

文章编号: 1000_0887(2002) 03_0273_10

谐和与随机噪声联合作用下 Van der Pol_Duffing 振子的参数主共振*

戎海武^{1,2}, 徐伟³, 王向东¹, 孟光^{1,2}, 方同³

(1. 佛山科学技术学院, 广东佛山 528000; 2. 上海交通大学振动、冲击、噪声国家重点实验室, 上海 200030;
3. 西北工业大学 应用数学系, 西安 710072)

(杨桂通推荐)

摘要: 研究了 Van der Pol_Duffing 振子在谐和与随机噪声联合激励下的参数主共振响应和稳定性问题。用多尺度法分离了系统的快变项, 并求出了系统的最大 Liapunov 指数和稳态概率密度函数, 还分析了失稳、分叉和跳跃现象, 讨论了系统的阻尼项、非线性项、随机项和确定性参数激励强度等参数对系统响应的影响。数值模拟表明所提出的方法是有效的。

关键词: 参数主共振; Van der Pol_Duffing 振子; 多尺度法; 最大 Liapunov 指数; 稳态概率密度

中图分类号: O324 文献标识码: A

引言

研究含有参数激励的非线性随机动力系统具有重要意义, 与研究随机外激振动相比研究参数激励随机振动更为重要, 理论上也更不成熟^[1]。当系统受到谐和及宽带噪声联合作用时, 已经有一些研究^[2-6], 当受到谐和及窄带噪声联合作用时, 作者^[7]对 Duffing 系统进行了研究。本文研究了 Van der Pol_Duffing 振子在谐和与随机噪声联合激励下的参数主共振响应和稳定性问题。用多尺度法分离了系统的快变项, 并求出了系统的最大 Liapunov 指数和稳态概率密度, 本文还分析了失稳、分叉和跳跃现象, 讨论了系统的阻尼项、非线性项、随机项和确定性参数激励强度对系统响应的影响。数值模拟表明本文提出的方法是有效的。

1 基本公式的推导

考虑同时受谐和与随机噪声参激的 Van der Pol_Duffing 振子

$$\ddot{u} + \varepsilon\beta\dot{u} + \omega^2(u + \alpha_1 u^3) + \alpha_2 u^2 \dot{u} + \varepsilon(h \cos \Omega_0 t + \xi(t))u = 0, \quad (1)$$

式中 $\varepsilon \ll 1$ 为小参数, $\beta, \omega, \alpha_1, \alpha_2, h, \Omega_0$ 都是常数, $\xi(t)$ 是随机噪声项,

$$\xi(t) = k \cos(\Omega_1 t + \gamma W(t)), \quad (2)$$

* 收稿日期: 2000_09_06; 修订日期: 2001_08_20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10072049; 19972054); 广东省自然科学基金资助项目(9744); 上海交通大学振动、冲击、噪声国家重点实验室开放基金资助项目(VSN_2002_04); 教育部骨干教师计划资助项目

作者简介: 戎海武(1965—), 男, 浙江宁波人, 副教授, 博士。

式中 $k > 0$ 为随机激励的强度, Ω_1 为中心频率, $W(t)$ 是标准 Wiener 过程, $\gamma \geq 0$ 为带宽. 由 Wedig^[9] 可知当带宽 γ 充分小时, $\xi(t)$ 是窄带随机噪声, 本文主要用多尺度法^[9] 研究这种情形, 多尺度法近些年来在随机系统中也有应用^[7, 10, 11]. 设系统(1) 具有如下形式的解·

$$u(t, \varepsilon) = u_0(T_0, T_1) + \varepsilon u_1(T_0, T_1) + \dots, \quad T_0 = t, \quad T_1 = \varepsilon \cdot \quad (3)$$

本文只对首次近似解 $u_0(T_0, T_1)$ 进行讨论. 记 $D_0 = \partial/\partial T_0$, $D_1 = \partial/\partial T_1$, 则有

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \mathcal{D}_1 + \dots, \quad \frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\mathcal{D}_0 D_1 + \dots, \quad (4)$$

将方程(3)、(4)代入方程(1)中, 并比较方程两边 ε 同次幂的系数, 可得下列微分方程组:

$$D_0^2 u_0 + \omega^2 u_0 = 0, \quad (5)$$

$$D_0^2 u_1 + \omega^2 u_1 = -2D_0 D_1 u_0 - \beta D_0 u_0 - \alpha_1 \omega^2 u_0^3 - \alpha_2 (D_0 u_0)^2 u_0 - (h \cos \Omega_0 t + \xi(t)) u_0, \quad (6)$$

方程(5)的解为

$$u_0(T_0, T_1) = A(T_1) \exp(i\omega T_0) + cc, \quad (7)$$

式中 cc 表示前述各项的共轭, $A(T_1)$ 是响应的振幅. 将(2)、(7)两式代入(6)式可得

$$D_0^2 u_1 + \omega^2 u_1 = -2i\omega A' \exp(i\omega T_0) - i\omega \beta A \exp(i\omega T_0) - (\alpha_1 - \alpha_2) \omega^2 A^3 \exp(3i\omega T_0) - (3\alpha_1 + \alpha_2) \omega^2 A^2 A \exp(i\omega T_0) - \frac{A}{2} h \exp[i(\Omega_0 + \omega) T_0] - \frac{A}{2} h \exp[i(\Omega_0 - \omega) T_0] - \frac{A}{2} k \exp[i(\Omega_1 + \omega) T_0 + \gamma W(T_1)] - \frac{A}{2} k \exp[i(\Omega_1 - \omega) T_0 + \gamma W(T_1)] + cc, \quad (8)$$

