应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2002) 02_0207_10

周期摄动守恒系统的数值解*

刘国庆[1], 傅冬生[2], 沈祖和[2]

(1. 南京化工大学 基础科学部, 南京 210009; 2. 南京大学 数学系, 南京 210093)

(苏煜城推荐)

摘要: 讨论了周期摄动非线性守恒系统• 利用 Hadamard 定理证明了在适当的条件下连续问题解的存在唯一性• 并在均匀网格上对方程作了离散化, 给出了相应的离散问题具有唯一解的结果• 最后讨论了数值解的精度及有关算法•

关 键 词: 非线性系统; 解的存在唯一性; 数值解; 算法
中图分类号: O241.81 文献标识码: A

引 言

考虑如下形式的非线性常微分方程周期边值问题

$$\begin{cases} \mathrm{L}u \equiv u''(t) + \mathrm{grad}\,G(u) = p(t), \\ u(0) = u(2\pi), \quad u'(0) = u'(2\pi), \end{cases} \tag{1}$$

其中 $p \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n)$, $G \in C^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$• 这一方程可以解释为力学系统在受守恒内力和外力作用下的牛顿运动方程• 诸多作者曾经证明问题(1) 在不同条件下解的存在唯一性• 这些证明利用了不同的方法, 例如, Brower 不动点理论[1], Poincar 摄动理论[2] 及全局反函数理论[3]• 很多文献都致力于从理论上证明解的存在唯一性, 而较少把注意力放在数值求解上, 尽管问题(1) 的精确解难以求出• 在本文中, 我们将着重研究问题(1) 的数值求解• 事实上, 我们的工作主要体现在两方面: (一) 证明了在一定条件下问题(1) 的相应的非线性离散化问题解的存在唯一性; (二) 对非线性离散化问题利用参数映射的思想构造了一类简便易行的算法•

在第 1 节中我们首先给出了泛函的一些基本结果和离散 Fourier 级数的一些基本性质以及关于参数映射的相关结论• 在第 2 节中, 我们证明了连续问题(1) 具有唯一解• 在第 3 节中, 主要利用第 2 节中证明连续问题解的存在唯一性的类似方法, 讨论了问题(1) 相应的离散方程数值解的存在唯一性• 我们在第 4 节中研究了数值解的精度并得到了数值解的误差估计• 最后, 第 5 节提供了一种基于参数映射的算法用于求解非线性差分方程问题, 并给出了相应的算例•

1 预 备 知 识

在本节中, 我们将给出泛函的两个基本引理和离散 Fourier 级数一些基本性质•

* 收稿日期: 2000_09_29; 修订日期: 2001_06_26
作者简介: 刘国庆(1966—), 男, 安徽省无为县人, 教授, 博士, 主要研究方向为信号处理的非线性逼近及非线性系统的科学计算等.

引理 1(Hadamard) 设 M 为一正常数, X、Y 为 Banach 空间· 若映射 $f: X \to Y$ 为连续可微的且 $\forall x \in X$, 有

$$f'(x) \in \mathrm{isom}(X, Y),$$
$$\| f'(x)^{-1} \| \leqslant M,$$

其中 isom 表示同构· 则 f 是从 X 到 Y 上的同胚映射·

引理 2 设 H 为实 Hilbert 空间, X、Y 为 H 的两个闭子空间且 $H = X \oplus Y$· 若 $S: H \to H$ 为连续映射, m_1、m_2 为两个正常数, 使得

$$\langle S'(u)x, x \rangle \leqslant - m_1 \| x \|^2, \tag{2}$$

$\forall x \in X,\ u \in H$;

$$\langle S'(u)y, y \rangle \geqslant m_2 \| y \|^2, \tag{3}$$

$\forall y \in Y,\ u \in H$ 及

$$\langle S'(u)x, y \rangle = \langle S'(u)y, x \rangle, \tag{4}$$

$\forall x \in X,\ \forall y \in Y,\ \forall u \in H$, 则 $\| S'(u)^{-1} \| \leqslant 1/\sqrt{C}$, 其中 $C = \min\{ m_1, m_2 \}$, 且 S 为 H 映上自身的同胚映射·

