文章编号: 1000_0887(2002 02_0139_05

一类非线性色散型发展方程反问题的整体解*

陈芳启[1,3], 陈予恕[2], 吴志强[2]

(1. 天津大学 数学系, 天津 300072; 2. 天津大学 力学系, 天津 300072;
3. 南开大学天津大学刘徽应用数学中心, 天津 300072

(我刊编委陈予恕来稿

摘要: 将一类非线性色散型发展方程反问题转化为抽象空间非线性发展方程 Cauchy 问题· 利用半群方法和赋等价范数技巧,建立了该类抽象发展方程整体解的存在唯一性定理,并应用于所论反问题,得到了该类非线性色散型发展方程反问题整体解的存在唯一性定理,本质地改进了袁忠信得出的解的局部存在唯一性结果·

关 键 词: 伪抛物方程; 非线性发展方程; 反问题
中图分类号: O33; O322 文献标识码: A

引 言

众所周知,具有主部 $u_t - u_{xxt}$ 的伪抛物型方程近年来引起较广泛的注意,这主要是由于这类方程有明显的物理背景· [1] 研究了一类非线性色散型发展方程的多维反问题,即

$$\begin{cases} u_t - \Delta u_t + \mathrm{L}_0 u = F(x,t,u) + d(t)p(x,t) & (x,t) \in \Omega\times(0,T), & (1)\\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \Omega, & (2)\\ u|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0, & & (3)\\ u(x_0,t) = \psi(t) & 0 < t < T, x_0 \in \Omega, & (4)\end{cases}$$

其中 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域, Δ 是 n 维 Laplace 算子,而算子 L_0 为

$$-\mathrm{L}_0 = \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\right) + a(x)I,$$

即在附加条件(4 下求函数偶 $(u(x,t), p(x,t))$·

[1] 利用半群方法将反问题(1 ~ (4 转化为抽象空间发展方程 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + Au(t) = L_1(t)h(t,u(t)) + L_2(t)p(t) & t \in [0,T], & (5)\\ u(0) = u_0, & & (6)\end{cases}$$

即在附加条件

* 收稿日期: 2000_10_24; 修订日期: 2001_10_09
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(重大 19990510 ;国家重点基础研究基金资助项目(G1998020316 ;南开大学天津大学刘徽应用数学中心资助项目
作者简介: 陈芳启(1963— ,男,山东人,博士,已发表论文 30 余篇.

$$\mathrm{B}u = \psi(t) \qquad t \geqslant 0, \tag{7}$$

下确定函数偶 $(u(t), p(t))$, 其中 $u \in C^1([0, T], H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T], H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$, $p \in C([0, T], L^2(\Omega))$, $\mathrm{B} \in \mathscr{L}(H_0^1(\Omega), L^2(\Omega))$, $\mathscr{L}(E_1, E_2)$ 表示映 E_1 入 E_2 的有界线性算子的集合•

在一定条件下, 结合半群方法, [1] 又将 Cauchy 问题(5 ~ (7 转化为等价的积分方程组

$$\begin{cases} P(t) = P_0(t) + \phi_0(t) Q(t) + \int_0^t \phi_1(t, \tau) Q(\tau) \mathrm{d}\tau + \\ \qquad \int_0^t G_1(t, \tau) P(\tau) \mathrm{d}\tau \qquad t \in [0, T], & (8) \\ Q(t) = h\left(t, Q_0(t) + \int_0^t \phi_2(t, \tau) Q(\tau) \mathrm{d}\tau + \right. \\ \qquad \left. \int_0^t G_2(t, \tau) P(\tau) \mathrm{d}\tau\right) \qquad t \in [0, T], & (9) \end{cases}$$

