应用数学和力学, 第 23 卷 第 3 期(2002 年 3 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2002) 03_0283_09

时滞微分方程依照两种测度的稳定性*

寇春海, 张书年

(上海交通大学 应用数学系, 上海 200240)

(刘曾荣推荐)

摘要: 运用变异 Liapunov 方法, 讨论了时滞微分方程依照两种测度的稳定性. 借助于中间测度 $h^*(t, x)$, 在未扰动系统为常微分方程的情形下, 得到了关于时滞微分方程非一致和一致稳定性的判定定理.

关 键 词: 时滞微分方程; 变异 Liapunov 方法; 稳定性; 两种测度
中图分类号: O175.13 文献标识码: A

引 言

众所周知, 在对非线性微分方程进行研究时, 若其未扰动项是线性的, 或者虽为非线性但具有一定的光滑性, 那么, 参数变易法是一种有效的工具. 另一方面, Liapunov 第二方法在非线性系统研究中的重要性已被充分显示和证明, 它对当代微分方程稳定性理论的建立和发展起到了决定性的作用[1]. 由于它们在研究非线性问题时卓有成效, 自然会使人们想到将其有机结合, 从而进一步发挥两者的作用. 这一工作已经起步, 将两者相结合而建立的变异 Liapunov 方法, 在对非线性微分系统的稳定性研究中已取得部分成果[2], 但关于泛函微分方程的稳定性研究其应用还不多见[3].

本文利用这一方法, 对时滞微分方程依照两种测度的稳定性进行讨论. 通过引入中间测度 $h^*(t, x)$, 在未扰动系统为常微分方程的情形下, 建立了一些稳定性判定准则.

1 定义与记号

考虑时滞微分系统

$$x' = f(t, x_t), \quad x_{t_0} = \phi_0, \tag{1}$$

和常微分系统

$$y' = g(t, y), \quad y(t_0) = x_0, \tag{2}$$

其中 $f \in C[\mathbf{R}_+ \times C, \mathbf{R}^n]$, $g \in C[\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n]$, $C = C([-\tau, 0], \mathbf{R}^n)$, $\tau \geqslant 0$ 为常数; 对每个 $x \in C([t_0 - \tau, t_0 + \alpha], \mathbf{R}^n)$, 其中 $\alpha \geqslant 0$, 当 $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$ 时, $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ $(-\tau \leqslant \theta$

---

* 收稿日期: 2000_09_25; 修订日期: 2001_11_20
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19831030)
作者简介: 寇春海(1963—), 男, 山西人, 教授, 博士(E_mail: Kouchunhai@263.net);
张书年(1940—2001), 男, 上海人, 教授, 博导.

$\leqslant 0)$, $\phi_0 \in C$, $\phi_0(0) = x_0$•

我们记(1)的过(t_0, ϕ_0)的解为$x(t) = x(t, t_0, \phi_0)$, (2)的过(t_0, x_0)的解记为$y(t) = y(t, t_0, x_0)$•

假定f, g具有一定的光滑性以保证(1)和(2)的解在$t \geqslant t_0$时的存在唯一性, 并假定(2)的解$y(t, t_0, x_0)$关于x_0满足局部Lipschitz条件, 且连续依赖于初始时刻和初始值•

定义 1.1 设$V \in C[\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}_+]$, 定义

$$D^+ V(s, y(t, s, x)) = \overline{\lim_{h \to 0^+}} \frac{1}{h}[V(s + h, y(t, s + h, x + hf(s, x_s))) - V(s, y(t, s, x))], \tag{3}$$

其中$y(t, s, x)$是(2)的满足$y(s, s, x) = x$的任意解$(t_0 \leqslant s < t)$•

若$g(t, y) = 0$, 则$y(t, s, x) \equiv x$, 于是$y(t, s + h, x + hf(s, x_s)) = x + hf(s, x_s)$, 这样, 定义(3)便转化为

$$D^+ V(s, x) = \overline{\lim_{h \to 0^+}} \frac{1}{h}[V(s + h, x + hf(s, x_s)) - V(s, x)],$$

若$V(s, x)$关于x满足局部Lipschitz条件, 它恰为V沿着(1)的解的广义右上导数的通常定义•

记: $K = \left\{u \in C[\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+]: u(0) = 0, u \text{ 严格单增}\right\}$,

$CK = \left\{u \in C[\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+]: \forall t \in \mathbf{R}_+, u(t, \cdot) \in K\right\}$,

$\Gamma = \left\{h \in C[\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}_+]: \forall t \in \mathbf{R}_+, \inf_x h(t, x) = 0\right\}$•

定义 1.2 设$h_0 \in \Gamma$, $\phi \in C$, 定义

$$h_0(t, \phi) = \max_{-\tau \leqslant s \leqslant 0} h_0(t + s, \phi(s))• \tag{4}$$

定义 1.3 设$h_0, h \in \Gamma$, 我们称h_0比h更细, 假如存在$\delta > 0$及函数$w \in CK$, 使得当$h_0(t, x) < \delta$时, $h(t, x) \leqslant w(t, h_0(t, x))$• 若$w \in K$, 则称$h_0$一致细于$h$•