证明 设 $u \in H,\ w \in H,\ w = x + y, x \in X, y \in Y$· 我们有

$$\begin{aligned}\langle S'(u)w, y - x \rangle = {} & \langle S'(u)x, y \rangle - \langle S'(u)x, x \rangle + \\ & \langle S'(u)y, y \rangle - \langle S'(u)y, x \rangle\cdot\end{aligned} \tag{5}$$

从(2)、(3)和(4)可得到

$$\langle S'(u)w, y - x \rangle \geqslant m_1 \| x \|^2 + m_2 \| y \|^2\cdot \tag{6}$$

另外显然有

$$\| x \pm y \|^2 \leqslant 2(\| x \|^2 + \| y \|^2)\cdot \tag{7}$$

对(6)的左端利用 Cauchy_Schwartz 不等式, 有

$$\langle S'(u)w, y - x \rangle \leqslant \frac{1}{2}\langle y - x, y - x \rangle + \frac{1}{2}\langle S'(u)w, S'(u)w \rangle\cdot \tag{8}$$

由(6)、(7)得到

$$\begin{aligned}\langle S'(u)w, S'(u)w \rangle \geqslant {} & 2(S'(u)w, y - x) - (y - x, y - x) \geqslant \\ & (2C - 2)(\| x \|^2 + \| y \|^2) + (\| x \|^2 + \| y \|^2 + 2(x, y)) \geqslant \\ & C \| x + y \|^2,\end{aligned} \tag{9}$$

即

$$\sqrt{C} \| w \| \leqslant \| S'(u)w \|\cdot \tag{10}$$

由(10)可知 $S'(u)$ 为一一映射·

经过简单的讨论, 由(10)可得 $S'(H)$ 是 H 的闭子空间· 以下将证明 $S'(H) = H$· 为此, 我们假设存在 $z \in S'(H)^{\perp},\ z \neq 0$· 则

$$\langle z, S'(u)w \rangle = 0, \qquad \forall u \in H, w \in H\cdot$$

由于 z 可分解为 $z = h + k$, 其中 $h \in X,\ k \in Y$· 令 $w = k - h$, 我们有

$$\begin{aligned}0 = \langle z, S'(u)w \rangle = {} & \langle h, S'(u)k \rangle - \langle h, S'(u)h \rangle + \\ & \langle k, S'(u)k \rangle - \langle k, S'(u)h \rangle\cdot\end{aligned} \tag{11}$$

由(2)、(3)、(4)及(11)可得到

$$0 = \langle z, S'(u)w \rangle \geqslant m_1 \| h \|^2 + m_2 \| k \|^2\cdot$$

从而得出矛盾· 因此 $S'(H)^{\perp} = \{0\}$, S' 映上 H· 所以, S' 是 H 映上 H 的同构映射· 最后, 由

(10) 推出 $\|S'(u)^{-1}\| \leqslant 1/\sqrt{C}$• 应用引理 1, S 是 H 映上 H 的同胚映射•

为了文章后面构造算法的需要, 这里介绍一个有关参数映射的命题• 我们研究如下方程

$$\Phi(x) = 0,$$

其中 $\Phi: D \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 假设具有局部连续的 Lipschitz Fr chet 导数 Φ_x• 为了求解 $\Phi(x) = 0$, 我们引入单参数映射如下

$$H(\epsilon, x) \equiv a(\epsilon) G(x) + b(\epsilon)\Phi(x) = 0, \qquad (*)$$

其中 $a, b: [0, 1] \to \mathbf{R}$ 和 $G: D \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 二次可微• 取 $x_0 \in D$ 使得 $H(0, x_0) = 0, H(1, x) = \Phi(x) = 0$• 最常用的单参数映射为

$$H(\epsilon, x) \equiv \epsilon\Phi(x) + (1 - \epsilon) G(x) = 0•$$

下面的命题是关于参数 ϵ 在区间 $[0, 1]$ 取值时求解上述问题的可行性•

命题 1 假设 $H_x(\epsilon, x)$ 在 $[0, 1] \times D$ 区域上可逆且 $x_0 \in D$• 另外, 设存在一个连续函数 $h(\epsilon, r)$ 对于固定的 ϵ 关于 r 单调非减且满足如下关系

$$\|H_x(\epsilon, x)^{-1} H_\epsilon(\epsilon, x)\| \leqslant h(\epsilon, \|x - x_0\|), \qquad 对于 (\epsilon, x) \in [0, 1] \times D•$$