式中 A' , A 分别表示 A 关于 T_1 的导数及共轭. 本文讨论系统(1)的参数主共振响应·

2 参数主共振情形 I

设 $\Omega_0 \approx 2\omega$, 但 Ω_1 远离 Ω_0 , 引入调谐参数 σ , $\Omega_0 = 2\omega + \varepsilon\sigma$. 令(8)式右端中的奇异项为零可得

$$2i\omega A' + i\omega \beta A + 3\alpha \omega^2 A^2 A + \frac{h}{2} A \exp(i\sigma T_1) = 0, \quad (9)$$

式中 $\alpha = \alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2$. 将 A 表示成极坐标的形式

$$A(T_1) = a(T_1) \exp[i\varphi(T_1)]. \quad (10)$$

将(10)式代入(9)式并分离实部和虚部可得

$$a' = -\frac{\beta}{2} a - \frac{\alpha}{4\omega} h \sin \eta, \quad a\eta' = \alpha a - 3\alpha \omega a^2 - \frac{\alpha}{2\omega} h \cos \eta, \quad (11)$$

式中 $\eta = \sigma T_1 - 2\varphi$. 由(11)式解出 a 和 η 后, 可得方程(1)的首次近似解为

$$u = 2a(\varepsilon) \cos\left[\frac{1}{2}(\Omega_0 t - \eta(\varepsilon))\right] + O(\varepsilon).$$

2.1 稳态解及其稳定性

显然零解 $a = 0$ 是方程(11)的解. 对于非零的稳态解满足 $a' = 0$, $\eta' = 0$, $a \neq 0$, 由(11)式可得系统(1)的稳态振幅的首次近似为

$$a = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \left[\frac{\sigma}{3\alpha} \pm \frac{1}{6\alpha\omega} \sqrt{h^2 - 4\omega^2 \beta^2} \right]^{1/2}. \quad (12)$$

通过分析, 在 σh 平面上可将方程(11)稳态解的稳定性区域分为如下三个区域

$$\text{区域 I} = \left\{ (\sigma, h) : \sigma < 0, h < 2\omega \sqrt{\beta^2 + \sigma^2} \right\} \cup \left\{ (\sigma, h) : \sigma > 0, h < 2\omega\beta \right\},$$

$$\begin{aligned} \text{区域 II} &= \left\{ (\sigma, h) : h > 2\omega \sqrt{\beta^2 + \sigma^2} \right\}, \\ \text{区域 III} &= \left\{ (\sigma, h) : \sigma > 0, 2\omega\eta < h < 2\omega \sqrt{\beta^2 + \sigma^2} \right\}, \end{aligned}$$

三个区域如图 1 所示。在区域 I 中只有零解是稳定的, 这时对于任何初始扰动系统 (1) 的响应都将衰减到零。在区域 II 中只有一个稳定的非零的稳态解, 对于任何非零初始扰动系统 (1) 的响应都将收敛到这个非零的稳态解。在区域 III 中零解和大的稳态解都是稳定的, 对于不同的初始扰动, 系统 (1) 的响应可能衰减到零, 也可能收敛到这个大的稳态解。

