

文章编号: 1000-0887(2002) 01-0001-10

具有分数导数本构关系的粘弹性 Timoshenko 梁的静动力学行为分析*

朱正佑^{1,2}, 李根国³, 程昌钧^{1,4}

(1. 上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海, 200072; 2. 上海大学 数学系, 上海 200072;
3. 上海超级计算中心, 上海 201203; 4. 上海大学 力学系, 上海 200072)

(本刊编委程昌钧来稿)

摘要: 利用粘弹性材料的三维分数导数型本构关系, 建立粘弹性 Timoshenko 梁的静、动力学行为研究的数学模型; 分析 Timoshenko 梁在阶跃载荷作用下的准静态力学行为, 得出了问题的解析解, 考察了一些材料参数对梁的挠度的影响. 基于模态函数讨论了粘弹性 Timoshenko 梁在横向简谐激励作用下的动力响应, 并考察了剪切和转动惯性对梁振动响应的影响

关键词: 粘弹性 Timoshenko 梁; 分数导数型本构关系; 弱奇异性 Volterra 积分_微分方程; 动力响应

中图分类号: O165.6; O345 **文献标识码:** A

引 言

Gement 在二十世纪 30 年代首先采用分数导数描述了粘弹性材料的本构关系^[1], 但直到 80 年代分数导数本构关系才受到广泛的重视^[2,3]. 这种本构关系仅用少量的参数构成粘弹性材料的数学模型, 并能在较大的频率范围内描述材料的力学性能. 虽然已有不少工作利用分数导数本构关系研究粘弹性材料, 但相应材料制成的结构的力学行为研究较少^[4]. 主要原因是所建立的控制结构动力学行为的方程为具有奇异性的积分_偏微分方程, 它们的定性分析和数值计算都比较困难.

对粘弹性 Euler-Bernoulli 梁和 Timoshenko 梁的静、动力学行为的研究已有一些工作, 其本构关系多为微分型^[5]、Boltzmann 叠加原理^[6]或 Leaderman 本构关系^[7], 松弛函数表示成 Prony 级数. Akoz 和 Kadioglu^[6] 利用对应原理和数值 Laplace 逆变换方法讨论了线性粘弹性 Timoshenko 梁的静、动力学行为. Argyris^[5]、陈立群和程昌钧^[7] 采用 Galerkin 方法和微分动力系统的数值方法研究了非线性粘弹性 Euler-Bernoulli 梁的动力学行为.

本文在第 1 节中从粘弹性材料的三维分数导数型本构关系出发, 根据 Timoshenko 梁的位移假设, 建立粘弹性 Timoshenko 梁的静、动力学行为分析的数学模型. 然后在第 2 节中分析

* 收稿日期: 2000_10_27; 修订日期: 2001_08_23

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19772027); 上海市科学技术发展基金(98JC14032)及上海市教委发展基金资助项目(99A01)

作者简介: 朱正佑(1937—), 男, 浙江海盐人, 教授, 博士生导师.

Timoshenko 梁在阶跃载荷作用下的准静态力学行为, 得出了问题的解析解, 考察了一些材料参数对梁的挠度的影响。最后在第 3 节中对于两端简支梁给出模态函数, 讨论了粘弹性 Timoshenko 梁在横向简谐激励作用下的稳态响应, 并分别考察了剪切和转动惯性对梁振动响应的影响。

1 数学模型

Euler-Bernoulli 梁的理论是建立在平截面假设的基础上, 忽略了剪切变形的影响, 这对于细长的梁能给出十分正确的结果。但对于短而粗的梁, 这种理论有较大的偏差。二十世纪 20 年代, Timoshenko 提出了梁的修正理论, 保留了平截面的假设, 但认为梁的横截面变形后发生了一个转角。Timoshenko 梁的理论计及了横截面剪切变形和转动惯性的影响。

考察如图 1 所示的梁, 设 Ox 轴为截面的中性轴, oy, α 轴为截面的惯性主轴。设梁是等截面的, 面积为 A , 高为 h , 长为 L , 密度为 ρ , 作用于梁的载荷在 xy 平面上的分量为 $q(x, t)$, 在 xz 平面上的分量为 $p(x, t)$ 。