令 $r^*(t)$ 为下列 Cauchy 问题的最大解

$$r'(\epsilon) = h(\epsilon, r), \quad r(0) = 0,$$

其有界且 $S = \left\{x: \|x - x_0\| \leqslant r^*(1)\right\} \subset D$• 那么 $x(\epsilon)$ 为 $(*)$ 的解且满足

$$x'(\epsilon) = -H_x(\epsilon, x)^{-1} H_\epsilon(\epsilon, x), \quad x(0) = x_0,$$

另外, 对于 $\epsilon \in [0, 1]$ 解 $x(\epsilon)$ 总落在 S 中• 特别地, $x(1)$ 是 $\Phi(x) = 0$ 的根•

上述命题的证明可见[4]•

现在, 我们划分区间 $[0, 2\pi]$ 为 N 个等分的小区间, 步长 $h = 2\pi/N$, 网格点 $t_i = ih$, $i = 0, 1, \cdots, N$• 设 $f(t)$ 是 t 的周期 2π 的连续复函数• 为简便起见, 记 $f_i = f(ih)$, $i = 0, 1, \cdots, N$ 为实序列, 则相应的离散 Fourier 变换和逆变换如下:

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-jhnk}, \quad f_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{jhnk},$$

其中 j 是复数单位•

下面是离散的 Parseval 定理•

定理 1 设 $f(t)$ 是 t 的周期 2π 的连续实函数, 其离散的 Fourier 变换如下:

$$F_l = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{N-1} (a_k \cos k t_l + b_k \sin k t_l) \qquad (l = 0, 1, \cdots, N-1),$$

其中

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f_i \cos ikh \qquad (k = 0, 1, \cdots, N-1),$$

$$b_k = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f_i \sin ikh \qquad (k = 0, 1, \cdots, N-1),$$

那么

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k^2 = \frac{1}{4} a_0^2 + \sum_{k=1}^{N-1} (a_k^2 + b_k^2)•$$

证明 令

$$\varphi_i = (1, e^{jih}, \cdots, e^{ji(N-1)h})^{\mathrm{T}} \qquad (i = 0, 1, \cdots, N-1)•$$

显然

$$(\varphi_l, \varphi_s) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{jlhk} e^{-jshk} = \begin{cases} 0 & l \neq s, \\ N & l = s. \end{cases}$$

因此,我们有

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F_k^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{i=1}^{N-1}(a_i\cos ikh + b_i\sin ikh)\right)^2 =$$

$$\frac{1}{4}a_0^2 + \sum_{k=1}^{N-1}(a_k^2 + b_k^2).$$

2 连续问题

在本节, 我们将给出连续问题(1)的一些结果.

Brown 和 Lin[3] 给出了问题(1)的 2π 周期解的存在唯一性证明, 但它不便于应用于离散化问题. 这里我们给出另一证明[5].

定理 2 当如下条件满足时, 问题(1)存在周期为 2π 的唯一解.

(H1) 存在两个对称的 $n \times n$ 常数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$, 使得

$$\boldsymbol{A} \leqslant \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{a})\right) \leqslant \boldsymbol{B} \qquad \forall \boldsymbol{a} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n;$$

(H2) 设 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ 及 $\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \cdots \leqslant \mu_n$ 为相应于 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的特征值, 则存在整数 N_k, $k = 1, 2, \cdots, n$, 满足条件

$$N_k^2 < \lambda_k \leqslant \mu_k < (N_k + 1)^2.$$

证明 设 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 和 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n$ 为满足

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_k = \lambda_k \boldsymbol{a}_k, \quad \langle \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_j \rangle = \delta_{kj}, \tag{12}$$

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{b}_k = \mu_k \boldsymbol{b}_k, \quad \langle \boldsymbol{b}_k, \boldsymbol{b}_j \rangle = \delta_{kj} \tag{13}$$

的向量, 其中 $j, k = 1, 2, \cdots, n$, $\langle\ ,\ \rangle$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 的内积, $\delta_{kj} = 0, k \neq j$; $\delta_{kj} = 1, k = j$. 设 V 表示 $C^2(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n)$ 的子空间, 由实向量空间 $C^2(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n)$ 的 2π 周期的元素构成. 我们定义 V 的子空间 X 和 Y 如下:

1) $x \in X$ 若

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} f_k(t) b_k, \tag{14}$$

$$f_k(t) = \sum_{r=N_k+1}^{\infty}(c_{kr}\cos rt + d_{kr}\sin rt), \tag{15}$$

其中 N_k 如定理 2 所述, 序列 f_k 与从(15) 逐项可微得到的序列同样在 $\mathbf{R}$ 上一致收敛.

