应用数学和力学, 第 23 卷 第 1 期(2002 年 1 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2002) 01_0016_07

等式约束非线性控制系统的时程精细计算*

邓子辰[1, 2], 钟万勰[2]

(1. 西北工业大学 土建系, 西安 710072; 2. 大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116023)

(我刊编委钟万勰来稿)

摘要: 针对等式约束非线性最优控制问题, 通过一阶 Taylor 级数展开, 得到线性化的动力学方程, 进而在方程原变量的基础上, 引入对偶向量(Lagrange 乘子向量), 将动力学方程从 Lagrange 体系引入到了 Hamilton 体系, 在全状态下, 从一个新的角度对等式约束非线性控制问题进行了描述, 进一步基于时程精细积分理论, 对其方程进行了有效的精细求解, 并通过算例说明了文中方法的有效性•

关 键 词: 非线性控制系统; 等式约束; 时程精细积分
中图分类号: O231. 2 文献标识码: A

引 言

时程精细积分方法的出现为动力系统的计算提供了新的途径[1], 它是在计算结构力学与最优控制理论模拟关系的基础上, 借助于结构力学中的子结构消元算法而发展起来的• 由于其放弃了流行的差分类算法, 又在有限时段内进行了 2^N 个(N 为正整数) 精细划分, 因此它不仅具有非常高的计算精度, 而且是无条件稳定的, 目前它在结构力学、线性二次控制、H_∞ 控制、柔性多体动力学等方面得到了广泛的应用, 并取得了良好的效果[2~5]•

但上述工作一直局限于简单的线性系统, 如何将已建立的理论和方法在非线性问题中得到证实和应用是我们进一步的研究目标, 本文旨在针对受约束非线性最优控制的动力学方程, 将已有的线性系统的精细积分方法发展到非线性控制问题中, 为非线性动力问题的研究提供一条新的途径•

1 基 本 方 程

非线性控制系统的动力学方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}_* = f(\boldsymbol{x}_*, \boldsymbol{u}_*, t), \tag{1}$$

约束方程为

* 收稿日期: 2000_03_15; 修订日期: 2001_10_09
基金项目: 国家自然科学基金资助(19872057, 19732020); 霍英东青年教师基金资助(71005); 航空科学基金资助(00B53006); 大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室开放基金资助项目
作者简介: 邓子辰(1964—), 男, 辽宁人, 博士, 教授, 博士生导师(E_mail: dweifan@nwpu.edu.cn);
钟万勰(1934—), 男, 教授, 博士生导师, 中科院院士.

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}_*, \boldsymbol{u}_*, t) = \boldsymbol{0}, \tag{2}$$

价值泛函为

$$J = \int_0^{t_f} [X(\boldsymbol{x}_*) + U(\boldsymbol{u}_*)] \mathrm{d}t + P(\boldsymbol{x}_f^*) \cdot \tag{3}$$

以上三式中, 下标* 表示该量为问题的真实解, 下标 f 表示该量为终态值, 设问题的近似解为 $\boldsymbol{x}_a$ 和 $\boldsymbol{u}_a$, 它们的扰动量为 $\boldsymbol{q}$ 和 $\boldsymbol{u}$, 这时

$$\boldsymbol{x}_* = \boldsymbol{x}_a + \boldsymbol{q}, \quad \boldsymbol{u}_* = \boldsymbol{u}_a + \boldsymbol{u} \cdot \tag{4}$$

式(4) 代入式(1) 和(2), 并进行一阶 Taylor 展开, 得到线性化的动力学方程和约束方程

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{F}_a \boldsymbol{q} + \Gamma_a \boldsymbol{u} + \boldsymbol{r}_a, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{C}_x \boldsymbol{q} + \boldsymbol{C}_u \boldsymbol{u} + \boldsymbol{C}_0 = 0, \tag{6}$$

其中, $\boldsymbol{F}_a = (\partial \boldsymbol{f}/\partial \boldsymbol{x})_a$, $\Gamma_a = (\partial \boldsymbol{f}/\partial \boldsymbol{u})_a$, $\boldsymbol{r}_a = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_a, \boldsymbol{u}_a) - \dot{\boldsymbol{x}}_a$, $\boldsymbol{C}_x = (\partial \boldsymbol{C}/\partial \boldsymbol{x})_a$, $\boldsymbol{C}_u = (\partial \boldsymbol{C}/\partial \boldsymbol{u})_a$, $\boldsymbol{C}_0 = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}_a, \boldsymbol{u}_a) \cdot$

