应用数学和力学, 第 23 卷 第 2 期(2002 年 2 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2002) 02_0173_06

哈密顿系统的稳定性边界*

齐朝晖[1], 亚历山大•斯若尼亚[2]

(1. 大连理工大学 力学系, 大连 116023; 2. 莫斯科罗蒙罗索夫大学 力学所, 莫斯科 117192, 俄罗斯)

(唐立民推荐)

摘要: 通过采用摄动法对线性哈密顿参数系统的特征值和特征向量进行灵敏度分析, 给出了此类系统的稳定性边界的判据, 结果表明: 具有约当链的系统重特征根对系统的稳定性起至关重要的作用•

关 键 词: 稳定边界; 哈密顿系统; 灵敏度分析; 摄动方法

中图分类号: O317.3 文献标识码: A

引 言

很多力学系统可以被看成是线性哈密顿系统• 当我们研究系统参数对系统的动力学行为的影响时, 我们可以把该系统当作一个参数系统• 许多重要的系统参数, 如临界载荷、临界角速度、临界刚度等都可以通过研究参数系统的稳定性而得到•

本文采用摄动法对线性哈密顿系统的特征值和特征向量的灵敏度进行了详细的分析, 并在此基础上给出了系统稳定性边界的判据•

1 哈密顿系统

线性哈密顿系统的动力学方程可以写作为:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{J}$ 为 $2n \times 2n$ 维实矩阵, $\boldsymbol{A}$ 是对称的而 $\boldsymbol{J}$ 可以通过 $n \times n$ 阶单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 定义为:

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}• \tag{2}$$

容易证明 $\boldsymbol{J}$ 具有以下性质:

$$\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}^{-1}• \tag{3}$$

令哈密顿系统(1)的解的形式为:

$$\boldsymbol{x} = \mathrm{e}^{\lambda t}\boldsymbol{u}, \tag{4}$$

则矢量 $\boldsymbol{u}$ 和系数 λ 应当满足特征方程

$$(\boldsymbol{A} + \lambda\boldsymbol{J})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}, \tag{5}$$

方程(5)有非零特征向量的充要条件为矩阵 $\boldsymbol{A} + \lambda\boldsymbol{J}$ 的行列式为零• 根据行列式的性质以及矩

* 收稿日期: 2000_06_22; 修订日期: 2001_09_18
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10072012); 俄罗斯自然科学基金资助项目
作者简介: 齐朝晖(1964—), 男, 吉林长春人, 副教授, 博士.

阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{J}$ 的对称性, 我们可以得到:

$$|\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{J}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\lambda\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{J}|,\tag{6}$$

因此, 如果 λ 为系统的特征根, 那么 $-\lambda$ 也是系统的特征根. 考虑到 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{J}$ 都是实数矩阵, 它们的共轭 $\bar{\lambda}$ 和 $-\bar{\lambda}$ 也必然是系统的特征根. 由此可见, 在线性哈密顿系统的特征根中, 只要其中一个具有非零的实部, 系统就是不稳定的.

伴随由(5)式定义的特征值问题, 我们定义相应的共轭特征值问题:

$$(\boldsymbol{A}-\bar{\lambda}\boldsymbol{J})\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}\tag{7}$$

并把其中的特征向量 $\boldsymbol{v}$ 称为特征值 λ 的共轭特征向量. 为简化以下的书写, 定义两个 $2n$ 维复向量的内积为:

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\sum_{i=1}^{2n}a_i b_i.\tag{8}$$

2 特征值摄动

假设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每一个元素都是 r 维实参数向量 $\boldsymbol{p}=(p_1,p_2,\cdots,p_r)$ 的函数. 当参数发生如下所述的小变动时

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_0+\varepsilon\boldsymbol{e}+\varepsilon^2\boldsymbol{d}+\cdots,\tag{9}$$

式中 ε 为小的正数, $\boldsymbol{e}$ 和 $\boldsymbol{d}$ 为任意 r 维实向量, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 也将相应地变为[1~3]

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_0+\varepsilon\boldsymbol{A}_1+\varepsilon^2\boldsymbol{A}_2+\cdots,\tag{10}$$

其中

$$\boldsymbol{A}_0=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}_0),\quad \boldsymbol{A}_1=\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial p_i}e_i,\quad \boldsymbol{A}_2=\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial p_i}d_i+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{r}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial p_i\partial p_j}e_ie_j.\tag{11}$$

由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的改变, 系统特征根 λ 以及相应的特征向量 $\boldsymbol{u}$ 也将改变. 以下我们研究最重要的几种情况.

