文章编号: 1000_0887(2002) 02_0217_04

块 H_矩阵与块矩阵的谱*

黄廷祝[1]，　黎　稳[2]

(1. 电子科技大学 应用数学学院, 成都 610054; 2. 华南师范大学 数学系, 广州 510641)

(张鸿庆推荐)

摘要：　利用 G_函数概念研究块 H_矩阵, 引入若干块矩阵概念• 获得了块 H_矩阵的等价刻划, 得到了一般块矩阵特征值的由 G_函数描述的分布域, 由于用 G_函数刻划, 所获结果具有一般性•

关　键　词:　块 H_矩阵;　谱;　G_函数;　特征值;　不可约矩阵

中图分类号:　O241.6; O151.26　　　文献标识码:　A

引　　言

设 $\boldsymbol{A} \in C^{n,n}$, 且进行如下分块:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1k} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{A}_{k1} & \boldsymbol{A}_{k2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{kk} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{A}_{ii} \in C^{n_i, n_i}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$• $\boldsymbol{A}_{ii}(1 \leqslant i \leqslant k)$ 非奇• 在大量实际应用中, 子矩阵 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 是稀疏的且常常很多是零矩阵•

定义 1　设 $\boldsymbol{B} = (b_{ij}) = (\|\boldsymbol{A}_{ij}\|)_{k\times k}$ 不可约, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为块不可约的, 这里 $\|\cdot\|$ 是诱导矩阵范数•

定义 2[1]　设 $\boldsymbol{f} = (f_1, \cdots, f_n)$, $f_i(\boldsymbol{A}): C^{n,n} \to \mathbf{R}^+$, $i = 1, \cdots, n$, 仅依赖于 $\boldsymbol{A}$ 的非对角元的模, 若 $\forall \boldsymbol{A} \in C^{n,n}$,

$$|a_{ii}| > f_i(\boldsymbol{A}) \qquad (i = 1, \cdots, n),$$

则 $\boldsymbol{A}$ 非奇• 那么就称 $\boldsymbol{f} = (f_1, \cdots, f_n)$ 为一个 G_函数, 记为 $\boldsymbol{f} \in g_n$•

定义 3　若

$$\|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1} > \sum_{j\neq i} \|\boldsymbol{A}_{ij}\| \qquad (i = 1, \cdots, k),$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为块严格对角占优矩阵, 记为 $\boldsymbol{A} \in \mathrm{BD}$[2]; 若存在 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_k)^{\mathrm{T}} > 0$ 使得

$$x_i \|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1} > \sum_{j\neq i} x_j \|\boldsymbol{A}_{ij}\| \qquad (i = 1, \cdots, k),$$

* 收稿日期:　1999_09_27;　修订日期:　2001_09_14
基金项目:　四川省青年科学基金资助项目(Jsa1081)
作者简介:　黄廷祝(1964—), 男, 成都人, 教授, 博士, 博士生导师.

则称 $\boldsymbol{A}$ 为块H_矩阵[3,4,5], 记为 $\boldsymbol{A}\in \mathrm{BH}$•

块H_矩阵在数值分析,控制论等领域中发挥着重要作用• 本文中,我们利用G_函数研究几类块对角占优性的推广,获得了块H_矩阵的几个等价表征• 同时,也得到了由G_函数刻划的分块矩阵的特征值分布域•

1 主要结果

我们总设 $\boldsymbol{A}\in C^{n,n}$ 且形如(1),记 $N=\{1,\cdots,n\}$, $K=\{1,\cdots,k\}$, $\boldsymbol{T}=(t_{ij})\in R^{k,k}$,其中

$$t_{ii}=\|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1},\quad t_{ij}=-\|\boldsymbol{A}_{ij}\|,\qquad (i,j\in K,\ i\neq j)•$$

$\boldsymbol{I}_n$ 是 n 阶单位矩阵•

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in C^{n,n}$,记

$$R_i^x(\boldsymbol{A})=\frac{1}{x_i}\sum_{j\neq i}x_j|a_{ij}|,\qquad x_i>0,\ i\in N,$$

显然 $\boldsymbol{R}^x=(R_1^x,\cdots,R_n^x)\in g_n$[5]•

引理1[6] 设 $\boldsymbol{A}$ 形如(1),若 $\boldsymbol{A}\in \mathrm{BH}$,则 $\boldsymbol{A}$ 非奇•

推论1 设 $\boldsymbol{A}$ 形如(1),则 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值均位于下列区域中:

$$\bigcup_{i=1}^{k}G_i=\bigcup_{i=1}^{k}\left\{\lambda\in\mathbf{C}:\ \|(A_{ii}-\lambda I_{n_i})^{-1}\|^{-1}\leqslant R_i^x(\boldsymbol{T}),\ \boldsymbol{x}_i>0,\ i\in K\right\}•$$

证明 假若存在 $\boldsymbol{A}$ 的某个特征值 λ 使得 $\lambda\overline{\in}\bigcup_{i=1}^{k}G_i$,则存在 $x_i>0(i\in K)$,使得

$$\|(\boldsymbol{A}_{ii}-\lambda I_{n_i})^{-1}\|^{-1}>R_i^x(\boldsymbol{T}),\qquad i\in K•$$