定义 1.4 设$V \in C[\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}_+]$, $h_0, h \in \Gamma$, 我们称$V(t, x)$是:

i) h正定的, 若存在$\rho > 0$及函数$b \in K$, 使得当$h(t, x) < \rho$时, $b(h(t, x)) \leqslant V(t, x)$;

ii) h_0弱渐少的, 若存在$\delta > 0$及函数$a \in CK$, 使得当$h_0(t, x) < \delta$时,
$V(t, x) \leqslant a(t, h_0(t, x))$;

iii) h_0渐少的, 若存在$\delta > 0$及函数$a \in K$, 使得当$h_0(t, x) < \delta$时,
$V(t, x) \leqslant a(h_0(t, x))$•

定义 1.5[4] 设$\lambda \in C[\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+]$, 那么我们称$\lambda$是积分正的, 若当$I = \bigcup_{i=1}^{\infty}[\alpha_i, \beta_i]$, 对$i = 1, 2, \cdots$, $\alpha_i < \beta_i < \alpha_{i+1}$且$\beta_i - \alpha_i \geqslant \delta > 0$时, $\int_I \lambda(s)\mathrm{d}s = \infty$•

定义 1.5* 设$\lambda \in C[R_+, R_+]$, 称λ为一致积分正的, 若当$I_k = \bigcup_{j=1}^{k}[\alpha_i, \beta_i]$, $(k = 1, 2, \cdots)$, $\alpha_i < \beta_i < \alpha_{i+1}$, $\beta_i - \alpha_i \geqslant \delta > 0$时, 对任给$M > 0$, 存在$K = K(\delta, M)$, 使当$k > K$时,
$\int_{I_k} \lambda(s)\mathrm{d}s \geqslant M$•

定义 1.6 系统(1)称为(h_0, h)稳定的, 若对任给$\varepsilon > 0$, $t_0 \in \mathbf{R}_+$, 存在$\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$, 使当$h_0(t_0, \phi_0) < \delta$时, $h(t, x(t)) < \varepsilon$, $t \geqslant t_0$, 其中$x(t) = x(t, t_0, \phi_0)$是(1)过点(t_0, ϕ_0)的

任意解•

定义 1.7　系统(2)称为 (h_0, h^*) 稳定的, 若对任给 $\varepsilon > 0$, $t_0 \in R_+$, 存在 $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$, 使得当 $h_0(t_0, x_0) < \delta$ 时, $h^*(t, y(t)) < \varepsilon$, $t \geqslant t_0$, 其中 $y(t) = y(t, t_0, x_0)$ 是(2)过点 (t_0, x_0) 的任意解•

以定义 1.6 和 1.7 为基础, 运用通常的稳定性概念, 不难给出其它依照两种测度的稳定性的定义, 这里不再赘述• 通过适当选择 h_0, h^*, h, 可以把在文献中所见到的多种稳定性概念, 统一于依照两种测度的稳定性, 如: 平凡解的稳定性, 部分稳定性及不变集的稳定性等(参见[5])•

设 $\rho > 0$, $h \in \Gamma$, 定义 $S(h, \rho) = \left\{(t, x) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^n : h(t, x) < \rho\right\}$•

定义 1.8　系统(2)称为 (h_0, h) 严格稳定的, 若对任给 $\varepsilon_1 > 0$, $t_0 \in \mathbf{R}_+$, 存在 $\delta_1 = \delta_1(t_0, \varepsilon_1) > 0$, 使当 $h_0(t_0, x_0) < \delta_1$ 时, $h(t, y(t, t_0, x_0)) < \varepsilon$, $t \geqslant t_0$, 同时, 对任给 $\delta_2 < \delta_1$, 存在 $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(t_0, \delta_2) < \delta_2$, 使得当 $h_0(t_0, x_0) \geqslant \delta_2$ 时, $h(t, y(t, t_0, x_0)) \geqslant \varepsilon_2$, $t \geqslant t_0$, 其中 $y(t, t_0, x_0)$ 是(2)过点 (t_0, x_0) 的任意解• 若其中的 δ_1 和 ε_2 均与 t_0 无关, 则称(2)是 (h_0, h) 一致严格稳定的•

2　主 要 结 果

定理 2.1　假定 $h_0, h^*, h \in \Gamma$, $V \in C[\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}_+]$, h_0 由(4)定义, 设

1) h^* 比 h 更细, $h^*(t, x)$ 关于 t 是非减的;

2) $V(t, x)$ 关于 x 满足局部 Lipschitz 条件, $V(t, x)$ 是 h 正定的, h^* 弱渐少的;

3) 对某个 $\rho > 0$, $t > t_0$, 若当 $s \in [t_0, t)$ 时, $h(t, x(t)) > h(s, x(s))$, 则

$$D^+ V(s, y(t, s, x(x))) \leqslant 0, \quad (s, x) \in S(h, \rho), \quad s \in [t_0, t);$$