2.1 单根

当 λ_0 是单根并且 $\boldsymbol{u}_0$ 为其相应的特征向量时, 摄动后的系统特征值 λ 和特征向量 $\boldsymbol{u}$ 可以展开为泰勒级数[1~3]

$$\begin{cases}\lambda=\lambda_0+\varepsilon\lambda_1+\varepsilon^2\lambda_2+\cdots,\\ \boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_0+\varepsilon\boldsymbol{w}_1\times\varepsilon^2\boldsymbol{w}_2+\cdots.\end{cases}\tag{12}$$

将式(12)代入到式(5)中, 得到:

$$\begin{cases}-(\boldsymbol{A}_0+\lambda_0\boldsymbol{J})\boldsymbol{w}_1=(\boldsymbol{A}_1+\lambda_1\boldsymbol{J})\boldsymbol{u}_0,\\ -(\boldsymbol{A}_0+\lambda_0\boldsymbol{J})\boldsymbol{w}_2=(\boldsymbol{A}_1+\lambda_1\boldsymbol{J})\boldsymbol{w}_1+(\boldsymbol{A}_2+\lambda_2\boldsymbol{J})\boldsymbol{u}_0.\end{cases}\tag{13}$$

设与 λ_0 相应的特征向量为 $\boldsymbol{v}_0$, 即

$$(\boldsymbol{A}_0-\bar{\lambda}_0\boldsymbol{J})\boldsymbol{v}_0=\boldsymbol{0}.\tag{14}$$

由于 λ_0 是单根, 下述不等式成立[1~2]:

$$(\boldsymbol{J}\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{v}_0)\neq 0.\tag{15}$$

通过作向量 $\boldsymbol{v}_0$ 与式(12)两边向量的内积可以得到:

$$\lambda_1=-\frac{(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{v}_0)}{(\boldsymbol{J}\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{v}_0)},\tag{16}$$

$$\lambda_2=-\frac{(\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{v}_0)+((\boldsymbol{A}_1+\lambda_1\boldsymbol{J})\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{v}_0)}{(\boldsymbol{J}\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{v}_0)}.\tag{17}$$

如果 λ_0 是纯虚根, 即 $\lambda_0 = \mathrm{i}\omega_0 = -\bar{\lambda}_0$, 由于此时 $\boldsymbol{A}_0 - \bar{\lambda}_0\boldsymbol{J} = \boldsymbol{A}_0 + \lambda_0\boldsymbol{J}$, 特征值问题与其共轭特征值问题相同· 因而特征向量 $\boldsymbol{u}_0$ 与其共轭特征向量 $\boldsymbol{v}_0$ 相同· 根据矩阵 $\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{J}$ 的对称性可得:

$$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_0) = (\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{u}_0) = \overline{(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_0)}, \tag{18}$$

$$(\boldsymbol{J}\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_0) = -(\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{J}\boldsymbol{u}_0) = -\overline{(\boldsymbol{J}\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_0)}\cdot \tag{19}$$

以上两式表明: $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_0)$ 是实数; $(\boldsymbol{J}\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_0)$ 为纯虚数, 因而 λ_1 是纯虚数· λ_1 为纯虚数使得下式成立:

$$((\boldsymbol{A}_1 + \lambda_1\boldsymbol{J})\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{u}_0) = (\boldsymbol{w}_1, (\boldsymbol{A}_1 + \lambda_1\boldsymbol{J})\boldsymbol{u}_0)\cdot \tag{20}$$

利用方程(12) 的第一式, 容易证明:

$$(\boldsymbol{w}_1, (\boldsymbol{A}_1 + \lambda_1\boldsymbol{J})\boldsymbol{u}_0) = (\boldsymbol{w}_1, (\boldsymbol{A}_0 + \lambda_0\boldsymbol{J})\boldsymbol{w}_1), \tag{21}$$

