程组(22) ~ (25) 为线性扰动方程组, 其解为 T<sub>S</sub> 波详细形式如下:

$$\begin{cases} u_0 = a \hat{u}_{0a}(y) \exp[i\theta_a] + b \hat{u}_{0b}(y) [\exp[i\theta_{b1}] + \exp[i\theta_{b2}]] + c. c, \\ v_0 = a \hat{v}_{0a}(y) \exp[i\theta_a] + b \hat{v}_{0b}(y) [\exp[i\theta_{b1}] + \exp[i\theta_{b2}]] + c. c, \\ w_0 = b \hat{w}_{0b}(y) [\exp[i\theta_{b1}] - \exp[i\theta_{b2}]] + c. c, \\ p_0 = a \hat{p}_{0a}(y) \exp[i\theta_a] + b \hat{p}_{0b}(y) [\exp[i\theta_{b1}] + \exp[i\theta_{b2}]] + c. c. \end{cases} \quad (34)$$

▲  $\varepsilon^1$ :

针对方程(26) ~ (29) 右端, 考察

$$(v_0 + v_0^*) \frac{\partial}{\partial y} (u_0 + u_0^*) = v_0 \frac{u_0}{\partial y} + v_0^* \frac{\partial u_0}{\partial y} + c. c,$$

可知  $u_1$  应包含 8 个部分, 即  $u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14}, u_{15}, u_{16}, u_{17}, u_{18}$ , 再采用三波共振条件,  $\alpha_r = 2\alpha_b$ ,  $\omega_a = 2\omega_b$ , 它们分别有如下对应关系, 有:

$$u_{11} \rightarrow \exp[i\theta_a], u_{12} \rightarrow [\exp[i\theta_{b1}] + \exp[i\theta_{b2}]], u_{13} \rightarrow \exp[2i\theta_a],$$



$$u_{14} \rightarrow [\exp[2i\theta_1] + \exp[2i\theta_2]], u_{15} \rightarrow [e^{i0}];$$

$$u_{16} \rightarrow [e^{i0} + e^{i0}], u_{17} \rightarrow [\exp[i(\theta_a + \theta_{b1})] + \exp[i(\theta_a + \theta_{b2})]], u_{18} \rightarrow e^{2i\beta z}$$

由于篇幅所限, 仅以  $\exp[2i\theta_a]$  和  $e^{i0}$  的对应项例示, 说明其求解方法及求解过程。

● 以  $\exp[2i\theta_a]$  项为例, 其满足的基本方程:

$$\frac{\partial u_{13}}{\partial t} + \dot{L}_0 u_{13} + v_{13} \frac{du}{dy} + \dot{l}_0 P_{13} = - \left\{ a^2 \left[ \hat{u}_{0a}(i\alpha \hat{u}_{0a}) + \hat{v}_{0a} \frac{\partial \hat{u}_{0a}}{\partial y} \right] \exp[2i\theta_a] \right\}, \quad (35)$$

$$\frac{\partial v_{13}}{\partial t} + \dot{L}_0 v_{13} + \frac{\partial P_{13}}{\partial y} = - \left\{ a^2 \left[ \hat{u}_{0a}(i\alpha \hat{v}_{0a}) + \hat{v}_{0a} \frac{\partial \hat{v}_{0a}}{\partial y} \right] \exp[2i\theta_a] \right\}, \quad (36)$$

$$\dot{l}_0 u_{13} + \frac{\partial v_{13}}{\partial y} = 0. \quad (37)$$

首先找一个特解, 设:

$$u_{13} = u_{13} \exp[2i\theta_a], \quad v_{13} = v_{13} \exp[2i\theta_a], \quad p_{13} = p_{13} \exp[2i\theta_a]. \quad (38)$$