式(4) 代入式(3), 得

$$J \approx J_a + \int_0^{t_f} \left[\boldsymbol{X}_a^{\mathrm{T}} \boldsymbol{q} + U_{,a}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{u} + \frac{1}{2} \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{X}_{,aa} \boldsymbol{q} + \frac{1}{2} \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{U}_{,aa} \boldsymbol{u} \right] \mathrm{d}t + \boldsymbol{P}_{,a}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{q}_f + \frac{1}{2} \boldsymbol{q}_f^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}_{,aa} \boldsymbol{q}_f, \tag{7}$$

其中, $\boldsymbol{X}_{,a} = (\mathrm{d}X/\mathrm{d}\boldsymbol{x})_a$, $\boldsymbol{X}_{,aa} = (\mathrm{d}^2 X/\mathrm{d}\boldsymbol{x}^2)_a$, $\boldsymbol{U}_{,a} = (\mathrm{d}\boldsymbol{U}/\mathrm{d}\boldsymbol{u})_a$, $\boldsymbol{U}_{,aa} = (\mathrm{d}^2 \boldsymbol{U}/\mathrm{d}\boldsymbol{u}^2)_a \cdot$

式(7) 对动力学方程(5) 和约束方程(6) 分别引入 Lagrange 乘子向量 $\boldsymbol{p}$ 和 γ, 这时扩展的价值泛函为

$$J_e = \int_0^{t_f} \Big[-\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{F}_a \boldsymbol{q} + \Gamma_a \boldsymbol{u} + \boldsymbol{r}_a) + \gamma^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{C}_x \boldsymbol{q} + \boldsymbol{C}_u \boldsymbol{u} + \boldsymbol{C}_0) + \boldsymbol{X}_{,a}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{q} + \boldsymbol{U}_{,a}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{u} +$$

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{X}_{,aa} \boldsymbol{q} + \frac{1}{2} \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{U}_{,aa} \boldsymbol{u} \Big] \mathrm{d}t + \boldsymbol{P}_{,a}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{q}_f + \frac{1}{2} \boldsymbol{q}_f^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}_{,aa} \boldsymbol{q}_f \cdot \tag{8}$$

根据极大值原理, 得

$$\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{R}_a^{-1} (\Gamma_a^{\mathrm{T}} \boldsymbol{p} + \boldsymbol{C}_u^{\mathrm{T}} \gamma + \boldsymbol{U})_a, \tag{9}$$

$$\dot{\boldsymbol{p}} = -\boldsymbol{Q}_a \boldsymbol{q} - \boldsymbol{F}_a^{\mathrm{T}} \boldsymbol{p} - \boldsymbol{C}_x^{\mathrm{T}} \gamma + \boldsymbol{r}_p, \tag{10}$$

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{F}_a \boldsymbol{q} - \boldsymbol{G}_a \boldsymbol{p} - \Gamma_a \boldsymbol{R}_a^{-1} \boldsymbol{C}_u^{\mathrm{T}} \gamma + \boldsymbol{r}_q, \tag{11}$$

其中, $\boldsymbol{Q}_a = \boldsymbol{X}_{,aa}$, $\boldsymbol{R}_a = \boldsymbol{U}_{,aa}$, $\boldsymbol{G}_a = \Gamma_a \boldsymbol{R}_a^{-1} \Gamma_a^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{r}_q = \boldsymbol{r}_a - \Gamma_a \boldsymbol{R}_a^{-1} \boldsymbol{U}_{,a}$, $\boldsymbol{r}_p = -\boldsymbol{X}_{,a} \cdot$ 这时扩展的价值泛函为

$$J_e = \int_0^{t_f} \Big[-\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{F}_a \boldsymbol{q} + \frac{1}{2} \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q}_a \boldsymbol{q} - \frac{1}{2} \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{G}_a \boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{r}_q - \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{r}_p - \frac{1}{2} \gamma^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C}_\gamma \gamma -$$

$$\gamma^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C}_\gamma \boldsymbol{p} + \gamma^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C}_x \boldsymbol{q} + \gamma^{\mathrm{T}} \boldsymbol{r}_b \Big] \mathrm{d}t + \boldsymbol{P}_{,a}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{q}_f + \frac{1}{2} \boldsymbol{q}_f^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}_{,aa} \boldsymbol{q}_f + \text{常数项} \cdot \tag{12}$$