在 λ_0 为纯虚数的条件下

$$(\boldsymbol{w}_1, (\boldsymbol{A}_0 + \lambda_0\boldsymbol{J})\boldsymbol{w}_1) = ((\boldsymbol{A}_0 + \lambda_0\boldsymbol{J})\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1)\cdot \tag{22}$$

因此, 如果 λ_0 和 λ_1 都是纯虚数, 则 $((\boldsymbol{A}_1 + \lambda_1\boldsymbol{J})\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{u}_0)$ 是实数· 由于 $\boldsymbol{A}_2$ 是实对称矩阵, $(\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_0)$ 必然是实数· 综上所述, 只要 λ_0 为纯虚根, λ_1 和 λ_2 就一定是纯虚数· 由此可见当 λ_0 为纯虚数的单根时, 在参数 $\boldsymbol{p}_0$ 的邻域内, 摄动后的特征值 λ 仍然保持为纯虚根·

事实上, 在线性哈密顿系统中, 由于 λ 和 $-\lambda$ 同时为系统的特征根, 参数的摄动不会改变单根是否为实数、是否为纯虚数、或者是否为复数的性质· 否则系统所拥有的特征值总数就会超过或少于系统的维数, 而这是不可能的· 因此, 如果线性哈密顿系统的特征根全部都是单根, 则相应的系统参数只能是参数空间中稳定或不稳定区域的内点, 不可能属于系统稳定性边界·

2.2 简单重根

当 λ_0 为 m 重特征根并有 m 个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{u}_i (i = 1, 2, \cdots, m)$, 即

$$(\boldsymbol{A}_0 + \lambda_0\boldsymbol{J})\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{0}, \tag{23}$$

则必然有 m 个与其相应的线性无关的共轭特征向量 $\boldsymbol{z}_i (i = 1, 2, \cdots, m)$, 即

$$(\boldsymbol{A}_0 - \bar{\lambda}_0\boldsymbol{J})\boldsymbol{z}_i = \boldsymbol{0}\cdot \tag{24}$$

λ_0 为简单重根保证了不等式

$$(\boldsymbol{A}_0 + \lambda_0\boldsymbol{J})\boldsymbol{x} \neq -\boldsymbol{J}\sum_i(\beta_i\boldsymbol{u}_i), \tag{25}$$

对任何向量 $\boldsymbol{x}$ 和任意系数 β_i 都成立· 通过作向量 $\boldsymbol{z}_i$ 与不等式(25) 两边向量的内积, 我们得到另一组不等式:

$$\sum_{j=1}^{2n}(\boldsymbol{z}_i, \boldsymbol{J}\boldsymbol{u}_j)\beta_j \neq 0, \tag{26}$$

因此, 由 $G_{ij} = (\boldsymbol{z}_i, \boldsymbol{J}\boldsymbol{u}_j)$ 所定义的矩阵 $\boldsymbol{G}$ 为非奇异的· 在这种情况下, 当参数发生摄动时, 摄动后的系统特征根的特征向量可以表述为:

$$\begin{cases} \lambda = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + \varepsilon^2\lambda_2 + \cdots, \\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{w}_0 + \varepsilon\boldsymbol{w}_1 + \varepsilon^2\boldsymbol{w}_2 + \cdots, \end{cases} \tag{27}$$

其中矢量 $\boldsymbol{w}_0$ 为向量 $\boldsymbol{u}_i (i = 1, 2, \cdots, m)$ 的线性组合:

$$\boldsymbol{w}_0 = \sum_{j=1}^{m}(\alpha_j\boldsymbol{u}_j)\cdot \tag{28}$$

将(27) 式代入到(5) 式中, 得到:

$$-(\boldsymbol{A}_0+\lambda_0\boldsymbol{J})\boldsymbol{w}_1=(\boldsymbol{A}_1+\lambda_1\boldsymbol{J})\boldsymbol{w}_0,\tag{29}$$

$$-(\boldsymbol{A}_0+\lambda_0\boldsymbol{J})\boldsymbol{w}_2=(\boldsymbol{A}_1+\lambda_1\boldsymbol{J})\boldsymbol{w}_1+(\boldsymbol{A}_2+\lambda_2\boldsymbol{J})\boldsymbol{w}_0.\tag{30}$$

因为 $z_i(i=1,2,\cdots,m)$ 与(29)式两边的矢量的内积为零, 所以

$$(\boldsymbol{D}+\overline{\lambda}_1\boldsymbol{G})\alpha=\boldsymbol{0},\tag{31}$$

其中矩阵 $\boldsymbol{D}$ 的元素 $D_{ij}=(z_i,\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{u}_j)$; 向量 α 的第 i 个分量为 $\overline{\alpha}_i$.