于是 $\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}\in \mathrm{BH}$,因而 $\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}$ 非奇• 这与 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值矛盾•

定理1 $\boldsymbol{A}\in \mathrm{BH}$ 的充要条件为存在正数 $x_i(i\in K)$ 使得

$$x_i\|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1}\geqslant\sum_{j\neq i}x_j\|\boldsymbol{A}_{ij}\|,\qquad i\in K,$$

且

$$Q=\left\{i\in K:x_i\|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1}>\sum_{j\neq i}x_j\|\boldsymbol{A}_{ij}\|\right\}\neq\varnothing$$

$\forall i\in Q$,存在非零块链 $\boldsymbol{A}_{i_0i_1},\boldsymbol{A}_{i_1i_2},\cdots,\boldsymbol{A}_{i_si_t}$,使得 $i_t\in Q$•

证明 ←:由假设,我们可以推知存在的正对角矩阵 $\boldsymbol{X}=\mathrm{diag}(x_1\boldsymbol{I}_{n_1},\cdots,x_k\boldsymbol{I}_{n_k})$, $x_i>0$,使得 $\boldsymbol{AX}$ 为块对角占优矩阵(不一定为严格的),且 $\boldsymbol{AX}$ 也是具非零块链块对角占优矩阵,则由[7],我们有

$$\boldsymbol{AX}\in \mathrm{BH}•$$

所以,存在正对角矩阵 $\boldsymbol{Y}=\mathrm{diag}(y_1\boldsymbol{I}_{n_1},\cdots,y_k\boldsymbol{I}_{n_k})$ 使得

$$\boldsymbol{AXY}\in \mathrm{BD}•$$

由于 $\boldsymbol{XY}$ 仍然为正对角矩阵,故由定义3, $\boldsymbol{A}\in \mathrm{BH}$•

→:显然•

定义4 若存在 $\boldsymbol{f}\in g_k$,使得

$$\|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1}>f_i(T(\boldsymbol{A}))\qquad i\in K,$$

则称 $\boldsymbol{A}\in \mathrm{BGD}$;若

$$\|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1}\|\boldsymbol{A}_{jj}^{-1}\|^{-1}>f_i(T(\boldsymbol{A}))f_j(T(\boldsymbol{A}))\qquad i\neq j;\ i,j\in K,$$

则称 $A \in \mathrm{BGD}_m$•

定理 2 $A \in \mathrm{BH} \Leftrightarrow A \in \mathrm{BGD} \Leftrightarrow A \in \mathrm{BGD}_m$•

证明 $A \in \mathrm{BH} \Rightarrow A \in \mathrm{BGD}$: 若 $A \in \mathrm{BH}$, 则存在 $x = (x_1, \cdots, x_k)^{\mathrm{T}} > 0$, 使得

$$\|A_{ii}^{-1}\|^{-1} > R_i^x(T), \qquad i \in K, \tag{2}$$

由 $R^x \in g_k$ 和(2), 我们有 $A \in \mathrm{BGD}$•

$A \in \mathrm{BGD} \Rightarrow A \in \mathrm{BGD}_m$: 显然•

$A \in \mathrm{BGD}_m \Rightarrow A \in \mathrm{BH}$: 若 $A \in \mathrm{BGD}_m$, 即, 存在 $f \in g_k$ 使得

$$\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}\|A_{jj}^{-1}\|^{-1} > f_i(T)f_j(T), \qquad i \neq j; i, j \in K, \tag{3}$$

则由[7], T 非奇• $\forall \varepsilon \geqslant 0$, 由(3), 我们有

$$(\|A_{ii}^{-1}\|^{-1} + \varepsilon)(\|A_{jj}^{-1}\|^{-1} + \varepsilon) \geqslant \|A_{ii}^{-1}\|^{-1}\|A_{jj}^{-1}\|^{-1} >$$
$$f_i(T + \varepsilon I_k)f_j(T + \varepsilon I_k), \qquad i \neq j; i, j \in K,$$

因而 $T + \varepsilon I_k$ 也非奇• 又, $T \in Z^{k,k} = \left\{(a_{ij}) \in R^{k,k}: a_{ij} \leqslant 0, i \neq j\right\}$, 故 T 为非奇M_矩阵• 所以存在 $x = (x_1, \cdots, x_k)^{\mathrm{T}} > 0$, 使得 TX_1 为严格对角占优矩阵, 其中 $X_1 = \mathrm{diag}(x_1, \cdots, x_k)$• 于是取正对角阵 $X = \mathrm{diag}(x_1 I_{n_1}, \cdots, x_k I_{n_k})$, 则 $AX \in \mathrm{BD}$, 因而 $A \in \mathrm{BH}$•

定理 3 设 A 形如(1), 则 A 的所有特征值位于如下区域之中:

$$\bigcup_{i=1}^{k} G_i = \bigcup_{i=1}^{k}\left\{\lambda \in \mathbf{C}: \|(A_{ii} - \lambda I_{n_i})^{-1}\|^{-1} \leqslant f_i(T), f \in g_k\right\}•$$