式(10) 和(11) 可进一步表示为

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{H} \boldsymbol{v} + \boldsymbol{F}, \tag{13}$$

其中, $\boldsymbol{v} = \{\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}\}^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_a & -\boldsymbol{G}_a \\ -\boldsymbol{Q}_a & -\boldsymbol{F}_a^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{F} = \begin{Bmatrix} -\Gamma_a \boldsymbol{R}_a^{-1} \boldsymbol{C}_u^{\mathrm{T}} \gamma + \boldsymbol{r}_q \\ -\boldsymbol{C}_x^{\mathrm{T}} \gamma + \boldsymbol{r}_p \end{Bmatrix} \cdot$

式(13) 中 H 和 F 的各部分, 可根据文献[6] 中给出的时段凝聚公式确定, 具体公式为

$$\boldsymbol{Q}_c = \boldsymbol{Q}_1 + \boldsymbol{F}_1^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{G}_1 \boldsymbol{Q}_2)^{-\mathrm{T}} \boldsymbol{Q}_2 \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_1^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{G}_1 \boldsymbol{Q}_2)^{-\mathrm{T}} \boldsymbol{C}_{x2}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K}^{-1} \boldsymbol{C}_{x2} (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{G}_1 \boldsymbol{Q}_2)^{-1} \boldsymbol{F}_1,$$

$$\boldsymbol{G}_c = \boldsymbol{G}_2 + \boldsymbol{F}_2 (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{G}_1 \boldsymbol{Q}_2)^{-1} \boldsymbol{G}_1 \boldsymbol{F}_2^{\mathrm{T}} - [\boldsymbol{C}_{\lambda 2} + \boldsymbol{C}_{x2} (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{G}_1 \boldsymbol{Q}_2)^{-1} \boldsymbol{G}_1 \boldsymbol{F}_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K}^{-1} [\boldsymbol{C}_{\lambda 2} +$$

$$\boldsymbol{C}_{x2} (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{G}_1 \boldsymbol{Q}_2)^{-1} \boldsymbol{G}_1 \boldsymbol{F}_2^{\mathrm{T}}],$$

$$\boldsymbol{F}_c = \boldsymbol{F}_2 (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{G}_1 \boldsymbol{Q}_2)^{-1} \boldsymbol{F}_1 - \boldsymbol{F}_2 \boldsymbol{G}_1 (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{G}_1 \boldsymbol{Q}_2)^{-\mathrm{T}} \boldsymbol{C}_{x2}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K}^{-1} \boldsymbol{C}_{x2} (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{G}_1 \boldsymbol{Q}_2)^{-1} \boldsymbol{F}_1 -$$

$$\boldsymbol{C}_{\lambda 2}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{C}_{x2}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{Q}_2)^{-1}\boldsymbol{F}_1,$$

$$\boldsymbol{C}_{\gamma c}=\boldsymbol{C}_{\gamma 1}-\boldsymbol{C}_{\lambda 1}[(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{Q}_2)^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2-(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{Q}_2)^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_{x2}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{C}_{x2}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{Q}_2)^{-1}]\boldsymbol{C}_{\lambda 1}^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{C}_{xc}=\boldsymbol{C}_{x1}-\boldsymbol{C}_{\lambda 1}[\boldsymbol{Q}_2(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{Q}_2)^{-1}-(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{Q}_2)^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_{x2}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{C}_{x2}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{Q}_2)^{-1}]\boldsymbol{F}_1,$$

$$\boldsymbol{C}_{\lambda c}=\boldsymbol{C}_{\lambda 1}[(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{Q}_2)^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_2^{\mathrm{T}}-(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{Q}_2)^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_{x2}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{C}_{x2}\boldsymbol{G}_1(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{Q}_2)^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_2^{\mathrm{T}}-$$
$$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{Q}_2)^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_{x2}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{C}_{\lambda 2}],$$

$$\boldsymbol{r}_{qc}=\boldsymbol{r}_{q2}+\boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{Q}_2)^{-1}(\boldsymbol{r}_{q1}-\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{r}_{p2})-[\boldsymbol{C}_{\lambda 2}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{Q}_2)^{-1}\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{C}_{x2}^{\mathrm{T}}]\boldsymbol{K}^{-1}\times$$
$$[\boldsymbol{C}_{x2}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{Q}_2)^{-1}\boldsymbol{r}_{q1}-\boldsymbol{C}_{x2}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{Q}_2)^{-1}\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{r}_{p2}+\boldsymbol{r}_{b2}],$$