2) $y \in Y$ 若

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} g_k(t) b_k, \tag{16}$$

$$g_k(t) = c_{k0} + \sum_{r=1}^{N_k}(c_{kr}\cos rt + d_{kr}\sin rt). \tag{17}$$

显然, $V = X \oplus Y$. 我们定义如下的泛函:

$$(\mathrm{L}u, v) \equiv (u', v') - (\nabla G(u), v) \qquad \forall u, v \in V. \tag{18}$$

由(18)并根据 $G \in C^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ 可以证明

$$(\mathrm{L}'(u)w, v) = (w', v') - \left(\frac{\partial^2 G(u)}{\partial x_i \partial x_j} w, v\right) \qquad \forall u, v, w \in V. \tag{19}$$

我们将证明 L 满足引理 2 的条件• 对 $x \in X$, $y \in Y$ 和 $u \in V$, 我们有

$$\langle L'(u)x, y\rangle = \langle L'(u)y, x\rangle \tag{20}$$

由(19)对任意 $u \in V$, $x \in X$ 及 $y \in Y$ 从 Parseval 定理可得

$$\langle L'(u)x, x\rangle = \sum_{k=1}^{n}\int_0^{2\pi} f_k'(t)^2\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n}\mu_k\int_0^{2\pi} f_k(t)^2\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=N_k+1}^{\infty}\pi(r^2-\mu_k)(c_{kr}^2+d_{kr}^2) \geqslant m_1$$

及

$$\langle L'(u)y, y\rangle = \sum_{k=1}^{n}\int_0^{2\pi} g_k'(t)^2\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n}\mu_k\int_0^{2\pi} g_k(t)^2\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{N_k}\pi(r^2-\lambda_k)(c_{kr}^2+d_{kr}^2) \leqslant -m_2$$

因此, L 满足引理 2 的条件• 所以, L 是到 V 上同胚映射• 证毕•

3 离散问题解的存在唯一性

本节我们将讨论离散问题的唯一可解性• 为简便起见, 我们采用如下记号:

$$D_+ w_i = \frac{w_{i+1} - w_i}{h}, \quad D_- w_i = \frac{w_i - w_{i-1}}{h}$$

及

$$D_+ D_- w_i = \frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i+1}}{h^2}•$$

现有, 我们在网格 $t_i (i = 1, 2, \cdots, N-1)$ 上按如下的格式逼近(1)•

$$\begin{cases} T^h(u_i) \equiv D_+ D_- u_i + \mathrm{grad}G(u_i) = p(t_i) \qquad (i = 1, 2, \cdots, N-1), \\ u_0 = u_N, \quad u_1 = u_{N-1}• \end{cases} \tag{21}$$

定理 3 设 $\boldsymbol{Q}$ 为 $n\times n$ 实对称矩阵, 其元素为 $\mathbf{R}$ 上的 2π 周期连续函数, 假设存在实对称常数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 使得

$$\boldsymbol{A} \leqslant \boldsymbol{Q}(t) \leqslant \boldsymbol{B} \qquad t \in (-\infty, \infty),$$

且 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ 和 $\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \cdots \leqslant \mu_n$ 相应代表 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的特征值, 存在整数 $N_k \geqslant 0$, $k = 1, 2, \cdots, n$, 满足

$$\left(\frac{\sin(N_k\pi/N)}{N_k\pi/N}\right)^2 N_k^2 < \lambda_k \leqslant \mu_k < \left(\frac{\sin((N_k+1)\pi/N)}{(N_k+1)\pi/N}\right)^2 (N_k+1)^2,$$

则差分方程

$$L^h(w_i) \equiv D_+ D_- w_i + Q(t_i)w_i = p(t_i) \qquad (i = 1, 2, \cdots, N-1) \tag{22}$$

