

文章编号: 1000-0887(2002) 01-0011-05

Beltrami 流动的球涡解的张量表示 及其对称性分析

黄永念, 胡欣

(北京大学 力学与工程科学系, 湍流研究国家重点实验室, 北京 100871)

(本刊编委黄永念来稿)

摘要: 讨论了一类 Beltrami 流动的 n 阶球涡(非轴对称及轴对称)的张量表示及由此引出的对其的分类和对称性的研究, 还进一步地讨论了单个此类非轴对称 n 阶球涡解的混沌现象; 从另一侧面说明了非轴对称 Beltrami 流动的球涡解的复杂性及多样性, 以及用张量表示的更广的内涵

关键词: Beltrami 流动; 张量表示; 对称性; 混沌现象

中图分类号: O351.3 文献标识码: A

引 言

Beltrami 流动是一类典型的流动, 它的涡量方向与速度方向始终保持平行; 它的速度和涡量都满足线性的 Helmholtz 方程, 由此可以看出这其实是一类比较简单的流动。但是, 在这种简单的流动中却隐藏着很多大家以前并未注意到的复杂的现象, 的确值得深入地研究

从九十年代开始, 我们对 Beltrami 流动曾作了系统的研究。这种流动满足方程:

$$\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{u} \times \mathbf{u}$$

我们不仅给出了这种流动的一般精确解的表示形式, 而且给出了很多不同种类的旋涡解的显式表达式。包括球形涡, 柱形涡, 椭球涡, 螺旋涡等^{[1],[2],[3],[4]}, 但是它们都是轴对称的旋涡解。在实际流动中, 很多情况中出现的旋涡是非轴对称的, 故本文将重点讨论一类 Beltrami 流动的非轴对称球形旋涡的解及其结构和对称性。我们用张量分析的表示的方法, 可以清楚地显示出这类旋涡的复杂结构。另外, 我们还用对称群的方法对旋涡的结构进行了分类, 给出了这类球形旋涡的类别数目。最后, 我们发现了非对称旋涡解可以通过不同轴向的轴对称旋涡的叠加来产生

1 Beltrami 流动 n 阶球涡的张量表示

首先, 让我们来考察一下轴对称 Beltrami 流 n 阶球涡的解的表达式。文[4]中曾给出在 $r = 1$ 的情况下的速度场的形式如下:

收稿日期: 2000_07_18; 修订日期: 2001_08_10

基金项目: 国家重点基础研究发展规划项目 非线性科学中的若干前沿问题 专项资助项目 (G2000773)

作者简介: 黄永念(1939), 男, 上海市人, 教授, 博士生导师, 湍流国家重点实验室副主任。

$$\begin{cases} u_R = \frac{dR}{dt} = A_n n(n+1)R^{-3/2} J_{n+1/2}(R) P_n(\cos \theta), \\ u = R \frac{d}{dt} = A_n R^{-1/2} \left[J_{n-1/2}(R) - \frac{n}{R} J_{n+1/2}(R) \right] P_n^1(\cos \theta), \\ u = R \sin \theta \frac{d}{dt} = -A_n R^{-1/2} J_{n+1/2}(R) P_n^1(\cos \theta) \end{cases} \quad (1)$$

另外,文[5]中曾指出某一类的 n 阶 Beltrami 球涡的速度场可以写成下面的形式:

$$u_i = \underbrace{j_{no} \ q_r \ s_t \ w}_{n} l_n l_o \ l_q l_r \ m_s n_u \ n_u l_v, \quad (2)$$

并给出这类 $j_{no} \ q_r \ s_t \ w$ 某一种张量形式的具体的表达式 之所以说(2)是某一类的解的原因是它与用分离变量法得出的解(文[6])在高阶情况下表达式并不一样,不能互换

本文下面给出此类的 n 阶 Beltrami 球涡 $j_{no} \ q_r \ s_t \ w$ 的另一种张量形式的表达式 这种张量形式可以这样构造:

首先用(1)的解在直角坐标系下写成这样的形式:

$$u_i = u_R e_{R_i} + u_\theta e_\theta + u_\phi e_\phi,$$

$$\text{其中, } e_{R_i} = \frac{x_i}{R}, e_\theta = \left(\frac{x_i x_j}{R^2} - \delta_{ij} \right) \frac{l_j}{\sin \theta}, e_\phi = \frac{1}{R \sin \theta} \epsilon_{ijk} l_j x_k$$

其次将 $P_n(\cos \theta)$, $P_n^1(\cos \theta)$ 写成 $\cos \theta$, $\sin \theta$ 的具体形式;且 $\cos \theta$ 用 $\frac{x_p l_p}{R}$ 来代替,我们发现表达式中将没有 $\sin \theta$ 的单项;而由 $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$,故我们可把 $\sin \theta$ 的偶次项全 $\cos \theta$ 用来表示 在经过合并相同的项后,就可以将球涡解写成下面的形式:

$$u_i = \underbrace{j_{no} \ q_r \ s_t \ w}_{n} l_n l_o \ l_q l_r \ l_s l_t \ l_u l_v \quad (3)$$

注意到(3)实际上是轴对称 n 阶 Beltrami 球涡的张量表示 而对(2)的一般的张量表达式(轴对称及非轴对称球涡),我们仍然用(3)中的表达式,可以说这是一种外推的方法;但是可以证明这种外推法得到的解并不违反 Navier-Stokes 方程;更直接而言,这种构造仍能保证速度满足 Beltrami 流动的性质,且满足不可压缩条件

在(3)中 n, o, q, r, s, t, u, v 可互换位置而不影响到 u_i 的表达式,故在这种外推下,我们有(2)中的 $j_{no} \ q_r \ s_t \ w$ 表达式不因下标之间的互换位置而改变,这是此类张量表示的第一个性质

下面我们先看看 $n = 1$ (记作 $j_{\bar{y}}$)及 $n = 2$ (记作 j_{imn})时球涡的张量表示:

$$1) \ n = 1 \text{ 时, } j_{\bar{y}} = A^{(1)} x_i x_j + B^{(1)} j_{\bar{y}} + C^{(1)} \epsilon_{ijk} x_k, \text{ 其中, } A^{(1)} = A_1 R^{-5/2} J_{5/2}(R),$$

$$B^{(1)} = A_1 [R^{-1/2} J_{1/2}(R) - R^{-3/2} J_{3/2}(R)], C^{(1)} = A_1 R^{-3/2} J_{3/2}(R);$$

$$2) \ n = 2 \text{ 时, } j_{imn} = A^{(2)} x_i x_m x_n + B^{(2)} x_i x_{mn} + C^{(2)} (x_m x_{in} + x_n x_{im}) + D^{(2)} (x_n x_{im} + x_m x_{in}) x_p,$$

$$\text{其中, } A^{(2)} = 3A_2 R^{-7/2} J_{7/2}(R), B^{(2)} = -3A_2 R^{-5/2} J_{5/2}(R),$$

$$C^{(2)} = \frac{3}{2} A_2 [R^{-3/2} J_{3/2}(R) - 2R^{-5/2} J_{5/2}(R)], D^{(2)} = \frac{3}{2} A_2 R^{-5/2} J_{5/2}(R)$$

2 张量表示下的 Beltrami 流动 n 阶球涡的对称性分析

下面我们引入此类 Beltrami 流动 n 阶球涡的第二个性质,也是最重要的一个性质 在(2)式中, $l = (0, 0, 1)$, $m = (1, 0, 0)$, $n = (0, 1, 0)$, 即对下标 n, o, q 取为 3, 对下标 r, s 取

为1, 对下标 l, u, v 取为2, 则 $u_i = i_{33 \ 31 \ 12 \ 22}$ 就是某一种 n 阶球涡了 我们转动坐标轴, 使之产生轮换