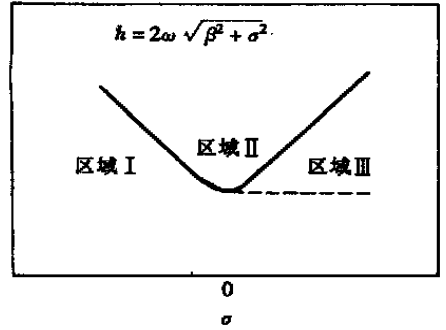


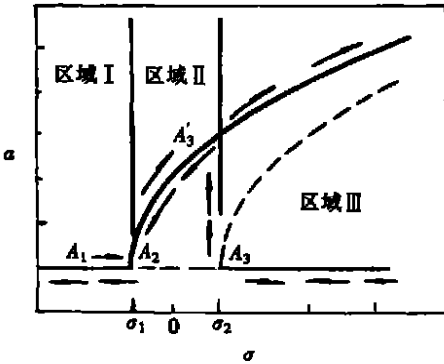
图 1 稳态解稳定性的参数区域

2.2 分叉及跳跃现象

取 σ 为分叉参数而 $h > 2\omega\beta$ 为常数, 当 σ 由小值逐渐增大时 a 的变化在图 2 中如曲线 $A_1A_2A_3$ 所示,

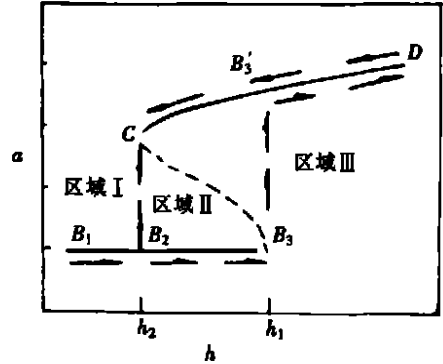
在 A_2 处即当 $\sigma = \sigma_1 = -(2\omega)^{-1} \sqrt{h^2 - 4\omega^2\beta^2}$ 时, 稳态响应将从零变为非零, 故 σ_1 为系统的一个分叉点。设开始时系统的稳态响应为零, 当 σ 由大逐渐变小时 a 的变化如曲线 $A_3A_3'A_2A_1$ 所示, 在 A_3 处, 即当 $\sigma = \sigma_2 = (2\omega)^{-1} \sqrt{h^2 - 4\omega^2\beta^2}$ 时, 稳态响应将从出现 A_3 到 A_3' 的跳跃, 故 σ_2 也为系统的一个分叉点。

取 h 为分叉参数而 $\sigma > 0$ 为常数, 设初始时 a 的值为零, 随着 h 的增大 a 的变化过程在图 3 中如曲线 $B_1B_2B_3B_3'D$ 所示, 在 B_3 即当 $h = h_1 = 2\omega \sqrt{\beta^2 + \sigma^2}$ 时, 将发生从 B_3 到 B_3' 的跳跃。设初始时 a 的值非零, 随着 h 从大逐渐变小, a 的变化如曲线 $DB_3'CB_2B_1$ 所示, 在 C 即当 $h = h_2 = 2\omega\beta$ 时将发生从 C 到 B_2 的跳跃, 故 h_1, h_2 都是系统的分叉点。



— 稳定解, -- 不稳定解

图 2 系统频率响应分叉图



— 稳定解, -- 不稳定解

图 3 系统响应分叉图

2.3 数值模拟

由 (2) 式定义的随机过程 $\xi(t)$ 可写为如下形式

$$\xi(t) = h \cos(\varphi(t)), \quad \varphi(t) = \Omega_1 t + \nu \zeta(t), \quad \zeta(t) = \mathbb{W}(t).$$

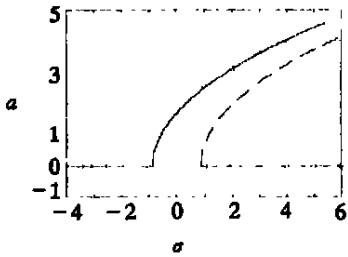
为方便起见, 本文数值模拟中设 $\zeta(t)$ 的谱密度 $S_\zeta(\omega)$ 仅当 $0 < \varepsilon \leq 2\omega_0$ 取值为 1, 而在其它频率处取值为 0, 则 $\zeta(t)$ 可用下式进行数值模拟^[1]

$$\zeta(t) = \sqrt{\frac{4\omega_0}{N}} \sum_{k=1}^N \cos\left[\frac{\omega_0}{N}(2k-1)t + \varphi_k\right], \tag{13}$$

式中 φ_k 是 $(0, 2\pi]$ 上均匀分布的独立同分布随机变量序列, N 是一个较大的整数. 取

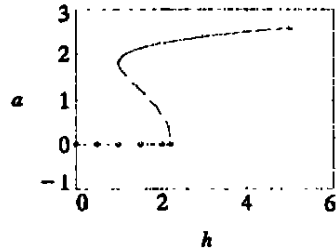
$$N = 1\,000, \varepsilon = 0.1, \beta = 0.5, \omega = 1.0, \alpha_1 = 0.07, \alpha_2 = 0.09, k = 1.0, \gamma = 1.0, \Omega_1 = 10^*$$

用四阶龙格库特法可计算出的系统(1)的响应. 当 $h = 3.0$ 时 a 关于 σ 的变化曲线的数值结果和由(12)给出的理论结果见图4. 当 $\sigma = 1.0$ 时的理论与数值结果见图5. 跳跃现象也在数值模拟中得到了证实.



—稳定解, --不稳定解, °°°数值解

图4 系统频率响应曲线



—稳定解, ...不稳定解, °°°数值解

图5 系统响应曲线

3 参数主共振情形 II

设 $\Omega_1 \approx 2\omega$, 但 Ω_0 远离 Ω_1 , 引入调谐参数 σ , $\Omega_1 = 2\omega + \varepsilon\sigma$, 令(8)式右端中的奇异项为零可得

$$2i\omega A' + i\beta\omega A + 3\alpha\omega^2 A^2 A + \frac{k}{2}A \exp(i\sigma T_1 + i\gamma W(T_1)) = 0, \tag{14}$$

作变换(10)可将(14)式化为

$$a' = -\frac{\beta}{2}a - \frac{a}{4\omega}k\sin\eta, \quad \eta' = \alpha - 3\alpha\omega a^3 - \frac{a}{2\omega}k\cos\eta - a\gamma W', \tag{15}$$

式中 $\eta = \sigma T_1 - 2\varphi + \gamma W(T_1)$. 由(15)式解出 a 和 η 后, 可得方程(1)的首次近似解为

$$u = 2a(\varepsilon) \cos\left[\frac{1}{2}(\Omega_1 t - \eta(\varepsilon))\right] + O(\varepsilon).$$