那么, 由(2)的 (h_0, h^*) 稳定性可以推出(1)的 (h_0, h) 稳定性•

证明　由于 $V(t, x)$ 是 h 正定的, 故存在 $\rho_0 \in (0, \rho)$ 和 $b \in K$, 使得

$$b(h(t, x)) \leqslant V(t, x) \qquad ((t, x) \in S(h, \rho_0)); \tag{5}$$

又由 $V(t, x)$ 是 h^* 弱渐少的知, 存在 $\delta_0 > 0$, $a \in CK$, 使得

$$V(t, x) \leqslant a(t, h^*(t, x)) \qquad ((t, x) \in S(h^*, \delta_0)); \tag{6}$$

此外, 由于 h^* 比 h 更细, 故存在 $\delta_1 > 0$, $w \in CK$, 使得

$$h(t, x) \leqslant w(t, h^*(t, x)) \qquad ((t, x) \in S(h^*, \delta_1)); \tag{7}$$

令 $t = t_0$, 由 $w \in CK$ 不难知道, 可取 δ_1 充分小, 使得 $w(t_0, \delta_1) < \rho_0$•

设 $\varepsilon \in (0, \rho_0)$, $t_0 \in \mathbf{R}_+$, 由(6)知, 可取 $\eta = \eta(t_0, \varepsilon) < \min\left\{\delta_0, \delta_1\right\}$, 使得

$$V(t_0, x) \leqslant a(t_0, h^*(t_0, x)) < b(\varepsilon) \qquad ((t_0, x) \in S(h^*, \eta))• \tag{8}$$

假定(2)的 (h_0, h^*) 稳定性, 那么对此 η, 必存在 $\delta = \delta(t_0, \eta) > 0$ (设 $\delta < \eta$), 使得当 $h_0(t_0, x_0) < \delta$ 时, $h^*(t, y(t, t_0, x_0)) < \eta$, $t \geqslant t_0$, 其中 $y(t, t_0, x_0)$ 是(2)的任意解•

现设 $x(t) = x(t, t_0, \phi_0)$ 是(1)的满足 $h_0(t_0, \phi_0) < \delta$ 的任意解, 则由(4)可知, $h_0(t_0, x_0) \leqslant h_0(t_0, \phi_0) < \delta$, 于是根据(5) ~ (8)可得

$$b(h(t_0, x_0)) \leqslant V(t_0, x_0) \leqslant a(t_0, h^*(t_0, x_0)) < b(\varepsilon),$$

故有 $h(t_0, x_0) < \varepsilon$• 我们断言: 当 $t \geqslant t_0$ 时, 恒有 $h(t, x(t)) < \varepsilon$• 若不然, 则存在 $t_1 > t_0$, 使得

$$h(t_1,x(t_1)) = \varepsilon, \quad (h(t,x(t)) < \varepsilon \quad (t \in [t_0,t_1)), \tag{9}$$

这样当 $s \in [t_0, t_1)$ 时, $h(t_1,x(t_1)) > h(s,x(s))$• 定义 $m(s) = V(s,y(t,s,x(s)))$, $s \in [t_0, t_1]$, 其中 $y(t,s,x(s))$ 是(2) 的任意解• 据条件3) 知: 当 $t_0 \leqslant s < t \leqslant t_1$ 时, $D^+ m(s) \leqslant 0$• 因而 $m(s) \leqslant m(t_0)$, $t_0 \leqslant s \leqslant t < t_1$• 令 $s \to t^-$, 可得 $m(t) \leqslant m(t_0)$• 因此当 $t = t_1$ 时得

$$V(t_1,x(t_1)) = V(t_1,y(t_1,t_1,x(t_1))) \leqslant V(t_0,y(t_1,t_0,x_0)) \leqslant a(t_0,h^*(t_0,y(t_1,t_0,x_0))) < b(\varepsilon);$$

另一方面, 由(5) 和(9) 得, $V(t_1,x(t_1)) \geqslant b(h(t_1,x(t_1))) = b(\varepsilon)$; 产生矛盾, 因此, $h(t,x(t)) < \varepsilon$, $t \geqslant t_0$• 即证明了(1) 的(h_0,h) 稳定性•

定理 2.2 若在定理 2.1 中, 将 3) 改为

3)* 对某个 $\rho > 0$, 当 $s \in [t_0,t)$, $(s,x) \in S(h,\rho)$ 时, $D^+ V(s,y(t,s,x)) \leqslant 0$;

则由(2) 的 (h_0,h^*) 渐近稳定性, 可以推出(1) 的(h_0,h) 渐近稳定性•

证明 由定理 2.1 可得(1) 的 (h_0,h) 稳定性; 于是对 $t_0 \in \mathbf{R}_+$, $\rho_0 \in (0,\rho)$, 必存在 $\delta_0^* = \delta(t_0,\rho_0) > 0$, 使得当 $h_0(t_0,\phi_0) < \delta_0^*$ 时, $h(t,x(t)) < \rho_0$, $t \geqslant t_0$, 其中 $x(t) = x(t,t_0,\phi_0)$ 是(1) 的任意解• 另一方面, 假设(2) 是(h_0,h^*) 渐近稳定的, 则对 $t_0 \in \mathbf{R}_+$, 存在 $\delta^* = \delta^*(t_0) > 0$•