解下列方程:

$$\frac{\partial u_{13}}{\partial t} + \dot{L}_0 u_{13} + v_{13} \frac{du}{dy} + \dot{l}_0 P_{13} = - \left\{ \left[ \hat{u}_{0a}(i\alpha \hat{u}_{0a}) + \hat{v}_{0a} \frac{\partial \hat{u}_{0a}}{\partial y} \right] \exp[2i\theta_a] \right\}, \quad (39)$$

$$\frac{\partial v_{13}}{\partial t} + \dot{L}_0 v_{13} + \frac{\partial P_{13}}{\partial y} = - \left\{ \left[ u_{0a}(i\alpha \hat{v}_{0a}) + \hat{v}_{0a} \frac{\partial \hat{v}_{0a}}{\partial y} \right] \exp[2i\theta_a] \right\}, \quad (40)$$

$$\dot{l}_0 u_{13} + \frac{\partial v_{13}}{\partial y} = 0. \quad (41)$$

然后设一通解, 
$$\begin{cases} u_{13} = \dot{u}_{13}(y) \exp[i(\dot{a}'x - 2\omega t)], \\ v_{13} = \dot{v}_{13}(y) \exp[i(\dot{a}'x - 2\omega t)], \\ p_{13} = \dot{p}_{13}(y) \exp[i(\dot{a}'x - 2\omega t)]. \end{cases} \quad (42)$$

解下列特征值问题:

$$\frac{\partial u_{13}}{\partial t} + \dot{L}_0 u_{13} + v_{13} \frac{du}{dy} + \dot{l}_0 P_{13} = 0, \quad (43)$$

$$\frac{\partial v_{13}}{\partial t} + \dot{L}_0 v_{13} + \frac{\partial P_{13}}{\partial y} = 0, \quad (44)$$

$$\dot{l}_0 u_{13} + \frac{\partial v_{13}}{\partial y} = 0. \quad (45)$$

并用  $\dot{\alpha}_n$  及  $\dot{u}_{13n}$  表示特征值及特征函数, 于是  $u_{13}$  可展为  $\dot{u}_{13n}$  的级数, 即:

$$\begin{cases} u_{13} = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{H}'_{13n} \dot{u}'_{13n}, \\ v_{13} = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{H}'_{13n} \dot{v}'_{13n}, \\ p_{13} = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{H}'_{13n} \dot{p}'_{13n}. \end{cases} \quad (46)$$

故方程(43)~(45)的解为:

$$u_{13} = a^2 u_{13} \exp(2i\theta) - \sum_{n=1}^{\infty} \dot{H}_{13n} \dot{u}'_{13n} \exp(i\dot{\alpha}_n x - 2i\omega t). \quad (47)$$

令  $\dot{H}_{13n} = \dot{H}'_{13n} \exp(-\dot{\alpha}_n x)$ , 回代到(43)~(45), 略去  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$  项, 可得:

$$\frac{dH_{13n}}{dx} = -\alpha_{ni}' \cdot H_{13n} + \frac{da^2}{dx} H_{13n} \exp[-i(\alpha_{nr}' - 2\alpha_{ar}')x], \quad (48)$$

$$H_{13n}(0) = H_{13n}' a^2(0) \cdot$$

仅计(47)式的第一模态,则(47)可简化为:

$$u_{13} = (a^2 - H_{131}) u_{13} \exp(2i\theta_a) + c. c, \quad (49)$$

$$u_{13} = H_{131} u_{13} \exp(2i\theta) + c. c, \quad (50)$$

$$\frac{dH_{13}}{dx} = -\alpha_{1i}' (H_{13} - a^2), H_{13}(0) = 0 \cdot \quad (51)$$