$$\boldsymbol{r}_{pc}=\boldsymbol{r}_{p1}+\boldsymbol{F}_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{Q}_2)^{-\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{r}_{q1}-\boldsymbol{r}_{p2})+\boldsymbol{F}_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{Q}_2)^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_{x2}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{-1}[\boldsymbol{C}_{x2}\times$$
$$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{Q}_2)^{-1}\boldsymbol{r}_{q1}-\boldsymbol{C}_{x2}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{Q}_2)^{-1}\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{r}_{p2}+\boldsymbol{r}_{b2}],$$

$$\boldsymbol{r}_{bc}=\boldsymbol{r}_{b1}-\boldsymbol{C}_{\lambda 1}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{Q}_2)^{-\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{r}_{q1}+\boldsymbol{r}_{p2})-\boldsymbol{C}_{\lambda 1}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{Q}_2)^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_{x2}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{-1}[\boldsymbol{C}_{x2}\times$$
$$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{Q}_2)^{-1}\boldsymbol{r}_{q1}-\boldsymbol{C}_{x2}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{Q}_2)^{-1}\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{r}_{p2}+\boldsymbol{r}_{b2}].$$

下面我们将讨论方程(13)进行精细求解.

2 非线性方程的时程精细积分方法

精细积分方法是针对 $\boldsymbol{H}$ 阵为定常矩阵而建立的, 但现实要求我们将其扩展到非线性控制系统. 对于方程(13), 设其系数矩阵 $\boldsymbol{H}$ 可表示为

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{H}_0+\boldsymbol{H}_1(\boldsymbol{v}), \tag{14}$$

式中 $\boldsymbol{H}_0$ 是定常矩阵, 这时方程(13)可表示为

$$\dot{\boldsymbol{v}}=\boldsymbol{H}_0\boldsymbol{v}+(\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{v}+\boldsymbol{F}),\ 且\ \boldsymbol{v}(0)=\boldsymbol{v}_0, \tag{15}$$

上式中非线性项 $\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{v}$ 已合并到非齐次项中了, 令 $\Phi(t)=\exp(\boldsymbol{H}_0t)$, 它是齐次方程 $\dot{\Phi}=\boldsymbol{H}_0\Phi$, $\Phi(0)=\boldsymbol{I}$ 的解, 并存在

$$\Phi(t_1+t_2)=\Phi(t_1)\Phi(t_2).$$

这时非齐次方程(15)的解可表达为

$$\boldsymbol{v}(t)=\Phi(t)\boldsymbol{v}_0+\int_0^{t_f}\Phi(t-t_1)(\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{v}+\boldsymbol{F})\mathrm{d}t_1. \tag{16}$$

为适应精细积分的要求, 需对上述积分方程进行修改. 将时间划分为步长为 τ 的一系列时刻

$$t_0=0,\quad t_1=\tau,\ \cdots,\quad t=k\tau,\ \cdots$$

设已经求出在 t_k 时刻有 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_k$, 利用 $\Phi(t_1+t_2)=\Phi(t_1)\Phi(t_2)$, 可将 $t>t_k$ 时的(16)式写为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}(t)=&\ \Phi(t-t_k)\Phi(t_k)\cdot\boldsymbol{v}_0+\int_0^{t_f}\Phi(t-t_k)\Phi(t_k-t_1)(\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{v}+\boldsymbol{F})\mathrm{d}t_1+\\&\int_{t_k}^{t}\Phi(t-t_1)(\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{v}+\boldsymbol{F})\mathrm{d}t_1=\\&\Phi(t-t_k)\boldsymbol{v}_k+\int_{t_k}^{t}\Phi(t-t_1)(\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{v}+\boldsymbol{F})\mathrm{d}t_1.\end{aligned} \tag{17}$$

设在时段 (t_k, t_{k+1}) 内有

$$\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{v}+\boldsymbol{F}\approx\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r}_1(t-t_k),$$

这样利用文献[1]中公式

$$\boldsymbol{v}_{k+1}=\boldsymbol{T}[\boldsymbol{v}_k+\boldsymbol{H}^{-1}(\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{r}_1)]-\boldsymbol{H}^{-1}(\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_1\tau),$$