使得当 $h_0(t_0,x_0) < \delta^*$ 时有 $\lim\limits_{t\to\infty} h^*(t,y(t,t_0,x_0)) = 0$, 我们不妨设上述所取的 $\delta_0^* < \delta^*$• 由3)* 可得: $D^+ V(s,y(t,s,x(s))) \leqslant 0$, $s \in [t_0,t)$; 与定理 2.1 证明中一样可推得: $0 \leqslant V(t,x(t)) \leqslant V(t_0,y(t,t_0,x_0))$, $t \geqslant t_0$, 这里 $x_0 = \phi_0(0)$• 于是注意到: $V(t_0,y(t,t_0,x_0)) \leqslant a(t_0,h^*(t_0,y(t,t_0,x_0))) \leqslant a(t_0,h^*(t,y(t,t_0,x_0)))$, 可以推知 $\lim\limits_{t\to\infty} V(t,x(t)) = 0$, 再由 V 的 h 正定性可得 $\lim\limits_{t\to\infty} h(t,x(t)) = 0$, 这说明(1) 是$(h_0,h)$ 渐近稳定的•

定理 2.3 若在定理 2.1 中, 将条件 1) 改为“h^* 一致细于 h”, 将 2) 中的“$V(t,x)$ 是 h^* 弱渐少的”改为“$V(t,x)$ 是 h^* 渐少的”, 则由(2) 的(h_0,h^*) 一致稳定性可以推得(1) 的(h_0,h) 一致稳定性• 在此基础上, 若将 3) 转为 3)*, 则由(2) 的(h_0,h^*) 一致渐近稳定性可以推得(1) 的(h_0,h) 一致渐近稳定性•

证明 由 $V(t,x)$ 关于 h^* 的渐少性, 必存在 $\sigma > 0$, $a \in K$, 使得当 $h^*(t,x) < \sigma$ 时,

$$V(t,x) \leqslant a(h^*(t,x))• \tag{10}$$

我们可选择 $\eta > 0$, 使得 $a(\eta) < b(\varepsilon)$, 且 $\eta < \sigma$• ε 同定理 2.1 证明中一样•

由 h^* 一致细于 h, 存在 $\delta_1 > 0$, $\phi \in K$, 使得

$$h(t,x) \leqslant \phi(h^*(t,x)), (t,x) \in S(h^*,\delta_1), \tag{11}$$

可选取 δ_1, 使得 $\phi(\delta_1) < \rho_0 < \rho$•

假定(2) 的 (h_0,h^*) 一致稳定性, 则存在 $\delta = \delta(\eta)$, 使得对任意 $t_0 \in \mathbf{R}_+$, 当 $h_0(t_0,x_0) < \delta$ 时, $h^*(t,y(t,t_0,x_0)) < \eta$, 其中 $y(t,t_0,x_0)$ 是(2) 的任意解•

设 $x(t) = x(t,t_0,\phi_0)$ 是(1) 的满足 $h_0(t_0,\phi_0) < \delta$ 的任意解, 则与定理 2.3 中类似可以证明 $h(t,x(t)) < \varepsilon$, $t \geqslant t_0$, 且这里的 δ 与 t_0 无关, 从而可得(1) 的(h_0,h) 一致稳定性•

下面假定(2) 的 (h_0,h^*) 一致渐近稳定性, 则由上已知(1) 的(h_0,h) 一致稳定性, 只须证明其(h_0,h) 一致吸引性•

设 $\rho^* = \min\{\rho_0, \sigma\}$, 则存在 $\delta^* = \delta(\rho^*)$, 使得对 $t_0 \in \mathbf{R}^+$, 当 $h_0(t_0, \phi_0) > \delta$ 时,

$$h(t, x(t, t_0, \phi_0)) < \rho^*, \quad h^*(t, y(t, t_0, x_0)) < \rho^*,$$

其中 $x(t, t_0, \phi_0)$, $y(t, t_0, x_0)$ 分别是(1) 和(2) 的任意解, 且 $x_0 = \phi_0(0)$. 故由 3)* 和(10) 得:

$$\begin{aligned} V(t, x(t)) &= V(t, y(t, t, x(t))) \leqslant V(t_0, y(t, t_0, x_0)) \leqslant \\ &a(h^*(t_0, y(t, t_0, x_0))) \leqslant a(h^*(t, y(t, t_0, x_0))). \end{aligned} \tag{12}$$

由于(2) 是 (h_0, h^*) 一致渐近稳定的, 故任给 $\varepsilon \in (0, \rho^*)$, 必存在 $T = T(\varepsilon)$, 使得对任意 $t_0 \in \mathbf{R}_+$, 当 $t \geqslant t_0 + T(\varepsilon)$ 时, $h^*(t, y(t, t_0, x_0)) < a^{-1}(b(\varepsilon))$, 由(5) 和(12) 得, $b(h(t, x(t))) < b(\varepsilon)$, 于是可得: $h(t, x(t)) < \varepsilon$, $t \geqslant t_0 + T(\varepsilon)$; 从而证明了(1) 的$(h_0, h)$ 一致吸引性, 定理证毕.