如果 λ_0 为纯虚根, 则其共轭特征向量 $z_i=\boldsymbol{u}_i$, 因而 $D_{ij}=\overline{D}_{ji}$, $G_{ij}=-\overline{G}_{ji}$, 写作矩阵形式为:

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}^*,\quad \boldsymbol{G}=-\boldsymbol{G}^*.\tag{32}$$

从(31)式中可以看到: λ_1 不一定是纯虚根, 从而系统可能会从摄动前的稳定变为摄动后的不稳定, 相应的系统参数则属于稳定边界. 然而, 如果 $(\alpha_i,\boldsymbol{G}\alpha_i)\neq 0$ 或者 $(\alpha_i,\boldsymbol{D}\alpha_i)\neq 0$, 则 λ_1 一定为纯虚根.

因此, 当部分线性哈密顿系统的特征根为简单重根时, 相应的参数可能但不一定属于系统稳定边界.

2.3 带有约当链的二重根

在 λ_0 为二重根并只有一个特征向量 $\boldsymbol{u}_0$ 时, 称之为具有约当链的特征根, 此时, 伴随 λ_0 存在一个与 $\boldsymbol{u}_0$ 线性无关的向量 $\boldsymbol{u}_1$ 满足以下方程[1~5]:

$$(\boldsymbol{A}_0+\lambda_0\boldsymbol{J})\boldsymbol{u}_0=\boldsymbol{0},\tag{33}$$

$$(\boldsymbol{A}_0+\lambda_0\boldsymbol{J})\boldsymbol{u}_1=-\boldsymbol{J}\boldsymbol{u}_0;\tag{34}$$

同时, 存在两个向量 $\boldsymbol{v}_0$, $\boldsymbol{v}_1$ 满足下式:

$$\begin{cases}(\boldsymbol{A}_0-\overline{\lambda}_0\boldsymbol{J})\boldsymbol{v}_0=\boldsymbol{0},\\(\boldsymbol{A}_0-\overline{\lambda}_0\boldsymbol{J})\boldsymbol{v}_1=-\boldsymbol{J}\boldsymbol{v}_0;\end{cases}\tag{35}$$

并且

$$(\boldsymbol{v}_0,\boldsymbol{J}\boldsymbol{u}_0)=0;\ (\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{J}\boldsymbol{u}_0)=(\boldsymbol{J}\boldsymbol{v}_0,\boldsymbol{u}_1)\neq 0.\tag{36}$$

在这种情况下, 摄动后的系统特征根和特征向量可以展开为具有分数幂的级数[1~5]:

$$\begin{cases}\lambda=\lambda_0+\varepsilon^{1/2}\lambda_1+\varepsilon\lambda_2+\cdots,\\\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_0+\varepsilon^{1/2}\boldsymbol{w}_1+\varepsilon\boldsymbol{w}_2+\cdots.\end{cases}\tag{37}$$

将(37)式代入(5)式中, 得到:

$$-(\boldsymbol{A}_0+\lambda_0\boldsymbol{J})\boldsymbol{w}_1=\lambda_1\boldsymbol{J}\boldsymbol{u}_0,\tag{38}$$

$$-(\boldsymbol{A}_0+\lambda_0\boldsymbol{J})\boldsymbol{w}_2=(\boldsymbol{A}_1+\lambda_2\boldsymbol{J})\boldsymbol{u}_0+\lambda_1\boldsymbol{J}\boldsymbol{w}_1.\tag{39}$$

从(38)式中, 可以得到:

$$(\boldsymbol{J}\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{v}_0)=-\lambda_1(\boldsymbol{J}\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{v}_1);\tag{40}$$

从(39)式中得:

$$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{v}_0)+\lambda_1(\boldsymbol{J}\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{v}_0)=0;\tag{41}$$