可写出 $\boldsymbol{v}_{k+1}$ 的算式

$$\boldsymbol{v}_{k+1}=\boldsymbol{T}[\boldsymbol{v}_k+\boldsymbol{H}_0^{-1}(\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{H}_0^{-1}\boldsymbol{r}_1)]-\boldsymbol{H}_0^{-1}(\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{H}_0^{-1}\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_1\tau),\tag{18}$$

式中 $\boldsymbol{T}=\Phi(\tau)$•

对于方程(18),可采用迭代法求解•

3　非线性方程的迭代格式

令

$$\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{H}_1(\boldsymbol{v}_k)\boldsymbol{v}_k+\boldsymbol{F}(t_k),$$

$$\boldsymbol{r}_1=\tau^{-1}[\boldsymbol{H}_1(\boldsymbol{v}_{k+1})\boldsymbol{v}_{k+1}+\boldsymbol{F}(t_{k+1})-\boldsymbol{r}_0]\bullet$$

这时方程(15)可写成

$$\dot{\boldsymbol{v}}=\boldsymbol{H}_0\boldsymbol{v}+\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r}_1(t-t_k),\quad \boldsymbol{v}_k=\boldsymbol{v}(t_k)\qquad(t_k\leqslant t\leqslant t_{k+1})\bullet\tag{19}$$

同样可以写出方程(18)的精细积分形式• 将 $\boldsymbol{r}_1$ 代入方程(18),可得

$$[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q}_a\boldsymbol{H}_1(\boldsymbol{v}_{k+1})]\boldsymbol{v}_{k+1}=\boldsymbol{r}_k,\tag{20}$$

其中

$$\boldsymbol{Q}_a=(\boldsymbol{T}_a\boldsymbol{H}_0^{-1}/\tau-\boldsymbol{I})\boldsymbol{H}_0^{-1},$$

$$\boldsymbol{r}_k=\boldsymbol{Q}_a(\boldsymbol{F}_{k+1}-\boldsymbol{r}_0)+\boldsymbol{T}\boldsymbol{v}_k+\boldsymbol{T}_a\boldsymbol{H}_0^{-1}\boldsymbol{r}_0,$$

$$\boldsymbol{T}_a=\boldsymbol{T}-\boldsymbol{I}\bullet$$

写成迭代格式

$$[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q}_a\boldsymbol{H}_1(\boldsymbol{v}_k)]\boldsymbol{v}_{k+1}^{(i+1)}=\boldsymbol{r}'_k(\boldsymbol{v}_{k+1}^{(i)})\quad(i=0,1,2,\cdots),$$

$$\boldsymbol{r}'_k(\boldsymbol{v}_{k+1})=\boldsymbol{r}_k+\boldsymbol{Q}_a[\boldsymbol{H}_1(\boldsymbol{v}_{k+1})-\boldsymbol{H}_1(\boldsymbol{v}_k)]\boldsymbol{v}_{k+1}\bullet\tag{21}$$

初始时,令 $\boldsymbol{v}_{k+1}^{(0)}=\boldsymbol{r}_k$•

以上就是求解非线性动力学方程的精细积分法的迭代格式• 用精细积分法求解非线性方程的线性化处理有两种方法:

1. 显式方法

直接用点斜式方程,先求出已知时刻 $\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{v}+\boldsymbol{F}$ 的导数,即在该时刻的 $\boldsymbol{r}_1$,再由式(18)求下一时刻的 $\boldsymbol{v}_{k+1}$•

2. 隐式方法

已知 t_k 时刻的位移 $\boldsymbol{v}_k$,假定 t_{k+1} 时刻的位移为 $\boldsymbol{v}_{k+1}$,则 $\boldsymbol{r}_1=(\boldsymbol{v}_{k+1}-\boldsymbol{v}_k)/\tau$• 由式(18)求得的 $\boldsymbol{v}_{k+1}$ 与假定值比较,修正后再循环迭代,直到满足精度要求为止•