其中 P_0、Q_0, $\phi_i(i = 0, 1, 2)$、$G_i(i = 1, 2)$ 均为已知抽象函数, 由(5) ~ (7) 唯一确定, 待求抽象函数偶 $(P, Q) \in C([0, T], L^2(\Omega)) \times C([0, T], L^2(\Omega))$• 通过研究抽象空间积分方程组(8) ~ (9) 解的存在唯一性, [1] 获得了非线性色散型发展方程多维反问题(1) ~ (4) 解的局部存在唯一性结果, 即当区间 $[0, T]$ 的长度 T 适当小时, 反问题(1) ~ (4) 在 $[0, T]$ 上有唯一解• 主要结果是(有关算子 L_0 的系数的假定(a 、(b) 本文不再列出, 详细参见[1])•

定理 A[1] 设 $h(t, p)$ 是 $\mathbf{R}^+ \times \boldsymbol{R}^1$ 上有界连续函数, 且对 $\forall u \in H_0^1(\Omega)$, $h(t, u) \in C([0, T], L^2(\Omega))$, 适合 Lipschitz 条件

$$\| h(t, u_1) - h(t, u_2) \|_0 \leqslant L \| u_1 - u_2 \|_0, \tag{10}$$

此处 $\|\cdot\|_0$ 是 $H^0(\Omega)$ 范数, 即 $L^2(\Omega)$ 范数, 又设 $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $\mathrm{B}u_0 = \psi(0)$, $L_1(t), L_2(t) \in C([0, T], \mathscr{L}(L^2(\Omega), H_0^1(\Omega)))$, $\psi(t) \in C^1([0, T], L^2(\Omega))$, 则当 T 适当小时, 反问题(5) ~ (7) 在 $[0, T]$ 上有唯一解 $(u(t), p(t))$•

定理 B[1] 设 $F(x, t, \rho)$ 是 $\Omega \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^1$ 上的有界连续实值函数, 且对 $\forall u \in H_0^1(\Omega)$, $F(\cdot, t, u) \in C([0, T], L^2(\Omega))$, 且满足条件

$$\| F(\cdot, t, u_1) - F(\cdot, t, u_2) \|_0 \leqslant L \| u_1 - u_2 \|_0 \text{•} \tag{11}$$

又设 $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u_0(x_0) = \psi(0)$, 且 $d(t) \in C([0, T], \mathbf{R}^1)$, $d(t) \neq 0$, $t \in [0, T]$, 则当 T 适当小时, 反问题(1) ~ (4) 有定义于 $\Omega \times [0, T]$ 上的唯一解 $(u(x, t), p(x, t))$•

本文使用赋等价范数技巧, 在[1]的条件下, 证明了反问题(1 ~ (4 定义在 $\Omega \times [0, T]$ 上的解的整体存在唯一性, 这里 $[0, T]$ 是给定的任意长度的区间• 因此, 我们的结果是[1] 中结果的本质改进、补充•

1 主要结果

作为[1]的注记, 本文使用的记号及条件均与[1]相同• 为简洁计, 这里仅给出[1]中定理证明中需改动的部分•

定理 1 设定理 A 条件成立, 则 Cauchy 问题(5 ~ (7 在 $[0, T]$ 上有唯一解 $(u(t), p(t))$•

证明 由[1]中定理 A 证明知, Cauchy 问题(5 ~ (7 有唯一解 $(u(t), p(t))$, $u \in C^1([0, T], H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T], H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$, $p \in C([0, T], L^2(\Omega))$ 当且仅当积分方程组(8)

~ (9) 有唯一解 $(P, Q) \in C([0,T], L^2(\Omega)) \times C([0,T], L^2(\Omega))$. 因此我们只需证明积分方程组(8) ~ (9) 在 $C([0,T], L^2(\Omega)) \times C([0,T], L^2(\Omega))$ 中有唯一解.