定理 2.4　若对定理 2.1 中的 1) 和 2) 作与定理 2.3 相同的修改, 并设

3) 存在 $C \in K$, $\eta \in C[\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+]$, η 满足一致积分正条件, 使得对某个 $\rho_1 > 0$,

$$D^+ V(s, y(t, s, x)) \leqslant -\eta(s) C(h^*(t, y(t, s, x))), \ s \in [t_0, t), (s, x) \in S(h, \rho_1); \tag{13}$$

4) $h_0 \in C^1[\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}_+]$, 且 $|h_0'(t, x)| \leqslant M$, $(t, x) \in S(h, \rho_2)$, 其中 $M > 0$, $\rho_2 > 0$,

$$h_0'(t, x) = h_{0t}(t, x) + h_{0x}(t, x) f(t, x_t).$$

5) (2) 是 (h_0, h^*) 一致严格稳定的;

则(1) 是 (h_0, h) 一致渐近稳定的.

证明　在上述定理条件下, 由定理 2.3 可知(1) 是 (h_0, h) 一致稳定的, 故对 $\rho^* = \min\{\rho_0, \rho_1, \rho_2, \sigma\}$, 存在 $\delta_0 = \delta(\rho^*) > 0$, 使得当 $h_0(t_0, \phi_0) < \delta_0$ 时, $h(t, x(t, t_0, \phi_0)) < \rho^*$, 其中 $x(t) = x(t, t_0, \phi_0)$ 是(1) 的任意解, ρ_0, σ 保证(5) 和(10) 成立.

由于(2) 是 (h_0, h^*) 一致严格稳定的, 因此对上述 ρ^*, 存在 $\delta_1 = \delta_1(\rho^*) > 0$, 且对 $\delta^* \in (0, \min\{\delta_0, \delta_1\})$, 存在 $\gamma^* = \gamma(\delta^*) > 0$, 使得

$$\delta^* \leqslant h_0(t_0, x_0) < \delta_1 \Rightarrow \gamma^* \leqslant h^*(t, y(t, t_0, x_0)) < \rho^* \quad (t \geqslant t_0), \tag{14}$$

其中 $y(t, t_0, x_0)$ 是(2) 的任意解.

取 $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$, 任给 $\varepsilon \in (0, \rho^*)$, $t_0 \in \mathbf{R}_+$, 我们要证明存在 $T(\varepsilon) > 0$, 使得(1) 的满足 $h_0(t_0, \phi_0) < \delta$ 的任意解 $x(t) = x(t, t_0, x_0)$, 当 $t \geqslant t_0 + T(\varepsilon)$ 时, 满足 $h(t, x(t)) < \varepsilon$.

用反证法, 如若不然, 对某个 $\varepsilon \in (0, \rho^*)$, 设 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$($\delta < 2\min\{\delta_0, \delta_1\}$) 是由(1) 的$(h_0, h)$ 一致稳定性确定, 若有一个解 $x(t)$ 满足 $h_0(t_0, \phi_0) < \delta$, 但 $h_0(t, x_t) \geqslant \delta$, $t \geqslant t_0$, 那么, 在每一个长度为 τ 的区间上, 必有 t, 使得 $h_0(t, x(t)) \geqslant \delta$, 按照这一原则, 可以取得一个序列$\{t_k\}$, 使得

$$t_0 + (2k-1)\tau \leqslant t_k < t_0 + 2k\tau, \ h_0(t_k, x(t_k)) \geqslant \delta \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

由关于 h_0 的假设可知, 在 $t_k - \dfrac{\delta}{2M} \leqslant t \leqslant t_k + \dfrac{\delta}{2M}$ 上, 恒有 $h_0(t, x(t)) \geqslant \dfrac{\delta}{2}$. 显然我们可以通过适当地放大 M 而使得诸区间$\left[t_k - \dfrac{\delta}{2M}, t_k + \dfrac{\delta}{2M}\right]$ 互不相交, 这样在这些区间上, 即当 $s \in \left[t_k - \dfrac{\delta}{2M}, t_k + \dfrac{\delta}{2M}\right]$ 时, 存在相应的 $\gamma = \gamma(\delta)$, 使得 $h^*(t, y(t, s, x(s))) \geqslant \gamma$. 由条件(3) 可

得, 设 k 为使 $t_k+\dfrac{\delta}{2M}$ 不超过 t 的最大整数, 则

$$\begin{aligned}V(t,x(t))&\leqslant V(t_0,y(t,t_0,x_0))-\int_{t_0}^{t}\eta(s)C(h^*(t,y(t,s,x(s))))\mathrm{d}s\leqslant\\ &a(h^*(t_0,y(t,t_0,x_0)))-\sum_{i=1}^{k}\int_{t_i-\frac{\delta}{2M}}^{t_i+\frac{\delta}{2M}}\eta(s)C(h^*(t,y(t,s,x(s))))\mathrm{d}s\leqslant\\ &a(h^*(t,y(t,t_0,x_0)))-C(\gamma)\sum_{i=1}^{k}\int_{t_i-\frac{\delta}{2M}}^{t_i+\frac{\delta}{2M}}\eta(s)\mathrm{d}s\leqslant\\ &a(\rho^*)-C(\gamma)\sum_{i=1}^{k}\int_{t_i-\frac{\delta}{2M}}^{t_i+\frac{\delta}{2M}}\eta(s)\mathrm{d}s\cdot\end{aligned}\tag{15}$$