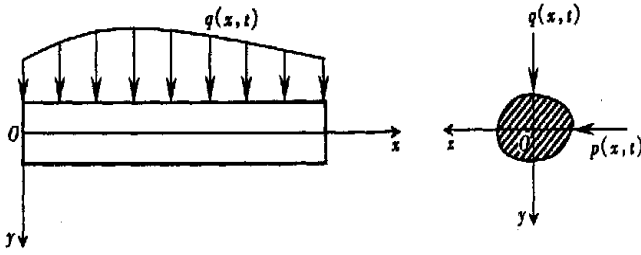


图 1 Timoshenko 梁示意图

假设梁的材料是均匀各向同性粘弹性材料, 其体积变形为弹性变形, 即

$$\sigma_{kk}(t) = 3K\varepsilon_{kk}(t), \quad (1)$$

其中, K 为体积弹性模量。材料在纯剪切作用下的变化规律由分数型本构关系所制约, 即

$$\tau_{ij}(t) = 2(G\varepsilon_{ij} + \eta \mathcal{D}^\alpha \varepsilon_{ij}(t)) \quad (i = j, i, j = 1, 2, 3), \quad (2)$$

其中, G 为剪切弹性模量, η, α 是参数, $0 < \alpha < 1$, $\mathcal{D}^\alpha f(t)$ 是 Riemann-Liouville 分数导数, 定义为^[8]

$$\mathcal{D}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \quad (0 < \alpha < 1). \quad (3)$$

Riemann-Liouville 分数积分为

$$\mathcal{I}^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\beta}} d\tau \quad (0 < \beta < 1), \quad (4)$$

这里 $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ 是 Γ 函数, $f(t)$ 是 $[0, +\infty]$ 上的有界连续函数。

当 $f(0) = 0$ 时, 满足

$$\mathcal{D}^\alpha \mathcal{I}^\alpha f(t) = f(t), \quad \mathcal{I}^\alpha \mathcal{D}^\alpha f(t) = f(t). \quad (5)$$

分数导数的 Laplace 变换公式为

$$\mathcal{L}[\mathcal{D}^\alpha f(t)] = s^\alpha \mathcal{L}[f(t)]. \quad (6)$$

由(1)和(2)可得三维粘弹性材料的分数微分型本构关系

$$2(G + \eta \mathcal{D}^\alpha) \varepsilon_{ij}(t) = \sigma_{ij}(t) - \left[1 - \frac{2}{3K}(G + \eta \mathcal{D}^\alpha) \frac{\sigma_{kk}(t)}{3} \right] \delta_{ij}. \quad (7)$$

根据梁变形的假设, 应力分量 α_y , α_z 和 τ_{yz} 对变形的影响可被忽略, 于是由(7) 得到梁的本构关系

$$\begin{cases} S_1 \alpha_x(t) = S_2 \varepsilon_x(t), \\ \tau_{xz}(t) = 2S_3 \varepsilon_{xz}(t), \\ \tau_{xy}(t) = 2S_3 \varepsilon_{xy}(t), \end{cases} \quad (8)$$

其中, 线性算子 $S_i (i = 1, 2, 3)$ 定义为

$$S_1 = 3K + G + \eta \mathcal{D}^\alpha, \quad S_2 = 9K(G + \eta \mathcal{D}^\alpha), \quad S_3 = G + \eta \mathcal{D}^\alpha. \quad (9)$$

根据 Timoshenko 梁理论, 位移假设为^[9]

$$\begin{cases} U(x, y, z, t) = u(x, t) + y\varphi(x, t) + z\psi(x, t), \\ V(x, y, z, t) = v(x, t), \\ W(x, y, z, t) = w(x, t), \end{cases} \quad (10)$$

式中, φ , ψ 分别是 y 和 z 轴的转角. 于是应变为

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi}{\partial x} + z \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\varphi + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\psi + \frac{\partial w}{\partial x} \right). \quad (11)$$

由梁的平衡, 不难得到以 u, v, w, φ, ψ 表示的 Timoshenko 梁的平衡方程

$$\begin{cases} S_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho S_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \zeta S_3 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + q(x, t) = \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \zeta S_3 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + p(x, t) = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ I_z S_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \zeta A S_1 S_3 \left(\varphi + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \rho_z S_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \\ I_y S_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \zeta A S_1 S_3 \left(\psi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \rho_y S_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \end{cases} \quad (12)$$

其中, $I_y = \int_A z^2 dA(x)$, $I_z = \int_A y^2 dA(x)$, ζ 为剪切修正系数. (12) 为一般粘弹性 Timoshenko 梁的控制方程.