不存在非平凡解• 且

$$\| w_i \|^h \leqslant P^{-1} \| p(t_i) \|^h,$$

其中

$$P = \min_{1\leqslant k\leqslant n}\left(\lambda_k - \left(\frac{\sin(N_k\pi/N)}{N_k\pi/N}\right)^2 N_k^2, \left(\frac{\sin((N_k+1)\pi/N)}{(N_k+1)\pi/N}\right)^2 (N_k+1)^2 - \mu_k\right),$$

$\| \quad \|^h$ 表示离散范数•

证明 设 V 表示实向量空间 $\mathbf{R}^n$ 子空间• 我们定义 V 的子空间 X 和 Y 如下:

1) $x \in X$ 若

$$x(t_i)=\sum_{k=1}^{n} f_k(t_i)\,b_k \qquad (i=0,1,\cdots,N), \tag{23}$$

$$f_k(t_i)=\sum_{r=N_k+1}^{N-1}(c_{kr}\cos rt_i+d_{kr}\sin rt_i) \qquad (i=0,1,\cdots,N), \tag{24}$$

其中 N_k 如定理 3•

2) $y \in Y$ 若

$$y(t_i)=\sum_{k=1}^{n} g_k(t_i)\,b_k \qquad (i=0,1,\cdots,N), \tag{25}$$

$$g_k(t_i)=c_{k0}+\sum_{r=1}^{N_k}(c_{kr}\cos rt_i+d_{kr}\sin rt_i) \qquad (i=0,1,\cdots,N)• \tag{26}$$

显然, $V=X\oplus Y$• 事实上, 对 $v\in V$, $v(t_i)=\sum_{k=1}^{n}\langle v(t_i),b_k\rangle b_k$• 由离散的Fourier级数理论便可得出• 我们在 V 上定义如下的双线性形H:

对 $u\in V$, $v\in V$,

$$H(u,v)\equiv(\mathrm{L}^h(u_i),v_i)=\sum_{i=0}^{N-1}(\langle \mathrm{D}_+u_i,\mathrm{D}_+v_i\rangle-\langle u_i,\boldsymbol{Q}v_i\rangle)•$$

因为 L^h 是线性算子, 我们有

$$((\mathrm{L}^h(w_i)')u_i,v_i)=H(u,v) \qquad \forall\, u,v,w\in V•$$

可以证明 H 在X 上是正定的• 为此, 设 $x\in X$, 由条件我们可得

$$H(x,x)\geqslant\sum_{i=0}^{N-1}(\langle \mathrm{D}_+x_i,\mathrm{D}_+x_i\rangle-\langle x_i,\boldsymbol{B}x_i\rangle)•$$

如果 x 由(23) 所表示, 根据离散的 Parseval 公式, 从(24) 可以推出

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{N-1}(\langle \mathrm{D}_+x_i,\mathrm{D}_+x_i\rangle-\langle x_i\boldsymbol{B}x_i\rangle)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{N-1}\mathrm{D}_+f_k^2-\sum_{k=1}^{n}\mu_k\sum_{i=0}^{N-1}f_k(t_i)^2=\\
&\quad\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{N-1}\left(\left(\sum_{r=N_k+1}^{N-1}(c_{kr}(\cos rt_{i+1}-\cos rt_i)+d_{kr}(\sin rt_{i+1}-\sin rt_i))\right)^2\right)-\\
&\quad\sum_{k=1}^{n}\mu_k\sum_{i=1}^{N-1}\left(\sum_{r=N_k+1}^{N-1}(c_{kr}\cos rt_i+d_{kr}\sin rt_i)\right)^2=\\
&\quad\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{h^2}\sum_{i=0}^{N-1}\left(\left(\sum_{r=N_k+1}^{N-1}(c_{kr}(\cos rh-1)+d_{kr}\sin rh)\cos rt_i+\right.\right.\\
&\quad\left.\left.(d_{kr}(\cos rh-1)+c_{kr}\sin rh)\sin rt_i\right)^2\right)-\\
&\quad\sum_{k=1}^{n}\mu_k\sum_{i=0}^{N-1}\left(\sum_{r=N_k+1}^{N-1}(c_{kr}\cos rt_i+d_{kr}\sin rt_i)\right)^2=\\
&\quad\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{h^2}\sum_{r=N_k+1}^{N-1}((c_{kr}(\cos rh-1)+d_{kr}\sin rh)^2+\\
&\quad(d_{kr}(\cos rh-1)-c_{kr}\sin rh)^2)-\sum_{k=1}^{n}\mu_k\sum_{r=N_k+1}^{N-1}\sum_{r=N_k+1}^{N-1}(c_{kr}^2+d_{kr}^2)=\\
&\quad\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=N_k+1}^{N-1}\frac{\sin^2(rh/2)}{(rh/2)^2}r^2(c_{kr}^2+d_{kr}^2)-\sum_{k=1}^{n}\mu_k\sum_{r=N_k+1}^{N-1}(c_{kr}^2+d_{kr}^2)=
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=N_k+1}^{N-1}\left(\frac{\sin^2(rh/2)}{(rh/2)^2}r^2-\mu_k\right)(c_{kr}^2+d_{kr}^2)\geqslant m_1>0.$$