同理,可得其他部分的解:

$$u_{11} = H_{111} u_{11} \exp(i\theta_a) + c. c \quad (52)$$

$$\frac{dH_{11}}{dx} = -\alpha_{11i}' (H_{11} - b^2), H_{11}(0) = 0, \quad (53)$$

$$u_{12} = H_{121} u_{12} [\exp(i\theta_{b1}) + \exp(i\theta_{b2})], \quad (54)$$

$$\frac{dH_{12}}{dx} = -\alpha_{12i}' (H_{12} - ab), H_{12}(0) = 0, \quad (55)$$

$$u_{13} = H_{131} u_{13} \exp(2i\theta_a) + c. c, \quad (56)$$

$$\frac{dH_{13}}{dx} = -\alpha_{13i}' (H_{13} - a^2), H_{13}(0) = 0, \quad (57)$$

$$u_{14} = H_{141} u_{14} [\exp(2i\theta_{b1}) + \exp(2i\theta_{b2})], \quad (58)$$

$$\frac{dH_{14}}{dx} = -\alpha_{14i}' (H_{14} - b^2), H_{14}(0) = 0 \cdot \quad (59)$$

$$u_{17} = H_{171} u_{17} \left\{ \exp[i(\theta_a + \theta_{b1})] + \exp[i(\theta_a + \theta_{b2})] \right\}, \quad (60)$$

$$\frac{dH_{17}}{dx} = -\alpha_{17i}' (H_{17} - ab) \quad (61)$$

$$u_{18} = H_{181} u_{18} \exp(2i\theta_b), \quad (62)$$

$$\frac{dH_{18}}{dx} = -\alpha_{18i}' (H_{18} - b^2), \quad (63)$$

● 以  $\exp[i_0]$  项为例,平均流修正项满足的基本方程:

$$u(y) \frac{\partial u_{15}}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u_{15}}{\partial y^2} = -a^2 \operatorname{Re} \left\{ \hat{v}_{0a} \frac{d\hat{u}_{0a}}{dy} \right\}. \quad (64)$$

$u_{15}$  采用数值解法求解之,其形式为:  $u_{15} = u_{15}(x, y)$ ; 同理:

$$u_{16} = u_{16}(x, y) \cdot$$

▲  $\varepsilon^2$ :

方程(30)~(33)的求解:

考察  $u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_1}{\partial y} + v_1 \frac{\partial u_0}{\partial y}$  等,可知  $u_2, v_2, w_2$  和  $p_2$  中,与 Landua 系数  $A_2, B_2,$

$C_2$  和  $D_2$  有关的部分为:

$$u_2 = u_{2a} + u_{2b}, \quad v_2 = v_{2a} + v_{2b}, \quad w_2 = w_{2b} \cdot \quad (65)$$

其中  $u_{2a}$  等与  $\exp[i\theta_a]$  对应,为二维量;  $u_{2b}$  等与  $\exp[i\theta_b]$  对应,为三维量,相应的朗道系数为

$$A_2 = A_{21} \cdot H_{12} \cdot b + A_{22} \cdot H_{13} \cdot a + A_{23}(x, y) \cdot a +$$

$$A_{24}(x, y) \cdot a + A_{25} \cdot H_{17} \cdot b, \quad (66)$$

$$C_2 = C_{21} \cdot H_{12} \cdot \frac{b}{a} + C_{22} \cdot H_{13} + C_{23}(x, y) + C_{24}(x, y) + C_{25} \cdot H_{17} \cdot \frac{b}{a}. \quad (67)$$

$$B_2 = B_{21} \cdot H_{14} \cdot b + B_{22} \cdot H_{17} \cdot a + B_{23}(x, y) \cdot b + B_{24}(x, y) \cdot b + B_{15} \cdot B_{12} \cdot a + B_{16} \cdot H_{11} \cdot b + B_{17} \cdot H_{18} \cdot b, \quad (68)$$

$$D_2 = D_{21} \cdot H_{14} + D_{22} \cdot H_{17} \cdot \frac{a}{b} + D_{23}(x, y) + D_{24}(x, y) + D_{15} \cdot H_{12} \cdot \frac{a}{b} + D_{16} \cdot H_{11} + D_{17} \cdot H_{18}. \quad (69)$$