首先是A): 轴1 轴3, 轴2 轴1, 轴3 轴2; 表示轴1 转到原来的轴3上去, 轴2 转到原来的轴1上去, 轴3 转到原来的轴2上去, 如图1; 我们此时得到是另外的一流动 u_i , 因为表达式有所不同 但若 u_i 随坐标轴一块转动, 得到的新的速度应是同未转动前速度表达式是一样的 即:

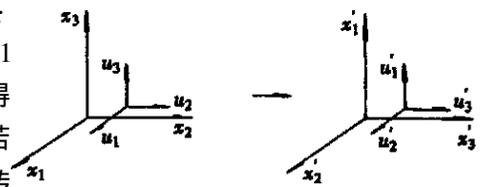


图1 n 阶球涡的旋转对称性

$$\begin{cases} u_1(x_1, x_2, x_3) = u_2(x_1, x_2, x_3), \\ u_2(x_1, x_2, x_3) = u_3(x_1, x_2, x_3), \\ u_3(x_1, x_2, x_3) = u_1(x_1, x_2, x_3) \end{cases} \quad (4)$$

下面我们寻求一种更一般的表示这种性质的方法: 来看某一个球涡 $i_{\overbrace{11 \ 12 \ 23}^a \overbrace{3}^b \overbrace{3}^c}$ 的结构, 它表示1的下标有 a 个, 2的下标有 b 个, 3的下标有 c 个 则轮换时, 我们有下式

$$\begin{cases} \overbrace{11 \ 12 \ 23}^a \overbrace{3}^b \overbrace{3}^c(x_1, x_2, x_3) = \overbrace{21 \ 12 \ 23}^c \overbrace{3}^a \overbrace{3}^b(x_3, x_2, x_1), \\ \overbrace{21 \ 12 \ 23}^a \overbrace{3}^b \overbrace{3}^c(x_1, x_2, x_3) = \overbrace{31 \ 12 \ 23}^c \overbrace{3}^a \overbrace{3}^b(x_3, x_1, x_2), \\ \overbrace{31 \ 12 \ 23}^a \overbrace{3}^b \overbrace{3}^c(x_1, x_2, x_3) = \overbrace{11 \ 12 \ 23}^c \overbrace{3}^a \overbrace{3}^b(x_3, x_2, x_1) \end{cases} \quad (5)$$

其次是B): 轴1 轴2, 轴2 轴3, 轴3 轴1, 表示轴1 转到原来的轴2上去, 轴2 转到原来的轴3上去, 轴3 转到原来的轴1上去 同样, 我们也能写出张量变换的表达式如下:

$$\begin{cases} \overbrace{11 \ 12 \ 23}^a \overbrace{3}^b \overbrace{3}^c(x_1, x_2, x_3) = \overbrace{31 \ 12 \ 23}^b \overbrace{3}^c \overbrace{3}^a(x_2, x_3, x_1), \\ \overbrace{21 \ 12 \ 23}^a \overbrace{3}^b \overbrace{3}^c(x_1, x_2, x_3) = \overbrace{11 \ 12 \ 23}^b \overbrace{3}^c \overbrace{3}^a(x_2, x_3, x_1), \\ \overbrace{31 \ 12 \ 23}^a \overbrace{3}^b \overbrace{3}^c(x_1, x_2, x_3) = \overbrace{21 \ 12 \ 23}^b \overbrace{3}^c \overbrace{3}^a(x_3, x_2, x_1) \end{cases} \quad (6)$$

为了概括上面两式的结果, 我们用一种简洁的记法, 记为 $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \\ 3 & c \end{pmatrix}$, 它有两个物理意义: 其一, 第一竖列的1, 2, 3表示速度分量; 其二, 第二竖列表示下标1, 2, 3个数分别为 a, b, c 则由上面两式(5), (6), 可得简单的记法:

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \\ 3 & c \end{pmatrix} \xrightarrow{L_{av}} \begin{pmatrix} 2 & c \\ 3 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} \xrightarrow{L_{aw}} \begin{pmatrix} 3 & b \\ 1 & c \\ 2 & a \end{pmatrix} \quad (7)$$