由于 $\eta(s)$ 满足一致积分正条件, 故存在 $\bar{k}=\bar{k}(\delta,\gamma)$, 使得 $\sum_{i=1}^{\bar{k}}\int_{t_i-\frac{\delta}{2M}}^{t_i+\frac{\delta}{2M}}\eta(s)\mathrm{d}s>\dfrac{a(\rho^*)}{C(\gamma)}$, 于是当 $k>\bar{k}$ 时, 便产生矛盾, 故取 $T=\bar{k}+1$, 则存在 $t\in(t_0,t_0+2T\tau)$, 使得 $h_0(t,x_t)<\delta$, 从而当 $t\geqslant t_0+2T\tau$ 时, $h(t,x(t))<\varepsilon$, 这个 T 与 t_0 无关, 这样便证得了 (h_0,h) 一致渐近稳定性·

定理 2.5 假定定理 2.1 的条件 1), 2) 成立, 并设

3) 存在 $C\in K$, $\eta\in C[\mathbf{R}_+,\mathbf{R}_+]$, 使得对某个 $\rho_1>0$,

$D^+V(s,y(t,s,x))\leqslant-\eta(s)C(h^*(t,y(t,s,x)))$, $s\in[t_0,t)$, $(s,x)\in S(h,\rho_1)$,

其中 η 满足积分正条件;

4) 对某个 $\rho_2>0$ 和任意 $\zeta<\rho_2$, $h\in C^1[S^c(h,\zeta)\cap S(h,\rho_2),\mathbf{R}_+]$, 且存在 $M(\zeta)>0$, 使得当 $(t,x)\in S^c(h,\zeta)\cap S(h,\rho_2)$ 时, $|h'(t,x)|\leqslant M(\zeta)$, 其中 $S^c(h,\zeta)$ 表示 $S(h,\zeta)$ 的补集, $h'(t,x)=h_t(t,x)+h_x(t,x)f(t,x_t)$;

5) (2) 是 (h_0,h^*) 一致严格稳定的;

6) h 一致细于 h_0;

则(1) 是 (h_0,h) 渐近稳定的·

证明 由(2) 的 (h_0,h^*) 一致严格稳定性, 取 $\rho=\min\{\delta_0,\rho_1,\rho_2\}$ (其中 $\delta_0>0$ 为(6) 中的数), 必存在 $\delta^*=\delta(\rho)>0$, 使得对任给 $t_0\in\mathbf{R}_+$, 当 $h_0(t_0,x_0)<\delta^*$ 时,

$$h^*(t,y(t,t_0,x_0))<\rho\qquad(t\geqslant t_0),\tag{16}$$

且对任给 $\alpha\in(0,\delta^*]$, 存在 $\gamma=\gamma(\alpha)>0$, 使得对任给 $t_0\in\mathbf{R}_+$, 当 $h_0(t_0,x_0)\geqslant\alpha$ 时,

$$h^*(t,y(t,t_0,x_0))\geqslant\gamma\qquad(t\geqslant t_0),\tag{17}$$

其中 $y(t,t_0,x_0)$ 是(2) 的任意解·

由定理 2.1 可知(1) 的 (h_0,h) 稳定性, 故对 $t_0\in\mathbf{R}_+$, $\delta^*=\delta(\rho)>0$(不妨设 $\delta^*<\rho$), 存在 $\delta_0=\delta(\delta^*)$, $\delta_0<\delta^*$, 使得当 $h_0(t_0,\phi_0)<\delta_0$ 时,

$$h(t,x(t,t_0,\phi_0))<\delta^*\qquad(t\geqslant t_0)\cdot\tag{18}$$

由于 h 一致细于 h_0, 故存在 $\delta>0(\delta<\delta^*)$, $\phi\in K$, 使当 $h_0(t,x)<\delta$ 时,

$$h(t,x)\leqslant\phi(h_0(t,x))\cdot$$

我们断言: 当 $h_0(t_0,\phi_0)<\delta_0(\delta_0<\delta)$ 时, $\lim\limits_{t\to\infty}h(t,x(t,t_0,\phi_0))=0$·

首先, 我们证明 $\varliminf\limits_{t\to\infty}h(t,x(t,t_0,\phi_0))=0$· 否则, 必存在 $\alpha<\delta_0$ 及 $T\geqslant t_0$, 使得当 $t\geqslant T$ 时,

