应用数学和力学, 第 23 卷 第 3 期(2002 年 3 月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2002) 03_0316_05

振动体向周围声场传播噪声的理论模型*

姚志远

(东南大学 工程力学系, 南京 210096)

(鲁传敬推荐)

摘要: 以模态理论为基础, 分析了振动体的结构振动与外部声场的相互关系, 建立了求解振动与噪声正反两方面问题的理论模型, 并给出了相应的计算方法, 计算结果表明, 本方法是有效的•

关 键 词: 噪声控制; 声辐射; 反问题
中图分类号: O422.6 文献标识码: A

引 言

水下振动体例如潜艇和鱼雷, 由于内部动力装置的机械振动, 向周围传播噪声• 有效地控制潜艇和鱼雷向周围声场传播噪声, 将会大大地提高潜艇和鱼雷的隐蔽性, 增强战斗力• 这类噪声的传播过程分为两个阶段: 一是振动体的动力装置激发振动体的结构振动, 结构振动激发震动体表面振动; 二是表面振动通过流体媒介向周围传播噪声• 动力装置激发表面振动与振动体内部结构有关, 这个问题是振动问题, 有专题研究• 表面振动通过流体媒介向周围传播噪声是声辐射问题, 对于这个问题, 人们提出了表面振动与周围噪声场关系正反两方面的问题•

1) 正问题, 已知振动体表面外法方向的振动速度, 确定周围声场•

2) 反问题, 已知振动体周围声场, 确定振动体表面外法方向的振动速度•

有关正问题的研究, 主要的方法有格林函数方法和有限元方法, 这方面的研究已取得了较大的进展• 有关反问题的研究在国内刚刚开始被人们关注[1]、[2], 这方面的研究报道尚不多见• 随着计算机辅助设计和机械制造技术的发展, 人们不仅仅满足于已知表面振动, 预测周围声场• 更多地希望已知周围声场, 预测表面振动, 或者, 给定具有一定条件的外部声场, 设计表面振动• 文[2]对振动体表面振动速度不作任何限制, 仅仅依靠声场中若干点处的声压确定表面振动速度, 导致问题的不适定性• 传统上振动与噪声是分开研究的, 事实上, 作为产生噪声的振动体结构是存在的, 而周围声场是依赖于振动体结构的• 本文利用格林函数方法, 以结构振动与噪声传播相互统一的方式研究了振动体向周围传播噪声正反两方面的理论模型和计算方法•

1 表面振动与声场的相互关系

假设振动体为一空间凸体, 占有空间位置为空间体 Ω, 空间体 Ω 的表面为 S, 外部声场为

* 收稿日期: 2000_05_08; 修订日期: 2001_09_20
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(59775022)
作者简介: 姚志远(1961—), 男, 镇江市人, 副教授, 博士.

$\mathscr{R}$, 表面 S 的外法向振动速度为 u, 声场中任意一点 $r(x, y, z)$ 处的声压为 p• 由声学基本理论[3], 声场 $\mathscr{R}$ 中的声压 p 应满足 Helmholtz 方程和相应的边界条件:

$$\nabla^2 p + k^2 p = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} + \mathrm{i}\rho\omega u = 0 \quad (r \in S), \tag{2}$$

图 1　振动体与外部声场

式中 $k = \omega/c$ 为波数, ω 为圆频率, c 为声音在流体中的传播速度, ρ 为流体密度, $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$•

由文献[4]知道, 控制方程(1)式的格林函数 G 可表示为:

$$G(r \mid r, \omega) = \frac{\exp(-\mathrm{i}k \mid r - r \mid)}{4\pi \mid r - r \mid}\text{•} \tag{3}$$

利用格林公式和边界条件(2)式, 方程(1)式的解可表示为:

$$c(r)p(r) = -\int_s \frac{\partial G(r \mid r')}{\partial n} p(r')\mathrm{d}r' - \mathrm{i}\rho_0\omega\int_s G(r \mid r')u(r')\mathrm{d}r', \tag{4}$$