类似可以证明 H 在 Y 上是负定的. 为此设 $y\in Y$, 由条件我们可得

$$H(y,y)\leqslant\sum_{i=0}^{N-1}(\langle D_+y_i, D_+y_i\rangle-\langle y_i, \boldsymbol{A}y_i\rangle).$$

如果 y 由(25) 所表示, 根据离散的 Parseval 公式, 从(26) 可以推出

$$\sum_{i=0}^{N-1}(\langle D_+y_i, D_+y_i\rangle-\langle y_i, \boldsymbol{A}y_i\rangle)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{N-1}D_+f_k^2-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\sum_{i=0}^{N-1}f_k(t_i)^2=$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{N-1}\left(\sum_{r=1}^{N_k}(c_{kr}(\cos rt_{i+1}-\cos rt_i)+d_{kr}(\sin rt_{i+1}-\sin rt_i))\right)^2-$$

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\sum_{i=0}^{N-1}\left(\sum_{r=1}^{N_k}c_{kr}\cos rt_i+d_{kr}\sin rt_i\right)^2=$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{h^2}\sum_{r=1}^{N_k}((c_{kr}(\cos rh-1)+d_{kr}\sin rh)^2+(d_{kr}(\cos rh-1)-c_{kr}\sin rh)^2)-$$

$$\sum_{k=1}^{n}\mu_k\sum_{r=N_k+1}^{N-1}\sum_{r=N_k+1}^{N-1}(c_{kr}^2+d_{kr}^2)=$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{N_k}\frac{\sin^2(rh/2)}{(rh/2)^2}r^2(c_{kr}^2+d_{kr}^2)-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\sum_{r=1}^{N_k}(c_{kr}^2+d_{kr}^2)=$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{N_k}\left(\frac{\sin^2(rh/2)}{(rh/2)^2}r^2-\lambda_k\right)(c_{kr}^2+d_{kr}^2)\leqslant-m_2<0.$$

应用引理 2, 本定理得证.

本节的主要定理如下:

定理 4 设 $G\in C^2(\mathbf{R}^n,\mathbf{R})$. 如果存在两个常数实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 使得

$$\boldsymbol{A}\leqslant\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x_i\partial x_j}(\boldsymbol{a})\right)\leqslant\boldsymbol{B}\qquad\forall\,\boldsymbol{a}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$$

且 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$ 及 $\mu_1\leqslant\mu_2\leqslant\cdots\leqslant\mu_n$ 相应表示$\boldsymbol{A}$ 和$\boldsymbol{B}$ 的特征值, 存在整数 $N_k\geqslant 0$, $k=1,2,\cdots,n$, 使

$$\left(\frac{\sin(N_k\pi/N)}{N_k\pi/N}\right)^2N_k^2<\lambda_k\leqslant\mu_k<\left(\frac{\sin((N_k+1)\pi/N)}{(N_k+1)\pi/N}\right)^2(N_k+1)^2,$$

则差分问题(21) 不存在非平凡解.