$h(t,x(t))\geqslant\alpha$. 于是存在 $\beta\in(0,\min\{\varphi^{-1}(\alpha),\delta\})$, 使得当 $t\geqslant T$ 时, $h_0(t,x(t))\geqslant\beta$. 由 (17) 可知: 存在 $\lambda=\lambda(\beta)>0$, 使得 $h^*(t,y(t,s,x(s)))\geqslant\lambda$, $T\leqslant s\leqslant t$. 根据条件 3) 得:

$$
\begin{aligned}
V(t,x(t))&\leqslant V(T,y(t,T,x(T)))-\int_T^t\eta(s)C(h^*(t,y(t,s,x(s))))\mathrm{d}s\leqslant\\
&a(T,h^*(T,y(t,T,x(T))))-C(\lambda)\int_T^t\eta(s)\mathrm{d}s\leqslant\\
&a(T,h^*(t,y(t,T,x(T))))-C(\lambda)\int_T^t\eta(s)\mathrm{d}s\leqslant a(T,\rho)-C(\lambda)\int_T^t\eta(s)\mathrm{d}s,
\end{aligned}
$$

因而推得当 $t\to+\infty$ 时, $V(t,x(t))\to-\infty$, 产生矛盾.

以下来证 $\overline{\lim_{t\to\infty}}h(t,x(t,t_0,\phi_0))=0$. 若其不为零, 则存在 $\gamma\in(0,\min\{\delta_0/2,\delta/2\})$ 及序列 $t_0<a_1<b_1<a_2<b_2<\cdots<a_k<b_k<\cdots$, 当 $k\to+\infty$ 时, $a_k\to+\infty$, 使得

$$
h(a_k,x(a_k))=\gamma,\ h(b_k,x(b_k))=2\gamma,\ h(t,x(t))\geqslant\gamma,\quad t\in[a_k,b_k]. \tag{19}
$$

此时, 由条件 4) 和 (19) 得, $b_k-a_k\geqslant\dfrac{\gamma}{M(\gamma)}$, $(k=1,2,\cdots)$. 同时存在 $\beta\in(0,\min\{\varphi^{-1}(\gamma),\delta\})$, 当 $t\in[a_k,b_k]$ 时, $h_0(t,x(t))\geqslant\beta$. 这样由(2) 的$(h_0,h^*)$ 一致严格稳定性, 必存在 $\mu=\mu(\beta)>0$, 使得当 $s\in[a_k,b_k]$, $t\geqslant s$ 时, $h^*(t,y(t,s,x(s)))\geqslant\mu$, 由 3) 可知: 若 k 是使得 $b_k\leqslant t$ 的最大正整数, 则

$$
\begin{aligned}
V(t,x(t))&\leqslant V(t_0,y(t,t_0,x(t_0)))-\int_{t_0}^t\eta(s)C(h^*(t,y(t,s,x(s))))\mathrm{d}s\leqslant\\
&a(t_0,h^*(t_0,y(t,t_0,x(t_0))))-\sum_{j=1}^k\int_{a_j}^{b_j}\eta(s)C(h^*(t,y(t,s,x(s))))\mathrm{d}s\leqslant\\
&a(t_0,h^*(t,y(t,t_0,x(t_0))))-C(\mu)\sum_{j=1}^k\int_{a_j}^{b_j}\eta(s)\mathrm{d}s\leqslant\\
&a(t_0,\rho)-C(\mu)\sum_{j=1}^k\int_{a_j}^{b_j}\eta(s)\mathrm{d}s,
\end{aligned}
$$

令 $t\to\infty$, 则上式右端趋向于 $-\infty$, 因而产生矛盾. 综上所述可知, $\lim_{t\to\infty}h(t,x(t,t_0,\phi_0))=0$. 所以(1) 是$(h_0,h)$ 渐近稳定的.

最后, 我们用一个例子来说明本文定理的优越性, 并用它结束本文.

例 1 考虑系统

$$
\begin{cases}
x_1'(t)=x_1(t)\cos t\sin^2 t-x_1^3(t)\displaystyle\sum_{j=1}^3\int_{-\sigma_{1j}}^0k_{1j}(t,s)x_j^2(t+s)\mathrm{d}s,\\
x_2'(t)=x_2(t)\cos^2 t\sin t-x_2(t)\displaystyle\sum_{j=1}^3\int_{-\sigma_{2j}}^0k_{2j}(t,s)x_j^2(t+s)\mathrm{d}s,\\
x_3'(t)=x_3(t)\cos t\sin t-x_3^5(t)\displaystyle\sum_{j=1}^3\int_{-\sigma_{3j}}^0k_{3j}(t,s)x_j^2(t+s)\mathrm{d}s,\\
x_{1t_0}=\phi_1,\quad x_{2t_0}=\phi_2,\quad x_{3t_0}=\phi_3
\end{cases}
\tag{20}
$$

和系统

$$\begin{cases} y_1' = y_1\cos t\sin^2 t, \\ y_2' = y_2\sin t\cos^2 t, \\ y_3' = y_3\sin t\cos t, \\ y_1(t_0) = x_{10}, \quad y_2(t_0) = x_{20}, \quad y_3(t_0) = x_{30}, \end{cases} \tag{21}$$