证明 假若存在 A 的某特征值 λ 满足 $\lambda \overline{\in} \bigcup_{i=1}^{k} G_i$, 则

$$\|(A_{ii} - \lambda I_{n_i})^{-1}\|^{-1} > f_i(T(A)) = f_i(T(A - \lambda I_n)) \qquad i \in K•$$

由 $f = (f_1, \cdots, f_k) \in g_k$, 有 $A \in \mathrm{BGD}$, 于是 $A - \lambda I_n$ 非奇, 即 λ 非 A 的特征值• 矛盾•

由定理 2, 我们容易得到如下定理•

定理 4 A 的所有特征值位于如下区域之中:

$$\bigcup_{i\neq j} G_{i,j} = \bigcup_{i\neq j}\left\{\lambda \in \mathbf{C}: \|(A_{ii} - \lambda I_{n_i})^{-1}\|^{-1}\|(A_{jj} - \lambda I_{n_j})^{-1}\|^{-1} \leqslant f_i(T(A))f_j(T(A)), f \in g_k\right\}•$$

下面我们给出块 H_矩阵的一个等价条件•

定理 5 设 A 形如(1), 块不可约, 则 A 为块 H_矩阵的充要条件为存在 $f \in g_k$ 使得

$$\|A_{ii}^{-1}\|^{-1} \geqslant f_i(T(A)) \qquad i \in K, \tag{4}$$

且(4)中至少存在一个严格不等式•

证明 ⇐: 由假设, 存在 $f \in g_k$ 使得

$$\|A_{ii}^{-1}\|^{-1} \geqslant f_i(T(A)) \qquad i \in K,$$

且至少存在一个严格不等式• 因 $T(A)$ 不可约, 由[1], 存在 $x = (x_1, \cdots, x_k)^{\mathrm{T}} > 0$, 使得

$$f_i(T(A)) \geqslant R_i^x(T(A)) \qquad i \in K•$$

于是

$$\|A_{ii}^{-1}\|^{-1} \geqslant f_i(T(A)) \geqslant R_i^x(T(A)) = \frac{1}{x_i}\sum_{j\neq 1} x_j\|A_{ij}\| \qquad i \in K,$$

且至少存在一个严格不等式, 即, 存在 $X_1 = \mathrm{diag}(x_1, \cdots, x_k)$, $x_i > 0\ (i \in K)$, 使得 $T(A)X_1$ 为不可约对角占优的, 从而 $T(A)X_1$ 是广义对角占优矩阵, 即存在正对角阵 $Y = \mathrm{diag}(y_1, \cdots, y_k)$, 使得 $T(A)X_1Y$ 为严格对角占优矩阵• 因而, 取 $X = \mathrm{diag}(x_1y_1I_{n_1}, \cdots, x_ky_kI_{n_k})$, 则 $AX \in$

BD• 故 $\boldsymbol{A} \in$ BH•

$\rightarrow$: 由 $\boldsymbol{R}^x = (R_i^x, \cdots, R_i^x) \in g_k$ 知结论显然•

[参 考 文 献]

[1] Carlson D H, Varga R S. Minimal G_functions[J]. Lin Alg Appl, 1973, (6): 97—117.

[2] Feingold D G, Varga R S. Block diagonally dominant matrices and generalizations of the Gerschgorin circle theorem[J]. Pacific J Math, 1962, (12): 1241—1249.

[3] Polman B. Incomplete block wise factorization of (block) H_matrices[J]. Lin Alg Appl, 1987, (90): 119—132.

[4] 白中治. 并行多分裂松弛迭代法[J]. 计算数学, 1995, **17**(4): 238—252.

[5] 黄廷祝, 蒲和平. (块)H_矩阵与亚正定矩阵[J]. 电子科技大学学报, 1998, **27**(5): 216—218.

[6] 黄廷祝. G_函数和谱性质[J]. 西安交通大学学报, 1992, **26**(5): 113—115.

[7] 游兆永, 姜宗乾. 矩阵的块对角占优性[J]. 西安交通大学学报, 1984, **18**(3): 123—125.

[8] 黄廷祝, 游兆永. 矩阵的块 G_对角占优性[J]. 工程数学学报, 1993, **10**(3): 75—80.

[9] Huang Ting_zhu. On generalized diagonally dominant matrices[J]. Lin Alg Appl, 1995, (225): 237—242.

Block H_Matrices and Spectrum of Block Matrices

HUANG Ting_zhu[1], LI Wen[2]

(1. Fanculty of Applied Mathematics, University of Electronic Science & Technology of China, Chengdu 610054, P R China;

2. Department of Mathematics, South China Normal University, Guangzhou 510641, P R China)

Abstract: The block H_matrices are studied by the concept of G_functions, several concepts of block matrices are introduced. Equivalent characters of block H_matrices are obtained. Spectrum localizations characterized by G_functions for block matrices are got.

Key words: block H_matrix; spectrum; G_function; eigenvalue; irreducible matrix