事实上, $\forall (P, Q) \in C([0,T], L^2(\Omega)) \times C([0,T], L^2(\Omega))$ 令

$$\mathcal{A}(P, Q) = (\bar{P}, \bar{Q}),$$

其中 $(\bar{P}, \bar{Q})$ 分别由(8)、(9) 式右端给出, 即

$$\begin{cases} \bar{P}(t) = P_0(t) + \phi_0(t)Q(t) + \int_0^t \phi_1(t,\tau)Q(\tau)\,d\tau + \\ \qquad \int_0^t G_1(t,\tau)P(\tau)\,d\tau, & (12) \\ \bar{Q}(t) = h\left(t, Q_0(t) + \int_0^t \phi_2(t,\tau)Q(\tau)\,d\tau + \int_0^t G_2(t,\tau)P(\tau)\,d\tau\right), & (13) \end{cases}$$

易证 $\mathcal{A}: C([0,T], L^2(\Omega)) \times C([0,T], L^2(\Omega)) \to C([0,T], L^2(\Omega)) \times C([0,T], L^2(\Omega))$. 我们记

$$M = \max\left\{\max_{(t,\tau)\in[0,T]\times[0,T]}\left\{\|G_i(t,\tau)\|, \|\phi_i(t,\tau)\|, i = 1, 2\right\}, \max_{t\in[0,T]}\left\{\|\phi_0(t)\|\right\}\right\},$$

取常数 $K > 0$ 充分大, 使得

$$\gamma \equiv \max\left\{\frac{2LM}{K}, \frac{2LM^2 + 2M}{K}\right\} < 1. \tag{14}$$

对 $\forall P \in C([0,T], L^2(\Omega))$, 令

$$\|P\|_c = \max_{t\in[0,T]}\left\{\|P(t)\|_0 e^{-Kt}\right\}, \tag{15}$$

对 $\forall (P, Q) \in C([0,T], L^2(\Omega)) \times C([0,T], L^2(\Omega))$, 令

$$\|(P, Q)\|_c = \max\left\{\|P\|_c, \|Q\|_c\right\}, \tag{16}$$

显然 $\|\cdot\|_c$ 和 $\|(\cdot,\cdot)\|_c$ 均为范数, 且 $C([0,T], L^2(\Omega))$, $C([0,T], L^2(\Omega)) \times C([0,T], L^2(\Omega))$ 在范数 $\|\cdot\|_c$, $\|(\cdot,\cdot)\|_c$ 下皆为 Banach 空间.

对 $\forall v_i = (P_i, Q_i) \in C([0,T], L^2(\Omega)) \times C([0,T], L^2(\Omega))$ $(i = 1, 2)$, 利用(13)、(10) 式, $\forall t \in [0, T]$, 有

$$\begin{aligned} &\|\bar{Q}_1(t) - \bar{Q}_2(t)\|_0 \leqslant \\ &\quad LM\left[\int_0^t \|Q_1(\tau) - Q_2(\tau)\|_0 d\tau + \int_0^t \|P_1(\tau) - P_2(\tau)\|_0 d\tau\right] = \\ &\quad LM\left[\int_0^t \|Q_1(\tau) - Q_2(\tau)\|_0 e^{-K\tau}e^{K\tau} d\tau + \right. \\ &\quad \left.\int_0^t \|P_1(\tau) - P_2(\tau)\|_0 e^{-K\tau}e^{K\tau} d\tau\right] \leqslant \\ &\quad \frac{LM}{K}\left[\|Q_1 - Q_2\|_c e^{Kt} + \|P_1 - P_2\|_c e^{Kt}\right], \end{aligned} \tag{17}$$

于是对 $\forall t \in [0, T]$, 有

$$\|\bar{Q}_1(t) - \bar{Q}_2(t)\|_0 e^{-Kt} \leqslant \frac{2ML}{K}\|v_1 - v_2\|_c,$$

从而

$$\|\bar{Q}_1 - \bar{Q}_2\|_c \leqslant \frac{2ML}{K}\|v_1 - v_2\|_c. \tag{18}$$

类似地, 利用(12) 式, 结合(17) 式, 对 $\forall t \in [0, T]$, 有

$$\| P_1(t) - P_2(t) \|_0 \leqslant \left(\frac{2LM^2}{K} + \frac{2M}{K} \right) \| v_1 - v_2 \|_c e^{Kt},$$

从而

$$\| P_1 - P_2 \|_c \leqslant \frac{2LM^2 + 2M}{K} \| v_1 - v_2 \|_c. \tag{19}$$

由(18)、(19)式得

$$\| (P_1, Q_1) - (P_2, Q_2) \|_c \leqslant \gamma \| v_1 - v_2 \|_c,$$

即

$$\| \mathcal{A} v_1 - \mathcal{A} v_2 \|_c \leqslant \gamma \| v_1 - v_2 \|_c.$$