假设梁只受 xy 面内的力 $q(x, t)$, 则弯曲只发生在 xy 平面内, 因而 $\psi = 0, w = 0$. 若不受轴力作用, 故可认为位移 $u = 0$. 因此(12) 简化为

$$\begin{cases} \zeta A S_3 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + q(x, t) = \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ I_z S_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \zeta A S_1 S_3 \left(\varphi + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \rho_z S_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \end{cases} \quad (13)$$

设梁两端是简支的, 则边界条件为

$$v(x, t) = 0, \quad \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (\text{当 } x = 0, x = L \text{ 时}). \quad (14)$$

给定初值条件

$$v(x, t_0) = v_0, \quad \frac{\partial v(x, t_0)}{\partial t} = v_1 \quad (0 \leq x \leq L), \quad (15a)$$

$$\varphi(x, t_0) = \varphi_0, \quad \frac{\partial \varphi(x, t_0)}{\partial t} = \varphi_1 \quad (0 \leq x \leq L). \quad (15b)$$

积分_偏微分方程组(13) 及其边界条件(14) 和初值条件(15) 构成简支粘弹性 timoshenko 梁的动

力学行为的控制方程。作为特殊情况,当忽略梁的剪切效应时,得到本构关系为分数微分型的粘弹性 Euler-Bernoulli 梁控制方程

$$I_z S_2 \frac{\partial^4 v_E}{\partial x^4} + \rho A S_1 \frac{\partial^2 v_E}{\partial t^2} = S_1 q \quad (16)$$

2 梁的拟静态行为

2.1 方程求解

我们考虑简支粘弹性 Timoshenko 梁在准静态情况下的力学行为,设梁受均布载荷 $q(x, t) = q_0 H(t)$, q_0 为常数, $H(t)$ 是单位 Heaviside 函数。

在(13)中忽略惯性项,得到挠度 $v(x, t)$ 和转角 $\varphi(x, t)$ 满足的准静态方程为

$$\begin{cases} \zeta A S_3 \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] + q(x, t) = 0, \\ I_z S_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \zeta A S_1 S_3 \left[\varphi + \frac{\partial v}{\partial x} \right] = 0, \end{cases} \quad (17)$$

其边界条件为(14)。利用弹性与粘弹性的对应原理,得到在 Laplace 变换域中粘弹性 Timoshenko 梁满足的方程

$$\begin{cases} \zeta A S_3 \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] + \frac{q_0}{s} = 0, \\ I_z S_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \zeta A S_1 S_3 \left[\varphi + \frac{\partial v}{\partial x} \right] = 0, \end{cases} \quad (18)$$

其中 $v(x, s) = \mathcal{L}[v(x, t)]$, $\varphi(x, s) = \mathcal{L}[\varphi(x, t)]$, $S_1 = \mathcal{L}[S_1] = 3K + G + \eta s^\alpha$,
 $S_2 = \mathcal{L}[S_2] = 9K(G + \eta s^\alpha)$, $S_3 = \mathcal{L}[S_3] = G + \eta s^\alpha$,

对应的边界条件为

$$v(0, s) = 0, \quad v(L, s) = 0, \quad (19a)$$

$$\frac{\partial \varphi(0, s)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varphi(L, s)}{\partial x} = 0. \quad (19b)$$

由(18)和(19)求得

$$v(x, s) = \left[\frac{1}{9Ks} + \frac{1}{3(G + \eta s^\alpha)s} \right] \frac{q_0 L^4}{24I_z} \frac{x}{L} \left[\frac{x^3}{L^3} - 2 \frac{x^2}{L^2} + 1 \right] + \frac{1}{(G + \eta s^\alpha)s} \frac{q_0 L^2}{2\zeta A} \frac{x}{L} \left[1 - \frac{x}{L} \right]. \quad (20)$$

直接利用 Laplace 数值逆变换由(20)求解 $v(x, t)$, 也可利用分数导数的特殊性质求解。

先利用分数导数的特殊性质^[3]得到

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(G + \eta s^\alpha)s} \right] = \frac{1}{G} \left[1 - E_\beta \left[- \left(\frac{t}{\tau_1} \right)^\beta \right] \right], \quad (21)$$

其中 $\tau_1 = \frac{\eta}{G}$, $E_\beta(x)$ 是 Mittag-Leffler 函数

$$E_\beta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(1 + \beta n)}. \quad (22)$$

对(20)进行 Laplace 逆变换,并利用(21)求得

$$v(x, t) = \frac{1}{9K} \frac{q_0 L^4}{24I_z} \frac{x}{L} \left[\frac{x^3}{L^3} - 2 \frac{x^2}{L^2} + 1 \right] +$$

$$\frac{1}{3G} \left\{ 1 - E_{\alpha} \left[- \left(\frac{t}{\tau_1} \right)^{\alpha} \right] \right\} \left\{ \frac{q_0 L^4}{24I_z} \frac{x}{L} \left[\left(\frac{x^3}{L^3} - 2 \frac{x^2}{L^2} + 1 \right) + \frac{3}{\zeta} \left(\frac{h}{L} \right)^2 \left(1 - \frac{x}{L} \right) \right] \right\} \quad (23)$$