我们还要引入第三个性质, 那就是置换性质 即若把方向并矢的个数 a, b, c 看作一个整体的话, 我们可以对它们进行置换 例如, 对 $i_{\overbrace{11 \ 11 \ 22}^a \overbrace{22 \ 33}^b \overbrace{33}^c}$, 我们可以将它与 $i_{\overbrace{11 \ 11 \ 22}^b \overbrace{22 \ 33}^a \overbrace{33}^c}$

建立下面的关系, 即我们有:

$$\overbrace{111 \ 122 \ 233}^a \overbrace{3}^b \overbrace{3}^c(x_1, x_2, x_3) = \overbrace{211 \ 122 \ 233}^b \overbrace{3}^a \overbrace{3}^c(x_2, x_1, x_3), \quad (8a)$$

$$\overbrace{211 \ 122 \ 233}^a \overbrace{3}^b \overbrace{3}^c(x_1, x_2, x_3) = \overbrace{111 \ 122 \ 233}^b \overbrace{3}^a \overbrace{3}^c(x_2, x_1, x_3), \quad (8b)$$

$$\overbrace{311}^a \overbrace{122}^b \overbrace{233}^c \underbrace{3(x_1, x_2, x_3)} = \overbrace{311}^b \overbrace{122}^a \overbrace{233}^c \underbrace{3(x_2, x_1, x_3)} \tag{8c}$$

那么,我们就可以又加入一种对称性了,这是坐标置换的特性,也是外推法得到的新的性质

3 Beltrami 流动 n 阶球涡的类别种数

从文献[5]的对称群的分析中,我们知道 n 阶 Beltrami 球涡共有 3 种;然而由上面的三个性质,可以看出它也可通过变换达到减少类别个数的目的,因为很多种的球涡实际上在坐标变换的意义下就是同一类球涡

首先,由第一个性质,我们知道只要 1 的总个数 a , 2 的总个数 b , 3 的总个数 c 都相同,那么这些球涡都属于同一类,因而可以合写为 $\overbrace{i1}^a \overbrace{12}^b \overbrace{23}^c \underbrace{3}$;

其次,由第二个性质, $\overbrace{i1}^a \overbrace{12}^b \overbrace{23}^c \underbrace{3}$ 与 $\overbrace{i1}^b \overbrace{12}^c \overbrace{23}^a \underbrace{3}$, $\overbrace{i1}^c \overbrace{12}^a \overbrace{23}^b \underbrace{3}$ 也是同一类球涡

第三,由第三个性质, $\overbrace{i1}^a \overbrace{12}^b \overbrace{23}^c \underbrace{3}$ 与 $\overbrace{i1}^b \overbrace{12}^c \overbrace{23}^a \underbrace{3}$, $\overbrace{i1}^c \overbrace{12}^a \overbrace{23}^b \underbrace{3}$, $\overbrace{i1}^a \overbrace{12}^c \overbrace{23}^b \underbrace{3}$ 在坐标置换的意义下也是同一类球涡

故我们得到类别数为不定方程 $a + b + c = n(a \quad b \quad c)$ 的解的个数 Q_n 根据分析推导,我们可得到递推公式为:

$$Q_{6p+r} = Q_{6(p-1)+r} + 6p + r, \tag{9}$$

其中 $0 \leq r < 6$ 故有:

$$Q_{6p} = 3p(p+1) + 1, \quad Q_{6p+1} = (3p+1)(p+1), \quad Q_{6p+2} = (3p+2)(p+1),$$

$$Q_{6p+3} = 3(p+1)^2, \quad Q_{6p+4} = (3p+4)(p+1), \quad Q_{6p+5} = (3p+5)(p+1)$$

由此可见很大一部分的球涡是可以归并的 下面也看些例子:

- 1) $n = 1$ 时只有一类 i_1, i_2, i_3 共属一类;
- 2) $n = 2$ 时二类, i_{11}, i_{22}, i_{33} 属一类,其余的共属一类