3.1 零解及其稳定性

显然零解 $a = 0$ 是方程(15)的稳态解, 下面讨论它的稳定性. 方程(15)的线性化方程为

$$a' = -\frac{\beta}{2}a - \frac{a}{4\omega}k\sin\eta, \quad \eta' = \sigma - \frac{k}{2\omega}\cos\eta - \gamma W', \tag{16}$$

令 $v = \ln a$, 方程(16)可改写为如下 Ito 方程的形式

$$dv = \left[-\frac{\beta}{2} - \frac{k}{4\omega}\sin\eta\right]dT_1, \quad d\eta = \left[\sigma - \frac{k}{2\omega}\cos\eta\right]dT_1 - \gamma dW. \tag{17}$$

由方程(17)可得马尔可夫过程 $\eta(T_1)$ 的稳态概率密度函数 $p(\eta)$ 对应的 FPK 方程为

$$\frac{d^2 p}{d\eta^2} - \frac{d}{d\eta}\left[\left(\sigma - \frac{k}{2\omega}\cos\eta\right)p\right] = 0, \quad \sigma = 2\sigma\varepsilon^{-2}, \quad k = k\omega^{-1}\varepsilon^{-2}, \tag{18}$$

由方程(18)解得

$$p(\eta) = \frac{\exp\left[\sigma\left(\eta + \frac{3\pi}{2}\right) - k\sin\eta\right]}{4\pi^2 I_0(k) L_p(k)} \int_{\eta}^{\eta+2\pi} \exp\left[-\sigma\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + k\sin x\right] dx, \tag{19}$$

式中 $I_n(x)$ 是第一类贝塞尔 I 函数。根据 Oseledec^[12] 乘法遍历性定理, 由方程(16) 零解的最大 Liapunov 指数 λ 可得零解几乎必然是稳定的充分必要条件, 即当 $\lambda < 0$ 时零解几乎必然稳定, $\lambda > 0$ 的零解几乎必然不稳定。由(17)、(19) 式经计算可得

$$\lambda = -\frac{\beta}{2} - \frac{k}{4\omega} E[\sin \eta] = -\frac{\beta}{2} - \frac{k}{8\omega} \left\{ \frac{I_{1-\nu}(-k)}{I_{1\sigma}(-k)} + \frac{I_{1+\nu}(-k)}{I_{1\sigma}(-k)} \right\}. \quad (20)$$

当 $\beta = 0.0, \omega = \gamma = 1.0, \lambda$ 关于 σ, k 变化的曲面图见图 6, 对应的 λ 等值线图见图 7。由图 6 可见此曲面有一个主峰, 当 Ω_1 接近系统的固有频率 ω 的两倍即 σ 接近于零时, λ 单调增加, 当 $\sigma = 0$ 时达到最大值即在主峰的中心区域。而在这个主峰区外则是平面 $\lambda = 0$, 即 λ 与 σ, k 无关, 此时随机参数不起作用。

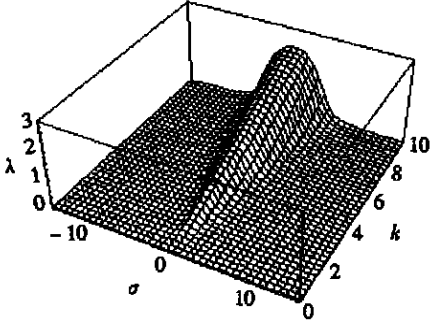


图 6 Liapunov 指数曲面图

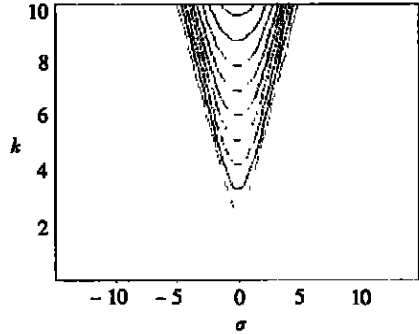


图 7 Liapunov 指数等值线图

3.2 非零稳态响应

对于非零的稳态解 $a \neq 0$, 由(15) 可得相应的 Ito 方程为

$$\begin{cases} da = - \left[\frac{\beta}{2} a + \frac{a}{4\omega} k \sin \eta \right] dT_1, \\ d\eta = \left[\sigma - 3\alpha\omega a^2 - \frac{k}{2\omega} \cos \eta \right] dT_1 - \gamma dW, \end{cases} \quad (21)$$

此方程可用摄动法进行求解。当 $\gamma = 0$ 时类似前文 2.1 节的讨论可得系统(21) 的稳态解为

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \left[\frac{\sigma}{3\alpha} \pm \sqrt{k^2 - 4\omega^2\beta^2} \right]^{1/2}, \quad \sin \eta_0 = -2\alpha k^{-1}, \quad (22)$$