式中 $c(r) = 1, r \in \mathscr{R}$; $c(r) = 0.5, r \in S$•

式(4)表明表面振动和周围声场的相互依赖关系, 事实上, 在表面振动 $u(r')$ 已知的情况下, 能唯一地确定表面声压 $p(r')$•

我们将表面分划为 N 个小块, $S_1, S_2, \cdots, S_N$ 由分划的充分细, 在任一小块 S_i 上, 表面声压和振动速度为常数 p_i 和 u_i•

由(4)式得:

$$c(r)p(r) = -\sum_{i=1}^{N} p_i \int_{S_i} \frac{\partial G(r \mid r')}{\partial n}\mathrm{d}r' - \mathrm{i}\rho_0\omega\sum_{i=1}^{N} u_i \int_{S_i} G(r \mid r')\mathrm{d}r'\text{•} \tag{5}$$

当点 r 落在表面 S 上时, 有

$$\sum_{i=1}^{N} p_i \left(\int_{S_i} \frac{\partial G(r_j \mid r')}{\partial n} + 0.5\,\delta_{ij}\right)\mathrm{d}r' + \mathrm{i}\rho_0\omega\sum_{i=1}^{N} u_i \int_{S_i} G(r_j \mid r')\mathrm{d}r' = 0\text{•} \tag{6}$$

令向量 $\boldsymbol{p} = (p_i)$, 向量 $\boldsymbol{u} = (u_i)$, 矩阵 $\boldsymbol{A}_{11} = \left(\int_{S_i} \frac{\partial G(r_j \mid r')}{\partial n} + 0.5\,\delta_{ij}\right)\mathrm{d}r')$,

矩阵 $\boldsymbol{A}_{12} = \left(\mathrm{i}\rho_0\omega\int_{S_i} G(r_j \mid r')\mathrm{d}r'\right)$,

并代入(6)式, 有

$$\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{p} + \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{u} = 0\text{•} \tag{7}$$

由于 $\mid \boldsymbol{A}_{11} \mid \neq 0$, 有 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{u}$, 并代入(5)式得:

$$c(r)p(r) = \boldsymbol{A}_{21}(r)\boldsymbol{p} + \boldsymbol{A}_{22}(r)\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{A}_{21}(r)\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12} + \boldsymbol{A}_{22}(r)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}(r)\boldsymbol{u}, \tag{8}$$

式中函数矩阵 $\boldsymbol{A}_{21}(r) = \left(-\int_{S_i} \frac{\partial G(r \mid r')}{\partial n}\mathrm{d}r'\right)$, $\boldsymbol{A}_{22}(r) = -\mathrm{i}\rho_0\omega\int_{S_i} G(r \mid r')\mathrm{d}r'$,

$$\boldsymbol{A}(r) = \boldsymbol{A}_{21}(r)\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12} + \boldsymbol{A}_{22}(r)\text{•}$$

式(8)表明空间声场 $p(r)$ 与表面振动源 $\{u_i\}$ 之间内在联系, 它们互为因果关系•

2　结构振动和声场的相互关系

通常表面振动是由结构振动引起的, 结构振动是由组成振动体的振动模态所确定的, 事实上, 对表面振动产生主要影响的振动模态是有限的, 而表面振动是有由这些振动模态经过线性

组合构成• 如果已知振动体的振动模态,那么,对表面振动的讨论,就将限制在由这些振动模态构成的有限维线性空间上•

设 $u_k(r')$ 是表面 S 上的连续函数,并且 $\left\{u_k(r')\right\}$ 是 S 上一组线性无关基(振动模态),$L(S)$ 是由 $\left\{u_k(r')\right\}$ 组成的线性空间•