4 单个二阶非轴对称球涡的混沌现象分析

我们注意到单个二阶非轴对称球涡就己能产生混沌现象了,而不需通过叠加不同轴方向的轴对称的球涡的方法来产生 我们下面以二阶非轴对称球涡 i_{31} 来分析其混沌现象 i_{31} 分量在球坐标系下可写成:

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = 9A^{(2)}R^{-3/2}J_{5/2}(R)\cos\theta\sin\theta\cos\theta, \\ \frac{d\theta}{dt} = -C^{(2)}(1-2\cos^2\theta)\cos\theta - D^{(2)}R\cos\theta\sin\theta, \\ \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{\sin\theta}\{D^{(2)}R(1-2\cos^2\theta)\cos\theta - C^{(2)}\cos\theta\sin\theta\} \end{cases} \tag{10}$$

可以用反证法来证明,上式在非不动点处是不可积的,即会产生混沌现象

上面讨论的混沌现象产生的根源在于 $u_i = i_{31}l_3m_1$ 中质点有两个方向 l 和 m 轴的制约;当绕着一个轴旋转时,又受到另一个轴的牵制,故只能乱绕圈,结果形成了混沌 上面这例子事实上可以通过坐标变换而变成文[4]中讨论的结果,它就是两个强度为 2 1 的二阶轴对称球涡的垂直叠加 其实也是文[5]中所说的二阶球涡 $i_{\phi l o m \phi}$ 与 $i_{\phi p m o l \phi}$ 的叠加,这里就不多说了 至于流动的浑沌图象,可以参考文献[4]中所作的 Poincare 截面的图象 更高阶 Beltrami 流动的非轴对称球涡也有混沌现象,这方面的情况可以去做,有兴趣的读者可以参考文献[7]

中的有关高阶轴对称球涡的叠加的分析

[参 考 文 献]

- [1] SHI Chang_chun, HUANG Yong_nian. Some properties of three_dimensional Beltrami flows[J]. Acta Mechanica Sinica, 1991, 7(4): 289-294.
- [2] SHI Chang_chun, HUANG Yong_nian, CHEN Yao_song. On the Beltrami flows[J]. Acta Mechanica Sinica, 1992, 8(4): 289-294.
- [3] SHI Chang_chun, HUANG Yong_nian, ZHU Zhao_xuan, et al. Chaotic phenomena produced by the spherical vortices in the Beltrami flows[J]. Chinese Physics Letters, 1992, 9(10): 515-518.
- [4] 黄永念, 是长春, 朱照宣, 等. Lagrange 湍流和 Beltrami 流动[A]. 见: 中国力学学会办公室编, 现代流体力学进展 [C]. 北京: 科学出版社, 1993, 1-15.
- [5] 黄永念, 胡欣. 流体动力学方程的三维旋涡解的可叠加性[J]. 应用数学和力学, 2000, 21(12): 1227-1237.
- [6] FENG Qing_zeng. Pattern formation in force-free magnetic fields and Beltrami flows[J]. Zeitschrift fur Naturforschung, 1996, 51a: 1161-1169.
- [7] 是长春, 黄永念, 叶戈, 等. 高阶球形涡的一般性质及三阶球形涡的混沌现象[J]. 应用数学和力学, 1994, 15(4): 329-335.

The Tensor Denotation of Beltrami Spherical Vortices and Their Symmetry Analysis

HUANG Yong_nian, HU Xin

(Department of Mechanics and Engineering Science, State Key Laboratory for
Turbulence Research, Peking University, Beijing 100871, P.R. China)

Abstract: Discuss one kind of tensor denotation of n th Beltrami axisymmetric and nonaxisymmetric spherical vortices, their classification and symmetries were discussed. Chaotic phenomena will occur in the dynamic system of the nonaxisymmetric Beltrami spherical vortices. From these aspects, it is shown that the tensor denotation has more meaningful characters and nonaxisymmetric Beltrami spherical vortices are various and very complex.

Key words: Beltrami flow; tensor denotation; symmetry; chaotic phenomena