$u_{2a}$ 、 $v_{2a}$ 、 $p_{2a}$ ； $u_{2b}$ 、 $v_{2b}$ 、 $w_{2b}$ 、 $p_{2b}$  的求解方法与二阶量  $u_{13}$  等的解法相同。

d) 朗道方程(幅值幅角演化方程)

通过上述分析,朗道系数  $A_2$ 、 $C_2$  分别正比  $B_{12}a$ 、 $a$  及  $B_{12}$ 、 $1$ ,朗道方程为:

$$\frac{da}{dx} = -\alpha_a a + A_1 \cdot b^2 + A_{21} \cdot H_{12} \cdot b + A_{22} \cdot H_{13} \cdot a + A_{23}(x, y) a + A_{24}(x, y) \cdot a + A_{25} \cdot H_{17} \cdot b, \quad (70)$$

$$\frac{d\theta_a}{dx} = \alpha_a + C_1 \cdot \frac{b^2}{a} + C_{21} \cdot H_{12} \cdot \frac{b}{a} + C_{22} \cdot H_{13} + C_{23}(x, y) + C_{24}(x, y) + C_{25} \cdot H_{17} \cdot \frac{b}{a}, \quad (71)$$

$$\frac{db}{dx} = -\alpha_b \cdot a + B_1 \cdot ab + B_{21} \cdot H_{21} \cdot a + B_{22} \cdot H_{14} \cdot b + B_{23}(x, y) \cdot b + B_{24}(x, y) \cdot b + B_{25} H_{17} \cdot a + B_{26} \cdot H_{18} \cdot b + B_{27} \cdot H_{11} \cdot b, \quad (72)$$

$$\frac{d\theta_b}{dx} = \alpha_b \cdot \frac{a}{b} + D_1 \cdot a + D_{21} \cdot H_{21} \cdot \frac{a}{b} + D_{22} \cdot H_{14} + D_{23}(x, y) + D_{24}(x, y) + D_{25} H_{17} \cdot \frac{a}{b} + D_{26} \cdot H_{18} + D_{27} \cdot H_{11}. \quad (73)$$

e) 扰动量表达式

$$u = u_0 + \left\{ u_{11} + u_{12} + u_{13} + u_{14} + u_{17} + u_{18} \right\} + \left\{ u_{2a} + u_{2b} \right\}, \quad (74)$$

$$v = v_0 + \left\{ v_{11} + v_{12} + v_{13} + v_{14} + v_{17} + v_{18} \right\} + \left\{ v_{2a} + v_{2b} \right\}, \quad (75)$$

$$w = w_0 + \left\{ 0 + v_{12} + 0 + v_{14} + v_{17} + v_{18} \right\} + \left\{ 0 + v_{2b} \right\}, \quad (76)$$

$$P = p_0 + \left\{ p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{14} + p_{17} + p_{18} \right\} + \left\{ p_{2a} + p_{2b} \right\}. \quad (77)$$

将  $u_0$  等的表达式代入上式得二维扰动量、三维扰动量。

二维扰动量:

$$u_a = \hat{a} u_{0a}(y) \exp(i\theta_a) + H_{11} u_{11} \exp(i\theta_a) + H_{13} u_{13} \exp(2i\theta_a) + c. c, \quad (78)$$

$$v_a = \hat{a} v_{0a}(y) \exp(i\theta_a) + H_{11} v_{11} \exp(i\theta_a) + H_{13} v_{13} \exp(2i\theta_a) + c. c, \quad (79)$$

$$p_a = \hat{a} p_{0a}(y) \exp(i\theta_a) + H_{11} p_{11} \exp(i\theta_a) + H_{13} p_{13} \exp(2i\theta_a) + c. c \quad (80)$$