瞬态响应为

$$v(x, 0) = \left(\frac{1}{9K} + \frac{1}{3G} \right) \frac{q_0 L^4}{24I_z} \frac{x}{L} \left[\frac{x^3}{L^3} - 2 \frac{x^2}{L^2} + 1 \right] + \frac{1}{G} \frac{q_0}{2\zeta} \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L} \right). \quad (24)$$

在很多文献中假设粘弹性材料的 Poisson 比 ν 为常数^[6]。由对应原理知 $v(s) =$

$\frac{3K - 2(G + \eta_0^{\alpha})}{6K + 2(G + \eta_0^{\alpha})}$, 这时(20)可化为

$$v(x, s) = \frac{3K + G + \eta_0^{\alpha}}{9K(G + \eta_0^{\alpha})s} \frac{q_0 L^4}{24I_z} \frac{x}{L} \left[\left(\frac{x^3}{L^3} - 2 \frac{x^2}{L^2} + 1 \right) + \frac{2(1 + \nu(s))}{\zeta} \left(\frac{h}{L} \right)^2 \left(1 - \frac{x}{L} \right) \right], \quad (25)$$

对(25)求 Laplace 逆变换得

$$v(x, t) = \frac{q_0 L^4}{24I_z} \frac{x}{L} \left[\frac{x^3}{L^3} - 2 \frac{x^2}{L^2} + 1 \right] J(t) + \frac{q_0 L^4}{24I_z} \frac{x}{L} \left[\frac{2(1 + \nu)}{\zeta} \left(\frac{h}{L} \right)^2 \left(1 - \frac{x}{L} \right) \right] J(t), \quad (26)$$

其中 $J(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{3K + G + \eta_0^{\alpha}}{9K(G + \eta_0^{\alpha})s} \right]$.

如果不考虑横向剪切的影响, 则挠度满足的方程为

$$v(x, t) = \frac{q_0 L^4}{24I_z} \frac{x}{L} \left[\frac{x^3}{L^3} - 2 \frac{x^2}{L^2} + 1 \right] J(t). \quad (27)$$

比较(26)和(27), 可见(26)的第二部分表示横向剪切效应, 它与 $(h/L)^2$ 成正比。

2.2 数值算例

取一个等截面的粘弹性材料的梁, 密度 $\rho = 500 \text{Kg/m}^3$, 长度 $L = 10 \text{m}$, 截面积 $A = 1 \text{m}^2$, 高 $h = 0.5 \text{m}$, 设粘弹性材料满足(7)给定的本构关系, 材料参数为 $G = 3.267 \text{E}7 \text{N/m}^2$, $K = 2.72 \text{E}7 \text{N/m}^2$, $\eta = 9.147 \text{E}7 \text{Ns/m}^2$, 剪切常数 $\zeta = 5/6$, 载荷 $q(t) = 100H(t) \text{N/m}^2$

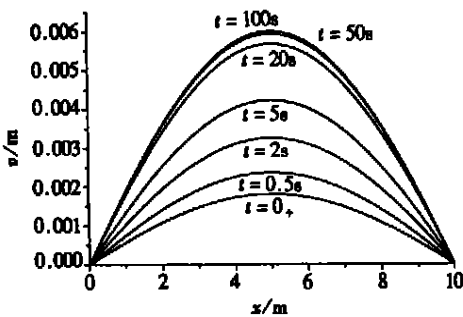


图2 $\alpha = 0.8$ 时, 梁在不同时刻的挠度曲线

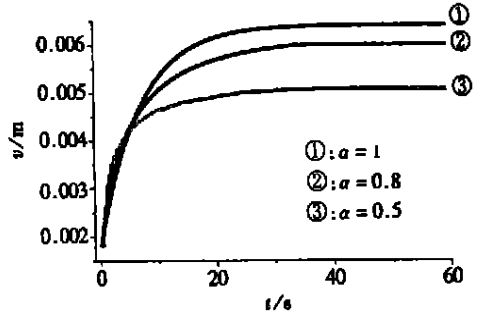


图3 $x = L/2$ 处挠度随时间变化的曲线

我们将考察材料参数对挠度的影响, 并比较不同计算方法所得结果。图2所示为 $\alpha = 0.8$ 时, Timoshenko 梁在不同时刻的挠度曲线。图3所示曲线是分数导数参数 α 取不同值的结果, 表明材料参数 α 对梁的拟静态行为影响比较明显。当参数 $\alpha = 1$, 所考虑材料为标准线性固体, 当 $\alpha = 0$ 时, 为弹性材料。图4和图5给出了 Timoshenko 梁与 Euler-Bernoulli 梁的挠度曲线的比较, 说明 Timoshenko 梁的剪切效应与梁的细长比有关, 梁的高度和长度之比比较大时, 剪切效应十分明显, 不能被忽略。图6给出了采用数值 Laplace 逆变换方法^[10]和利用 Mittag-Leffler 函数展开方法所得结果的比较, 说明两种方法所得结果吻合很好。图7给出了当参数 $\alpha = 0.8$ 时, Poisson 比为常数 $\nu = 0.3$ 和 Poisson 比不为常数的结果, 表明 Poisson 比 ν 为常数和不为