证明 定义泛函

$$T(u,v)\equiv(\mathrm{T}^h(u_i),v_i)=\sum_{i=0}^{N-1}(\langle D_+u_i, D_+v_i\rangle-\langle\operatorname{grad}(u_i),v_i\rangle),$$

其中任意 $u,v\in V$. 如果我们设 $Q(w_i)=(\partial^2G/\partial x_i\partial x_k)(w_i)$, 显然, 对任意 $u,v,w\in V$ 有

$$(T'(w)u,v)\equiv((\mathrm{T}^h(w_i))'u_i,v_i)=\sum_{i=0}^{N-1}(\langle D_+u_i, D_+v_i\rangle-\langle Q(w_i)u_i,v_i\rangle).$$

根据引理 2 和定理3, 不难发现(21) 有唯一解. 定理得证.

4 离散范数下的精度

考虑局部截断误差 R_i, $i=0,1,\cdots,N$,

$$R_i = \mathrm{T}^h(u_i) - \mathrm{T}^h(u(t_i)),$$

显然 $R_i = O(h)$, $i = 0, 1, \cdots, N$。 根据格式(21), 我们有

$$\Delta L^h w_i \equiv D_+ D_- w_i + \nabla G(u_i) - \nabla G(u(t_i)) =$$

$$D_+ D_- w_i + \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x_l \partial x_k}\right) w_i = O(h),$$

其中 $w_i = u_i - u(t_i)$。

应用引理 3, 我们得出如下定理:

定理 5 设 $G \in C^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$。 如果存在两个常数实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 使得

$$\boldsymbol{A} \leqslant \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{a})\right) \leqslant \boldsymbol{B} \qquad \forall \boldsymbol{a} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n,$$

且 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ 和 $\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \cdots \leqslant \mu_n$ 相应表示 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的特征值, 存在整数 $N_k \geqslant 0$, $k = 1, 2, \cdots, n$, 使

$$N_k^2 < \lambda_k \leqslant \mu_k < \left(\frac{\sin((N_k + 1)\pi/N)}{(N_k + 1)\pi/N}\right)^2 (N_k + 1)^2.$$

设 $u(t_i)$ 和 u_i 相应表示连续问题(1) 和离散问题(21) 的解, 则我们有

$$\| u_i - u(t_i) \| \leqslant \delta^{-1} h,$$

其中

$$\delta = \min_{1 \leqslant k \leqslant n} \min\left(\lambda_k - N_k^2, \left(\frac{\sin((N_k + 1)\pi/N)}{(N_k + 1)\pi/N}\right)^2 (N_k + 1)^2 - \mu_k\right).$$

证明 由定理 3 直接可证明本定理。

5 算法及算例

在这一节里, 我们将利用参数映射方法构造一类简单的算法用于求解非线性差分问题(21)。 为此, 构造参数映射如下

$$\mathrm{T}^h(u_i) \equiv D_+ D_- u_i + \mathrm{grad}G(u_i) = \epsilon p(t_i) \qquad (i = 1, 2, \cdots, N - 1), \tag{27}$$

其中 ϵ 是在区间[0, 1] 上取值的参数。 显然, 由前面的讨论可知对一切 ϵ, 上述差分方程均有唯一解 $u(\epsilon, t_i)$。 当 $\epsilon = 0$ 时, $u(0, t) \equiv 0$。 当 $\epsilon = 1$ 时, $u(1, t)$ 为原问题(21) 的解。 根据命题1 可知, $u(1, t)$ 可以通过求解映射方程(27) 得到。 现在, 将参数区间[0, 1] 均匀剖分为 M 个小区间, 其网格步长为 $\tau = 1/M$, 网格点 $\epsilon_i = i\tau$ 满足:

$$0 = \epsilon_0 < \epsilon_1 < \cdots < \epsilon_M = 1. \tag{28}$$

另外, 将自变量区间 $[0, 2\pi]$ 分成 N 个小区间, 其步长为 $h = 2\pi/N$。 记 $u_i^{(j)} = u(j\tau, ih)$。 相应的差分方程为

$$D_+ D_- u_i^{(j)} + \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x_l \partial x_k}\right)(u^{(j-1)}) u_i^{(j)} = \epsilon_j p(t_i)$$

$$(j = 1, 2, \cdots, M;\ i = 1, 2, \cdots, N - 1);$$

其初始条件 $(\epsilon = 0)$ 为

$$u_i^{(0)} = 0 \qquad (i = 0, 1, \cdots, N);$$

边界条件为

$$u_0^{(j)} = u_N^{(j)}, \quad u_1^{(j)} = u_{N-1}^{(j)} \qquad (j = 1, 2, \cdots, M).$$