其中,  $c. c$  代表共轭复数。

三维扰动量:

$$u_b = \hat{b} u_{0b}(y) [\exp(i\theta_{b1}) + \exp(i\theta_{b2})] + H_{12} u_{12} [\exp(i\theta_{b1}) + \exp(i\theta_{b2})] + H_{14} u_{14} [\exp(2i\theta_{b1}) + \exp(2i\theta_{b2})] +$$

$$H_{17}u_{17}\left\{\exp[i(\theta_a + \theta_{b1})] + \exp[i(\theta_a + \theta_{b2})]\right\} + H_{18}u_{18}\exp(2i\beta z), \quad (81)$$

$$v_b = b\hat{v}_{0b}(y)[\exp(i\theta_{b1}) + \exp(i\theta_{b2})] + H_{12}v_{12}[\exp(i\theta_{b1}) + \exp(i\theta_{b2})] + \\ H_{14}v_{14}[\exp(2i\theta_{b1}) + \exp(2i\theta_{b2})] + \\ H_{17}v_{17}\left\{\exp[i(\theta_a + \theta_{b1})] + \exp[i(\theta_a + \theta_{b2})]\right\} + H_{18}v_{18}\exp(2i\beta z), \quad (82)$$

$$w_b = b\hat{w}_{0b}(y)[\exp(i\theta_{b1}) + \exp(i\theta_{b2})] + H_{12}w_{12}[\exp(i\theta_{b1}) + \exp(i\theta_{b2})] + \\ H_{14}w_{14}[\exp(2i\theta_{b1}) + \exp(2i\theta_{b2})] + \\ H_{17}w_{17}\left\{\exp[i(\theta_a + \theta_{b1})] + \exp[i(\theta_a + \theta_{b2})]\right\} + H_{18}w_{18}\exp(2i\beta z). \quad (83)$$

其中, c. c 代表共轭复数。

### 3.3 沙波形成机制描述

如前面理论分析可知, 水流作用在泥沙颗粒上的推力, 可分解为时均力(即时均速度所产生的力)和扰动力(即扰动速度所产生的力), 扰动力又是多级向量(三波共振三个方向)谐波综合作用的结果。

在扰动力作用下, 床面泥沙颗粒将在起动后, 作周期性的摆动。在一系列小扰动谐波中, 当扰动波的频率与泥沙颗粒摆动的固有频率一致(或呈整数倍时), 其对颗粒影响最大, 发生共振现象。作普遍运动的床面泥沙颗粒, 除受一个水流时均力以外, 还在扰动波所产生的扰动力作用下, 作强迫振动(摆动)。

#### 3.3.1 扰动波与床面泥沙颗粒动力作用模式

首先将床面泥沙看作散粒体, 沙纹的形成过程, 实质上就是平均流与小扰动波作用的结果, 平均流主要起推移的作用; 而小扰动波则相当于一个“交变力”对泥沙颗粒的作用。稳定床面结构采用“多球堆积模型”以及“小球凹面中的摆动模型”。

设一个单独颗粒位于两个或几个颗粒之上, 简单假设摆动泥沙为一球形, 其摆动中心到颗粒重心之距离为  $l$ , 颗粒到摆动转轴的转动惯量为  $I_0$ , 摆动转角为  $\phi$ , 摆动过程中阻力系数为  $C_w$ , 小扰动波产生的“交变力”为:

$$F = H \sin(\theta_a - \phi_{at}) \quad \text{—— 二维扰动力,}$$

$$F = H[\sin(\theta_b + \beta z - \omega_b t) + \sin(\theta_b - \beta z - \omega_b t)] \quad \text{—— 三维扰动力} \quad (84)$$