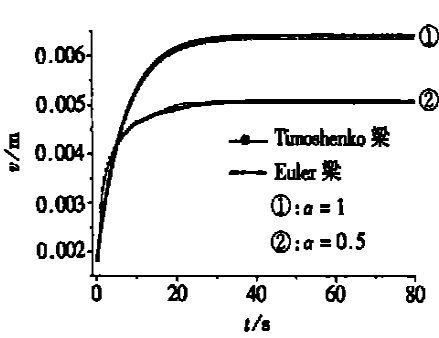
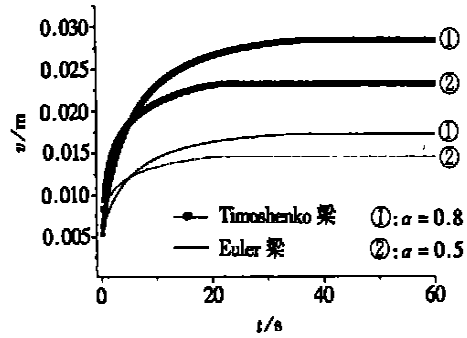


图4 Timoshenko梁与Euler梁挠度的比较

图5 高度 $h = 4\text{m}$, Timoshenko梁与Euler梁挠度的比较

常数, 两者所得结果很近似, 也就是说, 通常情况下假设材料的Poisson比为常数是合理的。

3 梁的动力学行为

3.1 理论分析

为了便于分析, 取初值条件为零, 则由(13)解耦求得挠度 $v(x, t)$ 和转角 $\varphi(x, t)$ 满足的方程分别为

$$I_z S_2 S_3 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \frac{Q_z}{\zeta} (S_1 S_3 + S_2) \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho I S_1 S_3 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\rho^2 I_z}{\zeta} S_1 \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} =$$

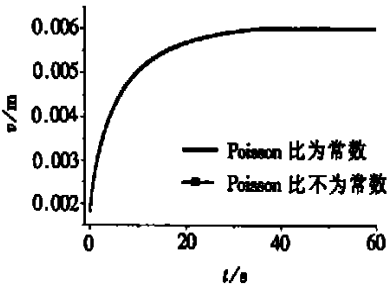
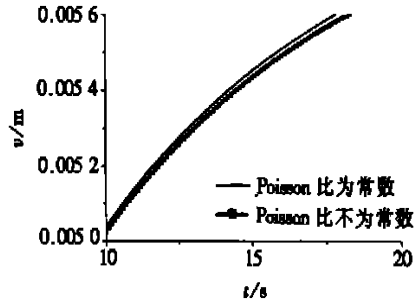
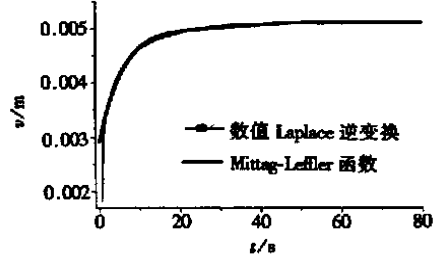
图7 $\alpha = 0.8$ 时, Poisson比为常数与不为常数的比较

图8 图7的局部放大图

$$S_1 S_3 q - \frac{I_z}{4A} S_2 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{Q_z}{4A} S_1 \frac{\partial^2 q}{\partial t^2}, \quad (28)$$

$$I_z S_2 S_3 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} - \frac{Q_z}{\zeta} (S_1 S_3 + S_2) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho I S_1 S_3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\rho^2 I_z}{\zeta} S_1 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4} = - S_1 S_3 \frac{\partial q}{\partial x}, \quad (29)$$

在(28)(29)中, 包含 ζ 的项与横向剪切有关。由于在无外力的情况下, $v(x, t)$ 和 $\varphi(x, t)$ 满足相同的齐次方程, 所以只考虑挠度 $v(x, t)$ 的求解就够了, 转角 $\varphi(x, t)$ 可类似地求解。由于此方程比较复杂, 先讨论一些简化的情况, 若忽略转动惯性, 只考虑剪切效应, 则(28)可化为

图6 参数 $\alpha = 0.8$ 时, Laplace数值逆变换和Mittag-Leffler函数展开方法之间的比较

$$I_z S_2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \frac{9K\Omega_z}{\zeta} \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} + \Omega_1 S_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = S_1 q - \frac{9KI_z}{\zeta A} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}. \quad (30)$$