当 $\gamma \neq 0$ 为小参数时, 令 $a = a_0 + a_1, \eta = \eta_0 + \eta_1$, 式中 a_1, η_1 为小扰动项, 将此式代入(21) 式并忽略非线性项可得线性化方程

$$\dot{a}_1 = -\frac{\alpha_0}{4\omega} k \cos \eta_0 \eta_1, \quad \dot{\eta}_1 = -6\alpha\omega a_0 a_1 - \beta \eta_1 - \gamma W'. \quad (23)$$

由上式利用广义平稳势法^[1] 可得 (a_1, η_1) 的稳态概率密度函数为

$$p(a_1, \eta_1) = C \exp \left\{ -\frac{16\beta\omega^2}{(k\gamma\alpha_0\cos\eta_0)^2} \left[(a_1')^2 - \frac{3}{2} k\alpha a_0^2 \cos \eta_0 a_1^2 \right] \right\}, \quad (24)$$

式中 C 为归一化常数。由(24) 式可知 C 能被归一化即(15) 式的非零解稳定的充分必要条件是 $\cos \eta_0 < 0$ 。由(22)、(23) 和(24) 式可得

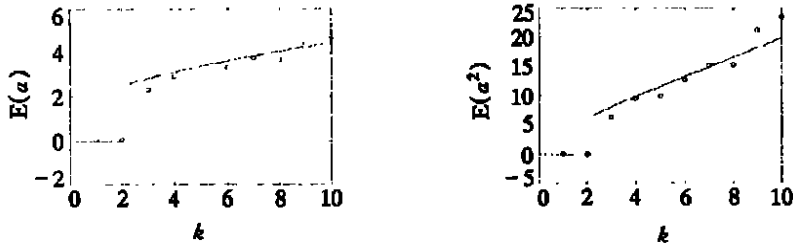
$$E[a] = E[a_0 + a_1] = a_0, \quad E[a^2] = a_0^2 + E[a_1^2] = a_0^2 + (48\alpha\beta\omega^2)^{-1} \gamma^2 \sqrt{k^2 - 4\omega^2\beta^2}. \quad (25)$$

3.3 数值模拟

随机过程 $\xi(t)$ 的模拟方法如 2.3 节, 取

$$N = 1000, \varepsilon = 0.1, \beta = 0.5, \omega = 1.0, \alpha_1 = 0.07, \alpha_2 = 0.09, h = 1.0, \gamma = 0.1, \Omega_0 = 10$$

当 $h = 1.0, \Omega_0 = 10.0, \sigma = 1.0$ 时, $E[a], E[a^2]$ 的数值解和由 (25) 给出的理论解见图 8

(a) $E[a]$ (b) $E[a^2]$

—理论解, °°数值解

图 8 系统的稳态响应

4 参数主共振情形 III

设 $\Omega_0 = \Omega_1 \approx 2\omega$, 引入调谐参数 $\sigma, \Omega_0 = \Omega_1 = 2\omega + \varepsilon\sigma$, 令 (8) 式右端中的奇异项为零可得

$$2i\omega A' + i\beta\omega A + 3\alpha\omega^2 A^2 A + \frac{h}{2}A \exp(i\sigma T) + \frac{k}{2}A \exp(i\sigma T_1 + i\gamma W(T_1)) = 0, \quad (26)$$

作变换 (10) 可将 (26) 式化为

$$\begin{cases} a' = -\frac{\beta}{2}a - \frac{a}{4\omega}h \sin \eta - \frac{a}{4\omega}k \sin(\eta + \eta_w), \quad \eta = \sigma T_1 - 2\varphi, \\ a\eta' = \alpha a - 3\alpha\omega a^3 - \frac{a}{2\omega}h \cos \eta - \frac{a}{2\omega}k \cos(\eta + \gamma W). \end{cases} \quad (27)$$

4.1 零解及其稳定性

显然零解 $a = 0$ 是方程 (27) 的稳态解, 忽略非线性项可得方程 (27) 的线性化方程为

$$\begin{cases} a' = -\frac{\beta}{2}a - \frac{a}{4\omega}h \sin \eta - \frac{a}{4\omega}k \sin(\eta + \gamma w), \\ \eta' = \sigma - \frac{h}{2\omega} \cos \eta - \frac{k}{2\omega} \cos(\eta + \gamma W). \end{cases} \quad (28)$$

令 $v = \ln a$, 方程 (28) 可写为如下 Ito 方程的形式

$$\begin{cases} dv = \left[-\frac{\beta}{2} - \frac{h}{4\omega} \sin \eta - \frac{k}{4\omega} \sin(\eta + \theta) \right] dT_1, \\ d\eta = \left[\sigma - \frac{h}{2\omega} \cos \eta - \frac{k}{2\omega} \cos(\eta + \theta) \right] dT_1, \quad d\theta = \gamma dW, \end{cases} \quad (29)$$

式中 $\theta = \gamma W(T_1)$. 由方程 (29) 很难求出方程 (28) 零解的最大 Liapunov 指数 λ 的解析表达式, 可用数值方法求解. 随机过程 $\eta(T_1), \theta(T_1)$ 可用如下的差分格式进行数值模拟

$$\begin{cases} \eta_{n+1} = \eta_n + \Delta T_1 \left[\sigma - \frac{h}{2\omega} \cos \eta_n - \frac{k}{2\omega} \cos(\eta_n + \theta_n) \right], \\ \theta_{n+1} = \theta_n + \gamma \sqrt{\Delta T_1} r_n, \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots), \end{cases} \quad (30)$$