由定义,$\forall u(r') \in L(S)$,存在唯一向量 $\boldsymbol{a}=\left\{a_1, a_2, \cdots, a_M\right\}^{\mathrm{T}}$,使得 $u(r')=\sum_{k=1}^{M} a_k u_k(r')$,我们称 $\boldsymbol{a}=\left\{a_1, a_2, \cdots, a_M\right\}^{\mathrm{T}}$ 为函数 $u(r')$ 在基 $\left\{u_k(r')\right\}$ 下的坐标•

设表面振动 $u_k(r)$ 产生的外部声场为 $p_k(r)$,依据(4) 式有

$$c(r)p_k(r)=-\int_S \frac{\partial G(r \mid r')}{\partial n} p_k(r')\mathrm{d}r-\mathrm{i}\rho_0\omega\int_S G(r \mid r')u_k(r')\mathrm{d}r', \tag{9}$$

我们称函数集 $\left\{P_k(r)\right\}$ 为外部声场的声模态•

将(9) 式两边乘以 a_k,并取和,有

$$c(r)\sum_{k=1}^{M} a_k p_k(r)=-\int_S \frac{\partial G(r \mid r')}{\partial n}\sum_{k=1}^{M} a_k p_k(r')\mathrm{d}r-\mathrm{i}\rho_0\omega\int_S G(r \mid r')\sum_{k=1}^{M} a_k u_k(r)\mathrm{d}r' • \tag{10}$$

定理 1 如果表面振动 $u(r')=\sum_{k=1}^{M} a_k u_k(r')$,那么,由 $u(r')$ 产生的外部声场为

$$p(r)=\sum_{k=1}^{M} a_k p_k(r) • \tag{11}$$

定理 1 表明,外部声场是由各个振动模态分别对外部声场进行作用,然后经过线性组合而形成•

设 $f(r), g(r)$ 是 $\mathscr{R}$ 上两个连续函数,定义 $f(r), g(r)$ 的内积为

$$\langle f(r), g(r)\rangle=\int_S f(r)\overline{g(r)}\mathrm{d}r • \tag{12}$$

设矩阵 $\boldsymbol{C}=(\langle p_m(r), p_n(r)\rangle)$,向量 $\boldsymbol{d}=(\langle p_m(r), p(r)\rangle)$•

将(11) 式两边关于函数 $p_n(r)$ 取内积,得

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{d} • \tag{13}$$

定理 2 设 $\forall u(r') \in L(S)$,$p(r)$ 是由表面振动 $u(r')$ 产生的外部声场• 则 $u(r')$ 在基 $\left\{u_k(r')\right\}$ 下的坐标为

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{d} • \tag{14}$$

定理 2 表明已知外部声场 $p(r)$,通过(14) 式可唯一地确定产生外部声场的表面振动的模态坐标和表面振动•

3 算　　例

设表面 S 是中心在原点、半径为 1 的球面• 取表面上的振动模态为 $u_{m,n}(r')$

$$u_{m,n}(r')=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}m\arcsin\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\arctan\frac{y}{x}} \quad (m=1,2,\cdots,10;\ n=1,2,\cdots,10) • \tag{15}$$

给定表面振动速度 $u(r')$ 的坐标为 $\boldsymbol{a}=\left\{a_1, a_2, \cdots, a_M\right\}^{\mathrm{T}}$(见表 1)•

事实上,给定了坐标 $\boldsymbol{a}$,由(11) 式就确定振动速度 $u(r')$• 已知表面速度,依据定理1 唯一地确定外部声场 $p(r)$•

依据振动噪声的反问题的提法, 由上述确定的外部声场 $p(r)$, 从(14) 式再求解出表面振动的坐标, 记为 $\boldsymbol{a}^*$ (见表 1)•