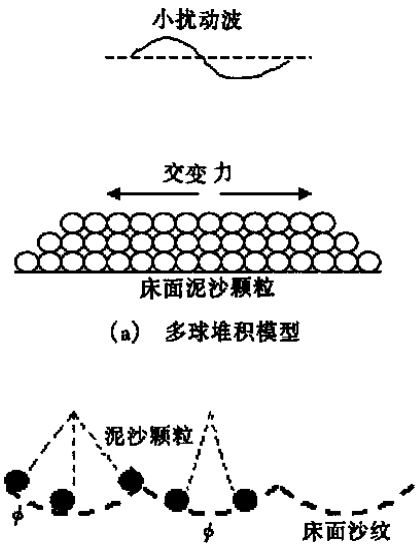
则床面泥沙颗粒摆动方程为:

$$I_0 \frac{d^2\phi}{dt^2} = -mg' \cdot l \cdot \sin\phi - C_w \cdot l^2 \frac{d\phi}{dt} + l \cdot F(\theta - \phi). \quad (85)$$

$$\text{转动惯量: } I_0 = ml^2 + \frac{1}{10} \cdot m \cdot d^2;$$

$$\text{Stokes 阻力: } F_s = C_w \cdot l^2 \frac{d\phi}{dt}. \quad (86)$$

其相应阻力系数:  $C_w = 3\pi\mu l$ ; 有效重力加速度:  $g' = g\left[1 - \frac{\rho_w}{\rho_s}\right]$ ; 沙粒固有频率:  $\omega_n =$



(b) 小球凹面中的摆动模型

图6 沙粒受迫摆动(振动)模型

$\sqrt{\frac{mg}{I_0}}l$ ; 沙粒摆动阻尼:  $n = \frac{C_w}{2I_0}l^2$ ; 沙粒受迫摆动最大幅值:  $b = \frac{H}{\sqrt{(\omega_n - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}}$ , 当  $\omega = \omega_n$ , 沙粒将发生共振现象, 此时沙纹形成发展速度最快, 沙粒表现出自身的检波特性。沙粒受迫摆动与小扰动波产生的“交变力”的相位差为  $\varepsilon$ ,  $\tan \varepsilon = \frac{2n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2}$ ,

方程(85)的通解为:

$$\phi = Ae^{-nt} \sin(\sqrt{(\omega_n^2 - n^2)}t + \alpha) + b \sin(\theta - \omega t + \varepsilon), \tag{87}$$

其中:  $\theta = \theta_a$  或  $\theta_b + \beta$  或  $\theta_b - \beta$ ;  $\omega = \omega_a$  或  $\omega_b$

### 3.3.2 沙纹表面形状及沙纹波长与波高的计算模式

按沙粒受迫摆动模型, 参见图 6,

$$\text{沙纹表面形状: } \eta(x, z) = l(1 - \cos \phi(x, z)), \tag{88}$$

$$\text{沙纹波长: } \lambda_s = 2l \sin(\phi_{\max}), \tag{89}$$

$$\text{沙纹波高: } h_s = l(1 - \cos \phi_{\max}). \tag{90}$$

具体计算步骤:

- 1) 在明渠层流情况下, 获得明渠层流的速度分布。
- 2) 在线性情况下, 通过解 Orr-Sommerfield 方程, 求出特定明渠流速分布下的中性扰动波的特征值。
- 3) 作非线性分析, 求出非线性作用所产生的高次谐波。
- 4) 求解 Landua 系数, 计算高次谐波和基本波的幅直演化情况。
- 5) 建立沙粒在扰动力作用下的受迫振动模型, 求出其摆角。
- 6) 计算沙纹表面形状, 确定沙纹波长和沙纹波高。

## 4 沙纹成因的数学模拟结果例示

假定取坡度  $S = 0.1 \times 10^{-4}$ , 水深  $h = 0.255\text{m}$  的明渠水流, 水槽宽度  $B = 2.43\text{m}$ , 床面铺一层无粘粉沙, 明渠中保持完全层流流态, 无量纲流速分布为  $U = 2y - y^2$ , 表层最大流速  $U_m = 0.2105\text{ m/s}$ , 明渠流雷诺数  $Re = 5314$ , 通过流动稳定性分析计算, 找出该条件下的中性扰动波, 二维基本波其特征值  $\alpha_n = 1.052 + 2.478 \times 10^{-3}i$ ,  $\omega^a = 0.2811$ ,  $\beta = 0.0$ ; 三维谐波特征值  $\alpha_b = 0.2352 + 2.300 \times 10^{-4}i$ ,  $\omega_b = 0.1403$ ,  $\beta = 0.359$ ; 然后按上述所提计算步骤, 确定沙纹形状, 扰动产生的二维沙纹见图 7, 扰动产生的三维沙纹见图 8。