结合(40)式与(41)式, 得到 λ_1 为:

$$\lambda_1=\pm\sqrt{\frac{(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{v}_0)}{(\boldsymbol{J}\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{v}_1)}}.\tag{42}$$

当 λ_0 为纯虚根时, $\boldsymbol{v}_0=\boldsymbol{u}_0$, $\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{u}_1$. 此时由于 $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{u}_0)$ 和 $(\boldsymbol{J}\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{v}_1)$ 为实数, $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{v}_0)/(\boldsymbol{J}\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{v}_1)$ 也是实数. 如果 $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{u}_0)$ 的符号与 $(\boldsymbol{J}\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{u}_1)$ 相反, λ_1 为纯虚数, 系统保持稳定; 如果 $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{u}_0)$ 的符号与 $(\boldsymbol{J}\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{u}_1)$ 相同, 则 λ_1 具有非零实部, 系统丧失其稳定性. 然而,

因为 $\boldsymbol{A}_1$ 的元素为系统参数的函数, $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_0)$ 的符号可随参数摄动方向的变化而改变• 因此, 在哈密顿系统的特征根中, 只要有一个是带有约当链的重根, 相应的系统参数一定属于系统的稳定边界•

当 $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_0) = 0$ 时, 我们称之为退化情况• 此时, 摄动后的系统特征根和特征向量可以表述为[1~6]:

$$\begin{cases} \lambda = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_2 + \varepsilon^2\lambda_4 + \cdots, \\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 + \varepsilon\boldsymbol{w}_2 + \varepsilon^2\boldsymbol{w}_4 + \cdots \end{cases} \tag{43}$$

将(43)式代入到(5)式中得:

$$-(\boldsymbol{A}_0 + \lambda_0\boldsymbol{J})\boldsymbol{w}_2 = (\boldsymbol{A}_1 + \lambda_2\boldsymbol{J})\boldsymbol{u}_0, \tag{44}$$

$$-(\boldsymbol{A}_0 + \lambda_0\boldsymbol{J})\boldsymbol{w}_4 = (\boldsymbol{A}_1 + \lambda_2\boldsymbol{J})\boldsymbol{w}_2 + (\boldsymbol{A}_2 + \lambda_4\boldsymbol{J})\boldsymbol{u}_0 \tag{45}$$

从(44)式中, 我们得到

$$-(\boldsymbol{J}\boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{u}_0) = (\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_1) + \lambda_2(\boldsymbol{J}\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_1), \tag{46}$$

$$\boldsymbol{w}_2 = \lambda_2\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{x}_2, \tag{47}$$

其中 $\boldsymbol{x}_2$ 由下式决定:

$$(\boldsymbol{A}_0 + \lambda_0\boldsymbol{J})\boldsymbol{x}_2 = -\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{u}_0 \tag{48}$$

由于 $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_0) = 0$, $\boldsymbol{x}_2$ 可以通过非奇异矩阵[7]

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{A}_0 + \lambda_0\boldsymbol{J} - \bar{\boldsymbol{u}}_0\boldsymbol{u}_0^{\mathrm{T}} \tag{49}$$

求得为:

$$\boldsymbol{x}_2 = -\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{u}_0 \tag{50}$$

从(45)式中可以得到:

$$\lambda_2(\boldsymbol{J}\boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{u}_0) + (\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{u}_0) + (\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_0) = 0 \tag{51}$$

将(46)~(50)式代入到(45)式中, 我们得到决定 λ_2 的方程

$$a\lambda_2^2 + b\lambda_2 + c = 0, \tag{52}$$

其中

$$\begin{cases} a = (\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{J}\boldsymbol{u}_1), \quad b = (\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_0) - (\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_1), \\ c = (\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_0) - (\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_0) \end{cases} \tag{53}$$