表 1

给定的 a_i	a_1 = 0.935 469 699 1+ 0.916 904 439 9i	a_2= 0.410 270 230 4+ 0.839 649 497 8i	a_3 = 0.578 912 977 3+ 0.352 868 210 5i	a_4 = 0.813 166 489 6+ 0.009 861 263 2i
求解的 a_i^*	a_1^* = 0.935 469 688 9+ 0.916 904 435 6i	a_2^* = 0.410 270 230 4+ 0.893 649 497 8i	a_3^* = 0.057 891 297 7+ 0.352 868 210 5i	a_4^* = 0.813 166 489 6+ 0.009 861 263 2i
给定的 a_i	a_5 = 0.138 890 881 9+ 0.202 765 218 5i	a_6= 0.198 721 742 6+ 0.603 792 479 1i	a_7 = 0.272 187 924 9+ 0.198 814 426 7i	a_8 = 0.015 273 927 0+ 0.746 785 676 5i
求解的 a_i^*	a_5^* = 0.138 890 893 9+ 0.202 765 188 3i	a_6^* = 0.198 721 741 3+ 0.603 792 562 2i	a_7^* = 0.272 187 900 6+ 0.198 814 159 7i	a_8^* = 0.015 273 926 5+ 0.746 785 737 0i
给定的 a_i	a_9 = 0.445 096 432 2+ 0.931 814 578 4i	a_{10}= 0465 994 341 6+ 0.418 649 467 7i	a_{11}= 0.846 221 417 8+ 0.525 152 496 3i	a_{12} = 0.202 647 357 6+ 0.672 137 468 4i
求解的 a_i^*	a_9^* = 0.445 096 415 6+ 0.931 814 580 9i	a_{10}^* = 0.465 994 369+ 0.418 649 410 6i	a_{11}^* = 0.846 221 416+ 0.525 152 617 5i	a_{12}^* = 0.202 647 340+ 0.672 137 393 1i
给定的 a_i	a_{13} = 0.838 118 445 0+ 0.019 639 513 8i	a_{14} = 0.681 277 161 2+ 0.379 481 018 0i	a_{15}= 0.831 796 017 6+ 0.502 812 883 9i	a_{16} = 0.709 471 392 7+ 0.428 892 365 3i
求解的 a_i^*	a_{13}^* = 0.838 118 465+ 0.019 639 494 5i	a_{14}^* = 0.681 277 156+ 0.379 481 060 1i	a_{15}^* = 0.831 795 982+ 0.502 812 840 1i	a_{16}^* = 0.709 471 410+ 0.428 892 387 3i

计算结果表明, 由(14) 式求解的表面振动坐标与给定的实际坐标是吻合的•

4　结　　论

本文以模态理论为基础, 建立了结构振动与外部声场的相互对应关系•　在有限模态基的假设下, 给出了求解振动与声的正反两方面问题的计算方法, 计算结果表明本方法是可行的、有效的•

[参　考　文　献]

[1] Turchin V F, Kozlov Malkevich M S. The use of mathematical_statistics methods in the solution of incorrectly posed problems[J]. Soviet Physics Uspekhi, 1971, **13**(3): 681—703.

[2] 张桃红, 姜哲. 声辐射逆问题的初步探讨[J]. 江苏理工大学学报, 1999, **20**(2): 9—12.

[3] 姚志远, 彭如海. 车辆内部气流噪声计算方法[J]. 力学与实践, 1998, **20**(2): 23—26

[4] 田中正隆, 田中喜久. 边界元法的基础与应用[M]. 北京: 煤炭工业出版社, 1987.

Theoretical Model of Vibrating Object Transmitting Noise Towards External Sound

YAO Zhi_yuan

(Department of Engineering Mechancis, Southeast University,

Nanjing 210096, P R China)

Abstract: On the basic theory of modal method, the coupling relation between the vibration of objects and external sound was analyzed, the theoretical model solving the vibration and noise was provided, the corresponding calculation formula was given. The calculating results show out that this calculation formula is correct.

Key words: noise control; acoustic radiation; inverse problem