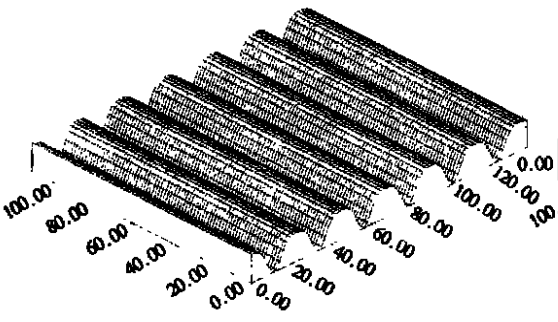


图 7 二维沙纹形状

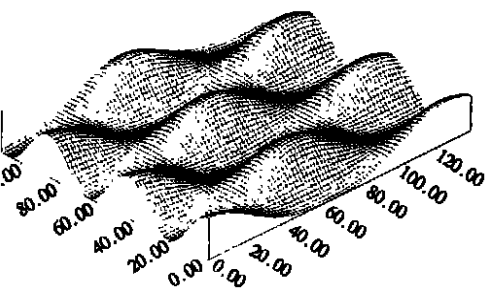


图 8 三维形状(C型)

从图中可以看出, 以上两种形式的沙纹, 其波长分别为  $20c$ 、 $30c$ , 相应其波高为  $3c$ 、

3.5cm, 这些计算值与文献<sup>[1]</sup>中的统计结果相符, 略大于实测值。

## 5 结 语

本文针对明渠道层流失稳进行了研究, 并对沙纹的成因作了初步探讨。认为沙纹的形成原因有二, 其一, 床面泥沙颗粒在明渠层流失稳过程中扰动波作用下, 作受迫振动(摆动)、推移所致; 其二, 床面泥沙颗粒在明渠床面近壁粘性底层中拟序结构动力作用下, 作受迫振动(摆动)、推移所致。

本文则针对前者作了探讨, 文中采用了稳定性理论来确定动力场。对于床面泥沙运动, 考虑床面泥沙以散粒体的形式存在, 故采用泥沙颗粒的受迫摆动模型。在基本流和扰动波的作用下, 床面上将产生一总切应力,  $\tau_0 = \tau_{0+} + \tau_0'$ , 当  $\tau_0$  大于泥沙起动临界力  $\tau_c$  时, 床面泥沙开始活动。 $\tau_0'$  是由扰动波产生的切应力, 即受迫力。在其作用下泥沙颗粒发生受迫摆动, 由于受迫力以一行进波的形式向前传播, 相应地泥沙颗粒摆角和摆幅大小以波的形式传播, 而泥沙颗粒摆角和摆幅又决定着床面泥沙的起伏, 即沙纹的形状。但需要指出的是, 沙纹的形成过程可粗略地分为两个阶段, 也称之为沙纹存在的两种形式, 即滚动颗粒沙纹 (rolling Grain ripples) 和旋涡沙纹 (vortex ripples)。滚动颗粒沙纹在沙纹形成的初始阶段出现, 在水流底层某一相对强度较大的扰动波 (T-S 波) 作用下, 当水流切应大于希尔兹 (shields) 力时, 滚动颗粒沙纹可以迅速地形成和发展。但稍后对于其他小于该强度的水流底层扰动波 (T-S 波), 沙纹的响应程度很小, 这也正是沙纹移动为什么不以行进波形式出现的原因所在。此外, 再经过一段时后, 在水流与扰动波总切应力的作用下, 沙纹的迎水面将逐步变长, 坡度逐渐变缓; 而沙纹的背水面则变短变陡, 在背水面形成小的旋涡, 沙纹也由此逐步向旋涡沙纹 (vortex ripples) 过渡, 直到水流底部最大切应力  $\tau_0$  小于二倍的起动切应力  $\tau_c$ , 旋涡沙纹 (vortex ripples) 都将保持一稳定的波纹形状, 这主要是由于在周期扰动的作用下, 扰动动力场的时间大致对称性作用所致, 具体的计算解释可参见作者的另一部分研究工作<sup>[9]</sup>。