式中 ΔT_1 是时间步长, r_n 是相互独立、服从标准正态分布的随机数序列. 则 λ 为

$$\lambda = -\frac{\beta}{2} - \frac{1}{4\omega} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [h \sin \eta_n + k \sin(\eta_n + \theta_n)] \quad (31)$$

当 $\beta = 0.0, \sigma = 1.0, \gamma = 0.1, h = 2.0, \Delta T_1 = 0.01$, λ 关于 k, σ 变化的曲面图见图 9

4.2 非零稳态响应

对于非零的稳态解 $a \neq 0$, 由(27) 可得

$$\begin{cases} a' = -\frac{\beta}{2}a - \frac{a}{4\omega}h \sin \eta - \frac{a}{4\omega}k \sin(\eta + \gamma W), \\ \eta' = \sigma - 3\alpha\omega a^2 - \frac{h}{2\omega} \cos \eta - \frac{k}{2\omega} \cos(\eta + \gamma W), \end{cases} \quad (32)$$

此方程可用摄动法进行求解。记

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= \sqrt{h^2 + k^2 + 2hk \cos \gamma W}, & \eta &= \arctan \frac{k \sin \gamma W}{h + k \cos \gamma W} \\ \phi &= \eta + \eta \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

忽略小项 η' 可将(32) 式改写为

$$\begin{cases} a' = -\frac{\beta}{2}a - \frac{a}{4\omega}\zeta \sin \phi, \\ \phi' = \sigma - 3\alpha\omega a^2 - \frac{\zeta}{2\omega} \cos \phi \end{cases} \quad (34)$$

将(33) 定义的随机过程 $\zeta(T_1)$ 写为 $\zeta(T_1) = E[\zeta(T_1)] + \Delta\zeta$, 式中 $\Delta\zeta$ 为小的随机扰动。可以证明在平衡状态, 即当 $T_1 \rightarrow \infty$ 时有

$$\begin{cases} E[\zeta(T_1)] = \frac{2}{\pi}(h+k)E(4hk(h+k)^{-2}), \\ E[\zeta^2(T_1)] = h^2 + k^2, \end{cases} \quad (35)$$

式中 $E(x)$ 为第二类椭圆函数。先假设 $\Delta\zeta = 0$, 类似 2.1 节的讨论可得系统(27) 的稳态解为

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \left[\frac{\sigma}{3\alpha} \pm \frac{1}{6\alpha\omega} \sqrt{(E[\zeta])^2 - 4\omega^2\beta^2} \right]^{1/2}, \quad \sin \phi_0 = -\frac{2\omega\beta}{E[\zeta]}, \quad (36)$$

式中 $E[\zeta]$ 由(35) 式定义。当 $\Delta\zeta \neq 0$ 时, 令 $a = a_0 + a_1, \phi = \phi_0 + \phi_1$, 式中 a_1, ϕ_1 为小项, 将此式代入(34) 式并忽略非线性可得线性化方程

$$\begin{cases} a_1' = -\frac{a_0}{4\omega}E[\zeta] \cos \phi_0 \phi_1 - \frac{a_0}{4\omega} \sin \phi_0 \Delta\zeta, \\ \phi_1' = -6\alpha\omega a_0 a_1 + \frac{E[\zeta]}{2\omega} \sin \phi_0 \phi_1 - \frac{1}{2\omega} \cos \phi_0 \Delta\zeta, \end{cases} \quad (37)$$

可以用矩方法^[1] 从方程(37) 求出一、二阶矩 $E[a_1], E[a_1^2]$ 。经计算可得

$$E[a_1] = 0, \quad E[a_1^2] = (12\alpha\omega^2 a_0 \cos \phi_0)^{-2} E[(\Delta\zeta)^2], \quad (38)$$

从而可得系统响应的一、二阶矩分别为

$$E[a] = a_0 + E[a_1] = a_0, \quad E[a^2] = E[(a_0 + a_1)^2] = a_0^2 + E[a_1^2]. \quad (39)$$

4.3 数值模拟

随机过程 $\xi(t)$ 的模拟方法如 2.3 节, 取

$$N = 1000, \quad \varepsilon = 0.1, \quad \beta = 0.5, \quad \omega = 1.0, \quad \alpha_1 = 0.07, \quad \alpha_2 = 0.09, \quad \gamma = 0.1,$$