显然, 在上述求解过程中我们每一步只需要解一个线性方程。

例子　求下列方程的 2π 周期解

$$\begin{cases} Tu = u''(t) + 2u(t) + \sin(u(t)/\sqrt{2}) = \sin t + \sin(\sin t/\sqrt{2}), \\ u(0) = u(2\pi),\ u'(0) = u'(2\pi). \end{cases}$$

相应的离散化问题

$$\begin{cases} T^{\tau}u \equiv D_+ D_- u_i + 2u_i + \sin(u_i/\sqrt{2}) = \sin ih + \sin(\sin ih/\sqrt{2}) \\ \qquad (i = 1, 2, \cdots, N - 1), \\ u_0 = u_N,\ u_1 = u_{N-1}. \end{cases}$$

取 $N = 100$, 不难验证该问题及其相应的差分方程存在唯一解. 利用参数映射方法构造算法如下:

$$D_+ D_- u_i^{(j)} + 2 + \cos(u_i^{(j-1)}/\sqrt{2})/\sqrt{2}u_i^{(j)} = \xi(\sin ih + \sin(\sin ih/\sqrt{2}))$$
$$(j = 1, 2, \cdots, M;\ i = 1, 2, \cdots, N - 1);$$

其初始条件为

$$u_i^{(0)} = 0, 1, 2, \cdots, N;$$

边界条件为

$$u_0^{(j)} = u_N^{(j)},\ u_1^{(j)} = u_{N-1}^{(j)} \qquad (j = 1, 2, \cdots, M).$$

我们在计算中取 $M = 20$, 得到数值解以精度 $h = 0.01$ 量级逼近精确解 $u(t) = \sin t$.

[参 考 文 献]

[1] Lazer A C, Sanches D A. On periodically perturbed conservative systems[J]. Mich Math Ⅰ, 1969, **16**(2): 193—200.

[2] Amaral L, Pera M P. On periodic solutions of nonconservative systems[J]. Nonlinear Analysis, 1982, **6**(7): 733—743.

[3] Brown K J, Lin S S. Periodically perturbed conservative systems and a global inverse function theorem[J]. Nonlinear Analysis, 1980, **4**(1): 193—201.

[4] Meyer G H. On solving nonlinear equations with a one_parameter operator imbedding[J]. SIAM J Numer Anal, 1968, **5**(4): 739—752.

[5] Lazer A C. Application of Lemma on bilinear forms to a problem in nonlinear Oscillations[J]. Proc Amer Math Soc, 1972, **33**(1): 89—94.

[6] Dunford V, Schwartz J T. Linear Operator[M]. Vol Ⅱ, New York: Interscience, 1963, 1289.

[7] Hadamard J. Sur les transformation ponctuelles[J]. Bull Cos Math Fr, 1906, **34**(1): 71—84.

[8] Li W, Shen Z. A construction proof of the periodic solution of Duffing equation[J]. Chinese Science Bulletin, 1997, **22**(42): 1591—1594.

[9] Plastick R. Homeomorphism between Banach space[J]. Trans Amer Math Soc, 1974, **200**(1): 169—183.

[10] Raduiescu M, Raduiescu S. Global inversion theorems and applications to differential equations[J]. Nonlinear Analysis, 1980, **4**(4): 951—965.

[11] Shen Z. On the periodic solution to the Newtonian equation of motion[J]. Nonlinear Analysis, 1989, **13**(2): 145—149.

On Numerical Solutios of Periodically Perturbed Conservative Systems

LIU Guo_qing[1], FU Dong_sheng[2], SHEN Zu_he[2]

(1. Department of Basic Science, Nanjing University of Chemical Technology, Nanjing 210009, P R China;
2. Department of Mathematics, Nanjing University, Nanjing 210093, P R China)

Abstract: A nonlinear perturbed conservative system is discussed. By means of Hadamard's theorem, the existence and uniqueness of the solution of the continuous problem are proved. When the equation is discreted on the uniform meshes, it is proved that the corresponding discrete problem has a unique solution. Finally, the accuracy of the numerical solution is considered and a simple algorithm is provided for solving the nonlinear difference equation.

Key words: nonlinear system; numerical solution; uniqueness and existence; algorithm