设梁处于简支情况下, 梁所受载荷为 $q(x, t) = f(x)g(t)$, 设方程(30) 的解可以分离变量, 则采用分离变量法, 得到梁的模式函数为

$$\phi_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (31)$$

于是挠度 $v(x, t)$ 可表示为模式函数的组合

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad (32)$$

其中, $v_n(t)$ 满足下面的微分积分方程

$$I_z \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 S_2 v_n + \Omega_1 S_1 \ddot{v}_n + \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \frac{9K\Omega_z}{\zeta} \dot{v}_n = q_{1n} S_1 g(t) - \frac{9KI_z}{\zeta A} q_{2n} g(t), \quad (33)$$

$$\text{这里, } q_{1n} = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad q_{2n} = \frac{2}{L} \int_0^L \dot{f}(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

把 $S_1 = 3K + G + \eta \mathcal{D}^\alpha$, $S_2 = 9K(G + \eta \mathcal{D}^\alpha)$ 代入(33) 并两边作用算子 \mathcal{I}^α 得

$$\ddot{v}_n + a_n \mathcal{I}^\alpha \dot{v}_n + b_n v_n + c_n \mathcal{I}^\alpha v_n = d_n \mathcal{I}^\alpha g(t) + e_n g(t) \quad (34)$$

$$\text{其中, } a_n = \left(\frac{n\pi h}{L} \right)^2 \frac{3K}{4\zeta\eta} + \frac{3K+G}{\eta}, \quad b_n = \frac{3}{4} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 h^2 \frac{K}{\rho}, \quad c_n = \frac{3}{4} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 h^2 \frac{GK}{\rho\eta},$$

$$d_n = \frac{3K+G}{\Omega_1 \eta} q_{1n} - \frac{3h^2 K}{4\zeta \Omega_1 \eta} q_{2n}, \quad e_n = \frac{q_{1n}}{\Omega_1}.$$

设梁所受载荷关于时间是简谐的, 即

$$g(t) = \sin \theta t. \quad (35)$$

由于粘弹性材料存在阻尼, 梁的自由振动将迅速衰减, 于是在简谐激励下, 其稳态响应与简谐激励同频^[11]. 于是可设

$$v_n(t) = A_n \sin \theta t + B_n \cos \theta t. \quad (36)$$

将(36) 代入(34), 并利用分数积分的性质可得

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin \theta t + B_n \cos \theta t) \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad (37)$$

$$\text{其中, } A_n = \left[R_1 \left(d_n \theta^{-\alpha} \cos \frac{\alpha\pi}{2} + e_n \right) + R_2 d_n \theta^{-\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{2} \right] / (R_1^2 + R_2^2),$$

$$B_n = \left[R_2 \left(d_n \theta^{-\alpha} \cos \frac{\alpha\pi}{2} + e_n \right) - R_1 d_n \theta^{-\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{2} \right] / (R_1^2 + R_2^2),$$

$$R_1 = b_n - \theta^2 + (c_n \theta^{-\alpha} - a_n \theta^{2-\alpha}) \cos \frac{\alpha\pi}{2}, \quad R_2 = (c_n \theta^{-\alpha} - a_n \theta^{2-\alpha}) \sin \frac{\alpha\pi}{2}.$$

同理, 我们可得粘弹性 Euler-Bernoulli 梁在简谐振动作用下动力学行为的控制方程为

$$\ddot{v}_{E_n} + a_{E_n} \mathcal{I}^\alpha \dot{v}_{E_n} + b_{E_n} v_{E_n} + c_{E_n} \mathcal{I}^\alpha v_{E_n} = d_{E_n} \mathcal{I}^\alpha g(t) + e_{E_n} g(t), \quad (38)$$

$$\text{这里, } a_{E_n} = \frac{3K+G}{\eta}, \quad b_{E_n} = \frac{3}{4} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 h^2 \frac{K}{\rho}, \quad c_{E_n} = \frac{3}{4} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 h^2 \frac{GK}{\rho\eta}, \quad d_{E_n} = \frac{3K+G}{\Omega_1 \eta} q_{1n}, \quad e_{E_n} = \frac{q_{1n}}{\Omega_1}.$$