由 $0 \leqslant \gamma < 1$ 知, 映射 $\mathcal{A}$ 是压缩的, 故存在唯一不动点 $v^* \in C([0, T], L^2(\Omega)) \times C([0, T], L^2(\Omega))$, 即 $\mathcal{A} v^* = v^*$, 亦即积分方程组(8)~(9)有唯一解 $v^* \in C([0, T], L^2(\Omega)) \times C([0, T], L^2(\Omega))$. 故 Cauchy 问题(5)~(7)有唯一解 $(u(t), p(t))$, $u \in C^1([0, T], H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T], H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$, $p \in C([0, T], L^2(\Omega))$. 证毕.

注1 [1]中定理A仅给出了 Cauchy 问题(5)~(7)解的局部存在唯一性结果, 那里要求区间 $[0, T]$ 的长度 T 适当小. 这里我们应用范数 $\| \cdot \|_c$ 和 $\| (\cdot, \cdot) \|_c$(由(15),(16)式定义), 在[1]中定理A的条件下, 证明了 Cauchy 问题(5)~(7)在任意给定的区间 $[0, T]$ 上整体解的存在唯一性, 这是对[1]中主要结果定理A的本质改进.

显然, 应用上面的定理1, 我们也能对[1]中主要结果(定理B)作相应改进.

定理2 设定理B条件成立, 则反问题(1)~(4)有定义在 $\Omega \times [0, T]$ 上的唯一解 $(u(x, t), p(x, t))$.

注2 [1]的主要结果定理B的结论是: 当区间 $[0, T]$ 的长度 T 适当小时, 反问题(1)~(4)有定义在 $\Omega \times [0, T]$ 上的唯一解 $(u(x, t), p(x, t))$, 我们这里使用了与[1]中定理B相同的条件, 证明了对任意给定的区间 $[0, T]$, 反问题(1)~(4)有定义在 $\Omega \times [0, T]$ 上的唯一解, 因此, 我们的结果定理2是[1]中定理B的本质改进.

[参考文献]

[1] 袁忠信. 一类非线性色散型发展方程的反问题[J]. 应用数学学报, 1991, **14**(2): 174—179.

[2] Showalter R E, Ting T W. Pseudo parabolic partial differential equation[J]. SIAM Math Anal, 1970, **1**(1): 1—26.

[3] Pazy A. Semigroup of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equation[M]. New York: Springer_Verlag, 1983, 162—177.

[4] Friedman A. Partial Differential Equations[M]. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc, 1969, 83—92.

[5] 齐民友. 线性偏微分算子引论[M]. 上册. 北京: 科学出版社, 1986, 410—411.

[6] Deimling K. Nonlinear Functional Analysis[M]. Berlin: Springer_Verlag, 1985, 137—144.

Global Solution of the Inverse Problem for a Class of Nonlinear Evolution Equations of Dispersive Type

CHEN Fang_qi[1,3], CHEN Yu_shu[2], WU Zhi_qiang[2]

(1. Department of Mathematics, Tianjin University, Tianjin 300072, P R China;
2. Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 300072, P R China;
3. Liuhui Center for Applied Mathematics, Nankai University &Tianjin University, Tianjin 300072, P R China

Abstract: The inverse problem for a class of nonlinear evolution equations of dispersive type was reduced to Cauchy problem of nonlinear evolution equation in an abstract space. By means of the semigroup method and equipping equivalent norm technique, the existence and uniqueness theorem of global solution was obtained for this class of abstract evolution equations, and was applied to the inverse problem discussed here. The existence and uniqueness theorem of global solution was given for this class of nonlinear evolution equations of dispersive type. The results extend and generalize essentially the related results of the existence and uniqueness of local solution presented by YUAN Zhong_xin.

Key words: pseudo_parabolic equation; nonlinear evolution equation; inverse problem