当 $h = 3.0, \sigma = 1.0$ 时, $E[a], E[a^2]$ 的数值结果和由(39) 式得到的理论解见图 10

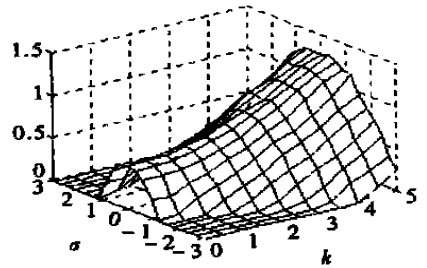
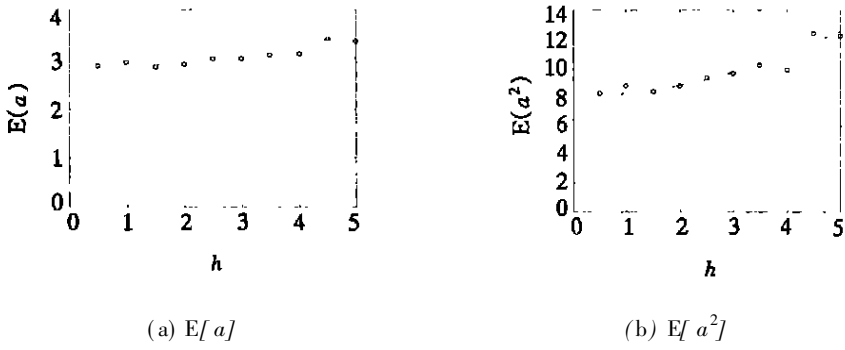


图 9 Liapunov 指数曲面图



—理论解, °°°数值解
图 10 系统的稳态响应

进一步计算表明, 在一定的条件下随着随机激励强度 k 的增加, 系统响应可从周期解变为拟周期解和随机的响应。对应的相轨可从极限环变为扩散的极限环, 且极限环的扩散程度随着 k 的增大而增大。由于本节讨论的情形包含了确定性和随机激励两种情形, 故在第 2 节和第 3 节中讨论的分叉、跳跃等现象在这里也存在, 数值模拟也证实了这一点。

5 参数主共振情形 IV

设 $\Omega_0 \approx 2\omega, \Omega_1 \approx 2\omega, \Omega_2 \neq \Omega_1$, 引入调谐参数 $\sigma, \kappa, \Omega_0 = 2\omega + \varepsilon\sigma, \Omega_1 = \Omega_0 + \varepsilon\kappa = 2\omega + \varepsilon(\sigma + \kappa)$, 令(8)式右端中的奇异项为零可得

$$2i\alpha A' + i\beta\omega A + 3\alpha\omega^2 A^2 A + \frac{h}{2}A \exp(i\sigma T) + \frac{k}{2}A \exp(i(\sigma + \kappa)T_1 + i\gamma W(T_1)) = 0, \quad (40)$$

作变换(10)可将(40)式化为

$$\begin{cases} a' = -\frac{\beta}{2}a - \frac{a}{4\omega}h \sin \varphi - \frac{a}{4\omega}k \sin(\varphi + \kappa T_1 + \gamma W), & \varphi = \sigma T_1 - 2\varphi, \\ a\varphi' = \alpha a - 3\alpha\omega a^3 - \frac{a}{2\omega}h \cos \varphi - \frac{a}{2\omega}k \cos(\varphi + \kappa T_1 + \gamma W). \end{cases} \quad (41)$$

5.1 零解及其稳定性

显然零解 $a = 0$ 是方程(41)的稳态解, 下面讨论它的稳定性。类似 4.1 的讨论对应于零解的最大 Liapunov 指数 λ 的数值算法为

$$\lambda = -\frac{\beta}{2} - \frac{1}{4\omega} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [h \sin \varphi_n + k \sin(\varphi_n + \theta_n)],$$

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \Delta T_1 \left[\sigma - \frac{h}{2\omega} \cos \varphi_n - \frac{k}{2\omega} \cos(\varphi_n + \theta_n) \right],$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \kappa \Delta T_1 + \gamma \sqrt{\Delta T_1} r_n \quad (n = 0, 1, 2, 3,$$

...),

当 $\beta = 0.0, h = 2.0, \Delta T_1 = 0.01, \kappa = 1.0, \lambda$ 关于 $k, \sigma (0 \leq k \leq 5, -3 \leq \sigma \leq 3)$ 变化的曲面图见图 11。

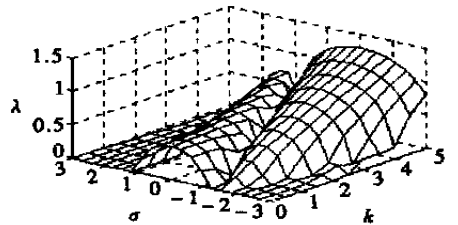


图 11 Liapunov 指数曲面图

由图 11 可见, λ 参数曲面由两个主峰和平面 $\lambda = 0$ 组成, 与图 6 不同。对应于开口的主峰, 当 $\sigma = 0$ 即 Ω_0 接近 ω 的两倍时 λ 变大。对应于不开口的主峰, 当 $\sigma = -1$ 即随机参数激

励的频率 Ω_1 接近系统的固有频率 ω 的两倍时 λ 变大, 系统变得不稳定。

5.2 非零稳态响应

当 $v = 0$ 时, 对于非零的稳态解 $a \neq 0$, 由(41) 可得

$$\begin{cases} a' = -\frac{\beta}{2}a - \frac{a}{4\omega}h\sin\eta - \frac{a}{4\omega}k\sin(\eta + \kappa T_1), \\ \eta' = \sigma - 3\alpha\omega a^2 - \frac{h}{2\omega}\cos\eta - \frac{k}{2\omega}\cos(\eta + \kappa T_1). \end{cases} \quad (42)$$