4　数值例题

考虑一控制系统,其 $m=4$, $n=4$•

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)=\begin{Bmatrix}f_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)\\ f_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)\\ f_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)\\ f_4(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}x_1+x_2+x_3+u_1^2+u_1\\ x_2+x_3+x_1^2+u_2\\ x_1+x_2+x_3+u_3^2\\ x_1+x_2+x_3+x_4+u_4^2\end{Bmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)=\begin{Bmatrix}C_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)\\ C_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)\\ C_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)\\ C_4(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}x_1+x_2^2+u_1\\ x_2+x_3+u_2\\ x_3+x_4+u_3\\ x_1+x_2+x_3+x_4+u_4^2\end{Bmatrix},$$

$$P(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2, \qquad X(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2,$$
$$U(\boldsymbol{u}) = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$$

由上述条件可得

$$\boldsymbol{Q}_k = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{R}_k = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{F}_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2x_1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_k = \begin{bmatrix} 2u_1 + 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2u_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2u_4 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{G}_k = \begin{bmatrix} 2u_1^2 + 2u_1 + 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2u_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2u_4^2 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}_{xk} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C}_{uk} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2u_4 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}_{0k} = \begin{Bmatrix} x_1 + x_2^2 + u_1 \\ x_2 + x_3 + u_2 \\ x_3 + x_4 + u_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + u_4^2 \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{C}_{\gamma k} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2u_4^2 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}_{\lambda k} = \begin{bmatrix} u_1 + 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2u_4^2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{U}_{,a} = \begin{Bmatrix} 2u_1 \\ 2u_2 \\ 2u_3 \\ 2u_4 \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{P}_{,a} = \begin{Bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \\ 2x_4 \end{Bmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}_{,aa} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{r}_{qk} = -\begin{Bmatrix} 2u_1^2 + u_1 \\ u_2 \\ 2u_3^2 \\ 2u_4^2 \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{r}_{pk} = -\begin{Bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \\ 2x_4 \end{Bmatrix},$$

$$\boldsymbol{r}_{bk} = \begin{Bmatrix} x_1 + x_2^2 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 + x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - u_4^2 \end{Bmatrix},$$

初始条件为(上标为迭代步, 下标为时间步)

$$x_0^0 = \begin{Bmatrix} 0.9 \\ 0.9 \\ 0.9 \\ 0.9 \end{Bmatrix}, \quad x_1^0 = \begin{Bmatrix} 0.8 \\ 0.8 \\ 0.8 \\ 0.8 \end{Bmatrix}, \quad x_2^0 = \begin{Bmatrix} 0.7 \\ 0.7 \\ 0.7 \\ 0.7 \end{Bmatrix},$$

$$x_3^0 = \begin{Bmatrix} 0.6 \\ 0.6 \\ 0.6 \\ 0.6 \end{Bmatrix}, \quad x_4^0 = \begin{Bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{Bmatrix}, \quad x_5^0 = \begin{Bmatrix} 0.4 \\ 0.4 \\ 0.4 \\ 0.4 \end{Bmatrix},$$

$$x_6^0 = \begin{Bmatrix} 0.3 \\ 0.3 \\ 0.3 \\ 0.3 \end{Bmatrix}, \quad x_7^0 = \begin{Bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \end{Bmatrix}, \quad x_8^0 = \begin{Bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{Bmatrix},$$

$$x_9^0 = \begin{Bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{Bmatrix}, \quad u_k^0 = \begin{Bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{Bmatrix} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, 9).$$

经过 8 次迭代, 可得很精确的控制向量和状态向量

$$u_0^8 = \begin{Bmatrix} -1.6326 \\ 1.3639 \\ -1.1762 \\ 1.5219 \end{Bmatrix}, \quad u_1^8 = \begin{Bmatrix} -1.4286 \\ 1.3018 \\ -1.0319 \\ 1.3228 \end{Bmatrix}, \quad u_2^8 = \begin{Bmatrix} -1.3005 \\ 1.1812 \\ -0.8393 \\ 1.1920 \end{Bmatrix}, \quad u_3^8 = \begin{Bmatrix} -1.1009 \\ 0.8996 \\ -0.5023 \\ 0.8312 \end{Bmatrix},$$

$$u_4^8 = \begin{Bmatrix} -0.0092 \\ 0.5692 \\ -0.2696 \\ 0.4910 \end{Bmatrix}, \quad u_5^8 = \begin{Bmatrix} 1.0082 \\ 0.2913 \\ -0.0091 \\ 0.0990 \end{Bmatrix}, \quad u_6^8 = \begin{Bmatrix} 1.1815 \\ -0.0126 \\ 0.2813 \\ -0.2758 \end{Bmatrix}, \quad u_7^8 = \begin{Bmatrix} 1.2816 \\ -0.3724 \\ 0.4283 \\ -0.4167 \end{Bmatrix},$$