其中: $0 \leqslant \sigma_{ij} \leqslant \tau$, $\tau > 0$, $k_{ij}(t, s) \geqslant 0$, $\phi \in C$ $(i, j = 1, 2, 3;\ t_0 \in \mathbf{R}_+,\ t \geqslant t_0)$,

$x_{10} = \phi_1(0)$, $x_{20} = \phi_2(0)$, $x_{30} = \phi_3(0)$•

容易求得(21) 的解为

$$\boldsymbol{y}(t, t_0, x_0) = \begin{pmatrix} y_1(t, t_0, x_{10}) \\ y_2(t, t_0, x_{20}) \\ y_3(t, t_0, x_{30}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{10}\exp\left\{\dfrac{1}{3}[\sin^3 t - \sin^3 t_0]\right\} \\ x_{20}\exp\left\{\dfrac{1}{3}[\cos^3 t_0 - \cos^3 t]\right\} \\ x_{30}\exp\left\{\dfrac{1}{2}[\sin^2 t - \sin^2 t_0]\right\} \end{pmatrix}•$$

在 $\mathbf{R}^3$ 中, 范数 $|x|_1 = \max\left\{|x_i| : i = 1, 2, 3\right\}$, $|x|_2 = \sum_{i=1}^{3}|x_i|$, $|x|_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ 是等价的• 在其中任取 h_0, h^* 和 h, 均有(21) 的(h_0, h^*) 一致稳定性• 令 $V(t, x) = \dfrac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$, 显然 $V(t, x)$ 为 h 正定的和 h^* 渐少的• 注意到

$$V'(s, y(t, s, x(s))) = \begin{bmatrix} x_1(s)\exp\left\{\dfrac{2}{3}[\sin^3 t - \sin^3 s]\right\} \\ x_2(s)\exp\left\{\dfrac{2}{3}[\cos^3 s - \cos^3 t]\right\} \\ x_3(s)\exp\left\{\sin^2 t - \sin^2 s]\right\} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \times$$

$$\begin{pmatrix} -x_1^3(s)\sum_{j=1}^{3}\int_{-\sigma_{ij}}^{0} k_{1j}(s, \upsilon)x_j^2(s+\upsilon)\,\mathrm{d}\upsilon \\ -x_2(s)\sum_{j=1}^{3}\int_{-\sigma_{2j}}^{0} k_{2j}(s, \upsilon)x_j^2(s+\upsilon)\,\mathrm{d}\upsilon \\ -x_3^5(s)\sum_{j=1}^{3}\int_{-\sigma_{3j}}^{0} k_{3j}(s, \upsilon)x_j^2(s+\upsilon)\,\mathrm{d}v \end{pmatrix} =$$

$$-\exp\left\{\frac{2}{3}[\sin^3 t - \sin^3 s]\right\}x_1^4(s)\sum_{j=1}^{3}\int_{-\sigma_{1j}}^{0} k_{1j}(s, \upsilon)x_j(s+\upsilon)\,\mathrm{d}\upsilon -$$

$$\exp\left\{\frac{2}{3}[\cos^3 s - \cos^3 t]\right\}x_2^2(s)\sum_{j=1}^{3}\int_{-\sigma_{2j}}^{0} k_{2j}(s, \upsilon)x_j(s+\upsilon)\,\mathrm{d}\upsilon -$$

$$\exp\left\{\sin^2 t - \sin^2 s\right\}x_3^6(s)\sum_{j=1}^{3}\int_{-\sigma_{3j}}^{0} k_{3j}(s, \upsilon)x_j(s+\upsilon)\,\mathrm{d}\upsilon \leqslant 0,$$

故由定理 2.3 可知(20) 是 (h_0, h) 一致稳定的•

[参 考 文 献]

[1] Hale J. Theory of Differential Equations [M]. New York: Springer_Verlag, 1977.

[2] LIU Xin_zhi. Advances in stability theory of nonlinear systems[A]. In: Proceedings of International Conference on Dynamical Systems and Differential Equations [C]. Vol E_3 Shanghai: Shanghai

Jiaotong University Press, 1998.

[3] Lakshmikantham V. Advances in UAS for functional differential equations[J]. Merm Diff Equas Math Phy, 1997, **12**(1): 131—134.

[4] Lakshmikantham V, Leela S, Sivasundaram S. Liapunov functions on product spaces and stability theory of delay differetnial equations[J]. J Math Anal Appl, 1991, **154**(2): 391—402.

[5] Lakshmikantham V. LIU Xin_zhi. Stability Analysis in Terms of Two Measures [M]. Singapore: World Scientific, 1993.

Stability Criteria in Terms of Two Measures for Delay Differential Equations

KOU Chun_hai, ZHANG Shu_nian

(Department of Applied Mathematics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240)

Abstract: By using the variational Liapunov method, stability properties in terms of two measures for delay differential equations are discussed. In the case that the unperturbed systems are ordinary differential systems, employing auxiliary measure $h^*(t, x)$, criteria on nonuniform and uniform stability in terms of two measures for delay differential equations are established.

Key words: delay differential equations; variational Lyapunov method; stability; two measures