通过对照沙纹计算形状图 7~ 图 8 和实际沙纹形状图 1、图 2、图 3 等, 可以看出它们是一致的。它们与流场烟线图的惊人相似之处, 说明三者内在动力结构是相同的, 计算结果反映了实际, 值得进一步深入研究。

致谢 研究过程中得到了天津大学力学系周恒教授、水利系洪柔嘉教授和顾元 教授的启发和帮助, 作者在此一并致以衷心的感谢。

### [ 参 考 文 献 ]

- [1] 钱宁、万兆惠. 泥沙运动力学 [M]. 北京: 科学出版社, 1985.
- [2] Yalin M S. Mechanics of Sediment Transport [M]. Oxford, Great Britain: Pergamon Press, 1972.
- [3] Klebanov P S, Tidstrom K D, Sargent L M. Three dimensional nature of boundary layer instability [J]. J Fluid Mech, 1962, 12(1): 1—34.
- [4] Saric W S, Kozlov V V, Levchenko V Y. Forced and unforced subharmonic resonance in boundary layer transition [A]. In: AIAA 22nd Aerospace Science Meeting [C]. New York, 1984, 9—12.
- [5] 郑兆珍、王尚毅. 沙纹的成因计算 [J]. 水利学报, 1985, (1): 39—43.
- [6] 白玉川. 层流边界层 C 型失稳的研究 [J]. 空气动力学学报, 1985, 13(1): 92—98.
- [7] 周恒, 尤学一. 流动稳定性弱非线性理论中的问题及其改进 [J]. 力学学报, 1993, 25(5): 517—528.

- [8] 周恒, 藤村薰. 流动稳定性弱非线性理论进一步改进[J]. 中国科学(A辑), 1997, 27(12): 1111—1118.
- [9] 白玉川, 蒋昌波, 曾谦. 沙纹床面振荡流底层大尺度涡结构演化的数学模拟与计算机动态演示[A]. 见: 李家春 主编. 第六届全国流体力学大会论文集《自然、工业与流动》[C]. 北京: 气象出版社出版, 2001, 341—346.

## The Loss of Stability of Laminar Flow in Open Channel and the Mechanism of Sand Ripple Formation

BAI Yu\_chuan, LUO Ji\_shen

(1. Institute for Sediment on River and Coast Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, P R China:

2. Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 300072, P R China)

**Abstract:** In the flow on a mobile bed in an open channel, sand ripple often appears after the sediment begins to move. Different scholars have different views on the formation of sand ripples. This paper holds that as the ripple in general is very small, its formation is due to the instability of the laminar flow or the evolution of the small\_scale coherent structures in the sub\_layer adjacent to the wall of the open channel. When the shear stresses caused by the disturbing waves or the coherent structure near the bed surface boundary and the water flow itself are greater than the shields stresses, responses on the bed surface appear and the sand ripple forms. If the frequency of the shear stress caused by the disturbance is close to the natural frequency of the sand grains that produced resonance, such a phenomenon is called the “detection property” of the sediment. It is at this point that the maximum resonance appears and the sand ripple develops rapidly.

**Key words:** sand ripple; loss of stability of laminar flow; coherent structure; forced oscillation of sand grains