稳态响应为

$$v_E(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_{E_n}(x, t) \sin \frac{n\pi x}{L} = \sum_{n=1}^{\infty} (E_n \sin \theta t + F_n \cos \theta t) \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad (39)$$

$$\text{其中, } E_n = \left[RE_1 \left(d_{E_n} \theta^{-\alpha} \cos \frac{\alpha\pi}{2} + e_{E_n} \right) + RE_2 d_{E_n} \theta^{-\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{2} \right] / (RE_1^2 + RE_2^2),$$

$$F_n = \left[R_{E_2} \left(d_{E_n} \theta^{-\alpha} \cos \frac{\alpha \pi}{2} + e_{E_n} \right) - R_{E_1} d_{E_n} \theta^{-\alpha} \sin \frac{\alpha \pi}{2} \right] / (R_{E_1}^2 + R_{E_2}^2),$$

$$R_{E_1} = b_{E_n} - \theta^2 + (c_{E_n} \theta^{-\alpha} - a_{E_n} \theta^{2-\alpha}) \cos \frac{\alpha \pi}{2}, \quad R_{E_2} = (c_{E_n} \theta^{-\alpha} - a_{E_n} \theta^{2-\alpha}) \sin \frac{\alpha \pi}{2}.$$

如果只考察转动惯性对梁挠度的影响,而忽略剪切效应,得到与上面类似的结果。当进一步同时考察剪切和转动惯性效应时,由于方程比较复杂,我们只给出数值结果。

3.2 数值算例

我们取梁的材料参数和几何参数同上节, $q(x, t) = 100 \sin \frac{\pi x}{L} \sin t \text{ N/m}$ 。分别由(37)和(39)求得

$$v(x, t) = v_1(t) \sin \frac{\pi x}{L}, \quad v_E(x, t) = v_{E_1}(t) \sin \frac{\pi x}{L},$$

其中, $v_1(t) = 0.002723 \sin t - 0.001949 \cos t$, $v_{E_1}(t) = 0.002719 \sin t - 0.001937 \cos t$, $v_1(t)$ 和 $v_{E_1}(t)$ 如图9所示。计算结果表明,在 h/L 很小的情况下,梁的剪切效应对挠度的影响很小,可忽略不计。

在其它参数不变情况下,改变截面积 $A = 4\text{m}^2$, 高 $h = 4\text{m}$, 载荷 $q(x, t) = 10^5 \sin \frac{\pi x}{L} \sin t \text{ N/m}$ 。分别由(37)和(39)求得

$$v(x, t) = v_1(t) \sin \frac{\pi x}{L}, \quad v_E(x, t) = v_{E_1}(t) \sin \frac{\pi x}{L}.$$

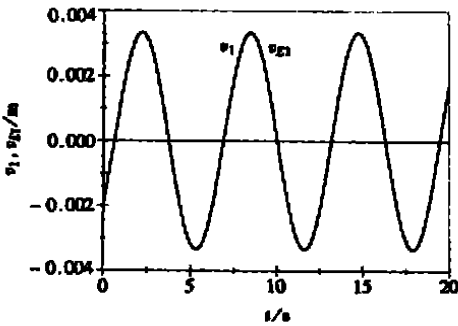


图9 $h = 0.5\text{m}$ 时, 挠度的稳态值

其中 $v_1(t) = 0.011744 \sin t - 0.010097 \cos t$, $v_{E_1}(t) = 0.010548 \sin t - 0.0073683 \cos t$, $v_1(t)$ 和 $v_{E_1}(t)$ 如图10所示。计算结果表明,在 h/L 比较大的情况下,梁的横向剪切对挠度的影响比较明显。

如果只考察转动惯性对梁挠度的影响,我们得到与上面相似的结论,即在 h/L 比较大的情况下,梁的转动惯性对挠度的影响比较显著。

我们进一步考察计及转动惯性的 Timoshenko 梁的响应问题,对方程(28)利用分离变量法求得 $v_1(t)$ 满足的微分积分方程,并进行了数值计算,

其结果示于图11中,并与忽略转动惯性的情形进行了比较,说明在同时考察两种效应时,即使

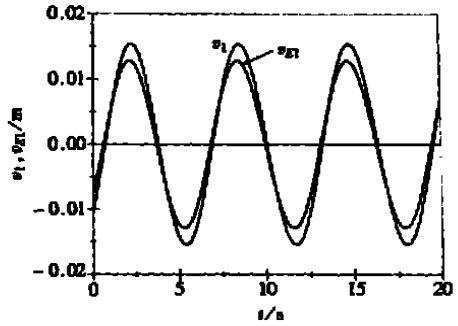


图10 $h = 4\text{m}$ 时, 挠度的稳态值

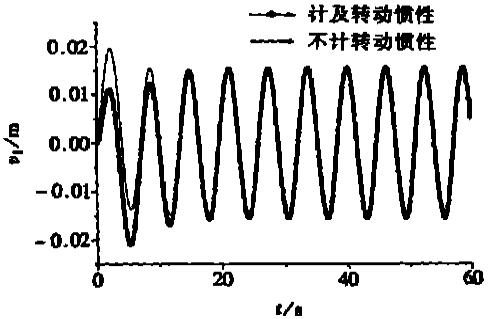


图11 $h = 4\text{m}$ 时, 计与不计转动惯性的梁的挠度

在 h/L 较大的情况下, 转动惯性影响也很小。

4 结 论

本文利用粘弹性材料的三维分数导数型本构关系, 建立了粘弹性 Timoshenko 梁的静、动力学行为研究的数学模型。然后分析了 Timoshenko 梁的静、动力学行为, 并给出了数值算例。主要结论有