根据(36)式, $\bar{a} = (\boldsymbol{J}\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_0) = (\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{J}\boldsymbol{u}_1) = a$; 由于 $\boldsymbol{A}_1$ 为实对称矩阵, $\bar{b} = (\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{u}_1) - (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{u}_0), = (\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_1) - (\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_0) = -b$; 考虑到 λ_0 为纯虚根, $\boldsymbol{F}^* = \bar{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}_0 + \lambda_0\boldsymbol{J} - \bar{\boldsymbol{u}}_0\boldsymbol{u}_0^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{F}$, 利用(56)式, 可以证明: $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{A})^* = \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{A}$, 因此 $\bar{c} = c$• 从而, a 和 c 为实数, b 为纯虚数• 由此可见: 方程(52)的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 为实数, 并且

$$\lambda_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \tag{54}$$

当 $\Delta \leqslant 0$ 时, λ_2 为纯虚数; 当 $\Delta > 0$ 时, λ_2 为带有非零实部的复数; 当 $\Delta = 0$ 时, 方程(52)的两个根都是纯虚根, 并且

$$\lambda_2 = \frac{-b}{2a} \tag{55}$$

当 $\Delta = 0$ 时, $\lambda_0 + \varepsilon\lambda_2$ 保持为具有约当链的重根• 其证明如下: 与 $\lambda_0 + \varepsilon\lambda_2$ 相对应的特征向量为 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_0 + \varepsilon\boldsymbol{w}_2$, 由于此时 $\lambda_0 + \varepsilon\lambda_2$ 为纯虚根, 相应的共轭特征向量与向量 $\boldsymbol{v}$ 相同; 如果我们能够证明 $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{J}\boldsymbol{v}) = 0$ 以 $O(\varepsilon)$ 阶被近似满足, 则可认为 $\lambda_0 + \varepsilon\lambda_2$ 保持为具有约当链的重根•

这个前提条件可以表述为$(\boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{J}\boldsymbol{u}_0) = (\boldsymbol{J}\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{w}_2)$• 但是, 根据(46) 式,

$$(\boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{J}\boldsymbol{u}_0) - (\boldsymbol{J}\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{w}_2) = - b - 2a\lambda_2 \cdot \tag{56}$$

考虑到(55) 式, 容易证明: $(\boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{J}\boldsymbol{u}_0) - (\boldsymbol{J}\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{w}_2) = 0$ 的确成立•

3 结 束 语

从本文的分析中可知: 当哈密顿系统的全部特征根都是单根时, 相应的系统参数肯定不属于系统稳定边界; 在哈密顿系统的特征根中, 只要有一个是带有约当链的重根时, 相应的系统参数一定属于系统的稳定边界; 当哈密顿系统的特征根中有一部分是不带有约当链的重根时, 不能据此一般性地判定相应的系统参数是否属于系统稳定边界•

[参 考 文 献]

[1] Vishik M I, Lyusternik L A. Solution of some perturbation problems in the case of matrices and self-adjoint or non_self_adjoint equations[J]. Russian Mathematical Surveys, 1960, **15**(3): 1—73.

[2] Lancaster P. On eigenvalues of matrices depending on a parameter[J]. Numer Math, 1964, **10**(4): 377—387.

[3] Sun J G. Eigenvalues and eigenvectors of a matrix dependent on a parameter[J]. J Comput Math, 1985, **3**(3): 351—364.

[4] Anord V L. Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations[M]. New York: Springer_Verlag, 1983.

[5] Seyranian A P. Sensitivity analysis of multiple eigenvalues[J]. Mech Struct & Mach, 1993, **21**(2): 261—284.

[6] Pedersen P, Seyranian A P. Sensitivity analysis of problems of dynamic stability[J]. Int J Solids Structures, 1983, **19**(4): 315—335.

[7] Yakubovitch V A, Strzhinskii V M. Parametric Resonance in Linear Systems[M]. Moscow: Nauka, 1987.

On the Stability Boundary of Hamiltonian Systems

QI Zhao_hui[1], Alexander P. Seyranian[2]

(1. Department of Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116023, P R China;

2. Institute of Mechanics, Moscow State Lomonosov University, Moscow 117192, Russia)

Abstract: The criterion for the points in the parameter space being on the stability boundary of linear Hamiltonian system depending on arbitrary numbers of parameters was given, through the sensitivity analysis of eigenvalues and eigenvectors. The results show that multiple eigenvalues with Jordan chain take a very important role in the stability of Hamiltonian systems.

Key words: stability boundary; Hamiltonian system; sensitivity analysis; perturbation method