$$u_8^8 = \begin{Bmatrix} 1.3002 \\ -0.5292 \\ 0.5918 \\ -0.5972 \end{Bmatrix}, \quad u_9^8 = \begin{Bmatrix} 1.3362 \\ -0.7986 \\ 0.8762 \\ -0.8927 \end{Bmatrix},$$

$$x_0^8 = \begin{Bmatrix} 1.5002 \\ -1.3872 \\ 1.2837 \\ -1.6082 \end{Bmatrix}, \quad x_1^8 = \begin{Bmatrix} 0.9929 \\ -0.9732 \\ 1.0082 \\ -1.4923 \end{Bmatrix}, \quad x_2^8 = \begin{Bmatrix} 0.6803 \\ -0.6978 \\ 0.7932 \\ -1.2092 \end{Bmatrix}, \quad x_3^8 = \begin{Bmatrix} 0.4092 \\ -0.4618 \\ 0.4813 \\ -1.0006 \end{Bmatrix},$$

$$x_4^8 = \begin{Bmatrix} 0.6742 \\ -0.2807 \\ 0.3002 \\ -0.8701 \end{Bmatrix}, \quad x_5^8 = \begin{Bmatrix} 1.0082 \\ -0.0008 \\ 0.3987 \\ -0.3724 \end{Bmatrix}, \quad x_6^8 = \begin{Bmatrix} 1.1670 \\ 0.3762 \\ 0.7963 \\ 0.0016 \end{Bmatrix}, \quad x_7^8 = \begin{Bmatrix} 1.2797 \\ 0.7396 \\ 0.9170 \\ 0.3250 \end{Bmatrix},$$

$$x_8^8 = \begin{Bmatrix} 1.3920 \\ 0.9716 \\ 1.0021 \\ 0.4006 \end{Bmatrix}, \quad x_9^8 = \begin{Bmatrix} 1.4936 \\ 1.2816 \\ 1.1987 \\ 0.5986 \end{Bmatrix}.$$

在上述例题计算过程可发现本文方法不仅具有非常高的计算精度, 而且时间步长对计算

结果的影响较小,算法有良好的稳定性• 精细积分法的最大特点是对微分方程进行求解时,在时域内放弃了传统的差分算法,这对计算结果的精度及计算的稳定性起着重要的作用•

5 结 束 语

本文利用在线性动力系统已建立的时程精细积分算法,对受等式约束的非线性最优控制问题进行了精细计算,反映出精细积分方法不仅适用于线性系统的计算,对非线性动力系统计算同样适合,这为非线性问题的分析和计算提供了新的途径•

[参 考 文 献]

[1] 钟万勰,欧阳华江,邓子辰. 计算结构力学与最优控制[M]. 大连:大连理工大学出版社,1993.

[2] 钟万勰. 暂态历程的精细计算方法[J]. 计算结构力学及其应用,1995,**12**(1):1—6.

[3] 邓子辰. 飞行器控制系统的高精度计算方法[J]. 飞行力学,1997,**15**(2):46—51.

[4] 钟万勰. H_∞控制状态反馈与瑞利商精细积分[J]. 计算力学学报,1999,**16**(1):1—7.

[5] 邓子辰. 基于子结构消元法的柔性结构主动控制的研究,航空学报,1997,**18**(5):559—562.

[6] DENG Zi_chen. The optimal solution of the constrained nonlinear control system[J]. Computers & Structures, 1994, **53**(5): 1115—1121.

Time Precise Integration Method for Constrained Nonlinear Control System

DENG Zi_chen[1,2], ZHONG Wan_xie[2]

(1. Department of Civil Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, P R China;

2. State Key Laboratory for Structural Analysis of Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116023, P R China)

Abstract: For the constrained nonlinear optimal control problem, by taking the first term of Taylor series, the dynamic equation is linearized. Thus by introducing into the dual variable (Lagrange multiplier vector), the dynamic equation can be transformed into Hamilton system from Lagrange system on the basis of the original variable. Under the whole state, the problem discussed can be described from a new view, and the equation can be precisely solved by the time precise integration method established in linear dynamic system. A numerical example shows the effectiveness of the method.

Key words: nonlinear control system; constraint equation; time precise integration