1. 本文考虑的粘弹性材料的本构关系是分数导数型的, 当参数 $\alpha = 1$, 所考虑材料为标准线性固体材料, 当参数 $\alpha = 0$ 时, 为弹性材料。计算结果表明, 分数导数参数 α 对梁的力学行为影响是明显的。

2. 比较了 Poisson 比为常数和不为常数的情形, 发现 Poisson 比对梁的行为影响很小。因此, 为了方便, 假设材料的 Poisson 比为常数是合理的。

3. 在拟静态情况下, 利用 Laplace 数值逆变换可得到比较准确的结果, 但在动力学行为分析中, 利用 Laplace 数值逆变换的结果误差很大, 应该采用其它比较有效的直接数值求解方法, 例如, 作者目前已提出的一种不用存储全部历史数据的数值方法。

4. 分析了粘弹性 Timoshenko 梁的剪切效应和转动惯性的影响。其剪切效应与梁的细长比 h/L 有关, 当 h/L 比较大时, 在静、动态情况下剪切效应都十分明显。在动态情况下, 单独考虑转动惯性的影响, 得到与剪切效应相同的结果, 但两者同时考虑时, 无论 h/L 的大小, 转动惯性的影响甚微。

[参 考 文 献]

- [1] Gemant A. On fractional differences[J]. Phil Mag, 1938, 25(1): 92—96.
- [2] Bagley R L, Torvik P J. On the fractional calculus model of viscoelasticity behavior[J]. J of Rheology, 1986, 30(1): 133—155.
- [3] Koeller R C. Applications of the fractional calculus to the theory of viscoelasticity[J]. J Appl Mech, 1984, 51(3): 294—298.
- [4] Rossikhin Y A, Shitikova M V. Applications of fractional calculus to dynamic problems of linear and nonlinear hereditary mechanics of solid[J]. Appl Mech Rev, 1997, 50(1): 15—67.
- [5] Argyris J. Chaotic vibrations of a nonlinear viscoelastic beam[J]. Chaos Solitons Fractals, 1996, 7(1): 151—163.
- [6] Akoz Y, Kadioglu F. The mixed finite element method for the quasi-static and dynamic analysis of viscoelastic Timoshenko beams[J]. Int J Numer Mech Engng, 1999, 44(5): 1909—1932.
- [7] 陈立群, 程昌钧. 非线性粘弹性梁的动力学行为[J]. 应用数学和力学, 2000, 21(9): 897—902.
- [8] Samko S G, Kilbas A A, Marichev O L. Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Application [M]. New York: Gordon and Breach Science Publishers, 1993.
- [9] 罗祖道, 李思简. 各向异性材料力学[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 1994.
- [10] Spinelli R A. Numerical inversion of a Laplace transform[J]. SIAM J Numer Anal, 1966, 3(4): 636—649.
- [11] 刘延柱, 陈文良, 陈立群. 振动力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1998.

Quasi-Static and Dynamical Analysis for Viscoelastic Timoshenko Beam With Fractional Derivative Constitutive Relation

ZHU Zheng_you^{1,2}, LI Gen_guo³, CHENG Chang_jun^{1,4}

(1. Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics,
Shanghai University, Shanghai 200072, P R China;

2 Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200072, P R China;

3. Shanghai Supercomputer Center, Shanghai 201203, P R China;

4. Department of Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, P R China)

Abstract: The equations of motion governing the quasi-static and dynamical behavior of a viscoelastic Timoshenko beam are derived. The viscoelastic material is assumed to obey a three-dimensional fractional derivative constitutive relation. The quasi-static behavior of the viscoelastic Timoshenko beam under step loading is analyzed and the analytical solution is obtained. The influence of material parameters on the deflection is investigated. The dynamical response of the viscoelastic Timoshenko beam subjected to a periodic excitation is studied by means of mode shape functions. And the effect of both transverse shear and rotational inertia on the vibration of the beam is discussed.

Key words: viscoelastic Timoshenko beam; fractional derivative constitutive relation; weakly singular Volterra integro-differential equation; dynamical response