容易知道(42) 式没有非零的定常解。系统(42) 是一个具有周期系数的非自治系统, 具有比较复杂的动力学行为。事实上, 系统(42) 可看作如下受周期扰动的平面 Hamilton 系统

$$\dot{v} = \frac{\partial H(v, \eta)}{\partial \eta} - \beta v - \frac{k}{2\omega}v\sin(\eta + \kappa T_1), \quad \dot{\eta} = -\frac{\partial H(v, \eta)}{\partial v} - \frac{k}{2\omega}\cos(\eta + \kappa T_1), \quad (43)$$

式中 $v = a^2$, $H(v, \eta)$ 是 Hamilton 函数 $H(v, \eta) = (h/2\omega)v\cos\eta - \sigma v + (3/2)\alpha\omega^2 v^2$ 。当阻尼系数 β 和随机激励强度 k 都为小参数时, 系统(43) 即为一受周期小扰动的平面 Hamilton 系统, 对此类系统的研究已有较成熟的理论^[13], 当 β, k 充分小时用平均法可证明系统(43) 有唯一的双曲型周期解(数值计算验证了这一结论), 可用 Melnikov 方法^[14] 讨论系统(43) 的 Smale 马蹄即混沌现象以及其他的动力学行为。

当 $v \neq 0$ 时很难对(41) 进行理论分析, 可以用数值方法对系统(1) 进行研究, 数值计算表明此时系统的行为很复杂, 分叉和跳跃现象仍存在。对一些特殊情形可用近似方法进行讨论, 如当 v, κ 都为小参数时 4.2 中的方法仍然适用。

[参 考 文 献]

- [1] 朱位秋. 随机振动[M]. 北京: 科学出版社, 1992.
- [2] Stratonovitch R L, Romanovskii Y M. Parametric effect of a random force on linear and nonlinear oscillatory systems[A]. In: P T Kuznetsov, R L Stratonovitch, V I Tikhonov, Eds. Nonlinear Translations of Stochastic Process[C]. Oxford: Pergamon, 1996.
- [3] Dimentberg M F, Isikov N E, Model R. Vibration of a system with cubic non linear damping and simultaneous periodic and random parametric excitation[J]. Mechanics of Solids, 1981, 16(1): 19—21.
- [4] Namachchivaya N S. Almost sure stability of dynamical systems under combined harmonic and stochastic excitations[J]. Journal of Sound and Vibration, 1991, 151(1): 77—91.
- [5] Ariaratnam S T, Tam D S F. Parametric random excitation of a damped Mathieu oscillator[J]. ZAn gew Math Mech, 1976, 56(3): 449—452.
- [6] Dimentberg M F. Statistical Dynamics of Nonlinear and Time Varying Systems [M]. New York: Wiley, 1988.
- [7] RONG Hai_wu, XU Wei, FANG Tong. Principal response of Duffing oscillator to combined deterministic and narrow band random parametric excitation[J]. Journal of Sound and Vibration, 1998, 210(4): 483—515.
- [8] Wedig W V. Invariant measures and Lipunov exponents for generalized parameter fluctuations[J]. Structural Safety, 1990, 8(1): 13—25.
- [9] Nayfeh A H. Introduction to Perturbation Techniques [M]. New York: Wiley, 1981.
- [10] Rajan S, Davies H G. Multiple time scaling of the response of a Duffing oscillator to narrow band excitations[J]. Journal of Sound and Vibration, 1988, 123(3): 497—506.
- [11] Nayfeh A H, Serhan S J. Response statistics of nonlinear systems to combined deterministic and

- random excitations[J]. International Journal of Nonlinear Mechanics, 1990, 25(5): 493—509.
- [12] Oseledec V I. A multiplicative ergodic theorem, Liapunov characteristic numbers for dynamical systems[J]. Transaction of the Moscow Mathematical Society, 1968, 19(2): 197—231.
- [13] Wiggins S. Global Bifurcations and Chaos_Analysis Methods [M]. New York: Springer_Verlag, 1990.

Principal Response of Van der Pol_Duffing Oscillator Under Combined Deterministic and Random Parametric Excitation

RONG Hai_wu^{1, 2}, XU Wei³, WANG Xiang_dang¹, MENG Guang², FANG TONG³

(1. Foshan Institute of Science and Technology, Foshan, Guangdong 528000, P R China;

2. State Key Laboratory of Vibration, Shock and Noise, Shanghai Jiaotong
University, Shanghai 200030, P R China;

3. Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University,
Xi'an 710072, P R China)

Abstract: The principal resonance of Van der Pol_Duffing oscillator to combined deterministic and random parametric excitations is investigated. The method of multiple scales was used to determine the equations of modulation of amplitude and phase. The behavior, stability and bifurcation of steady state response were studied. Jumps were shown to occur under some conditions. The effects of damping, detuning, bandwidth, and magnitudes of deterministic and random excitations are analyzed. The theoretical analysis were verified by numerical results.

Key words: principal resonance; Van der Pol_Duffing oscillator; multiple scale method; largest Liapunov exponent; steady state probability density function