应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2002) 01_0059_06

Hopfield 型时滞神经网络的稳定性分析*

王林山， 徐道义

(四川大学 数学学院, 成都 610064)

(李继彬推荐)

摘要: 研究了具有时滞的 Hopfield 型神经网络模型平衡点的全局渐近稳定性. 去掉了有关文献中关于 f_j 在 $\mathbf{R}$ 上有界性、可微性的条件, 给出了更弱的实用性较强的判定平衡点的存在唯一性及全局渐近稳定性的条件, 增强了模型的适用性.

关 键 词: 神经网络; 平衡点; 稳定性; 拓扑度
中图分类号: O175; TN711 文献标识码: A

引 言

近年来, 国内外对 Hopfield 型神经网络模型

$$C_i\dot{x}_i(t) = -\frac{x_i}{R_i} + \sum_{j=1}^{n} T_{ij}f_j(x_j(t-\tau_{ij})) + I_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n), \tag{1}$$

进行了深入的研究, 其中 R_i 为电阻, C_i 为电容, R_i, C_i 并联, I_i 为电流, T_{ij} 是神经元 i, j 的突触强度, x_i 是第 i 个神经元的输入, $f_j(x_j)$ 为输出, τ_{ij} 为时滞. 为了研究方便, 令

$$b_i = \frac{1}{C_iR_i}, \quad w_{ij} = \frac{T_{ij}}{C_i}, \quad p_i = \frac{I_i}{C_i}.$$

则(1) 化为

$$\dot{x}_i(t) = -b_ix_i(t) + \sum_{j=1}^{n} w_{ij}f_j(x_j(t-\tau_{ij})) + p_i \quad (t \geqslant 0,\ i = 1, 2, \cdots, n). \tag{2}$$

为了研究(2) 的全局渐近稳定性, 文献[1~ 9] 要求 f_j 在 $\mathbf{R}$ 上可微、有界, 文献[10] 要求 f_j 在 $\mathbf{R}$ 上可微并且 f_j' 有界. 本文去掉了 f_j 在 $\mathbf{R}$ 上可微性条件以及有界性的限制, 给出了较弱的判定 (2) 的平衡点存在唯一性以及全局渐近稳定性的条件.

1 主要结果及有关讨论

有关记号

$\mathbf{R}(\mathbf{R}_+)$: 全体实数(非负实数) 集合. $\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵.

$\forall \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n$, 记 $[\boldsymbol{x}]^+ = (|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_n|)^{\mathrm{T}}$.

---

* 收稿日期: 2000_08_15; 修订日期: 2001_09_25
基金项目: 国家自然科学基金重点资助项目(19831030)
作者简介: 王林山(1956—), 男, 山东人, 教授, 博士;
徐道义(1948—), 男, 四川人, 教授, 博导.

$U(\mathbf{R}_0) \equiv \left\{ x \in \mathbf{R}^n, [x]^+ \leqslant \mathbf{R}_0 \in \mathbf{R}_+^n \right\}$.

$\partial U(\mathbf{R}_0)$: 表示 $U(\mathbf{R}_0)$ 的边界, $d(\boldsymbol{h}, U(\mathbf{R}_0), 0)$ 表示拓扑度.

M_矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$; $a_{ii} > 0$, $a_{ij} \leqslant 0 \quad (i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots, n)$,

$\det \boldsymbol{A}_k > 0$, $\boldsymbol{A}_k = (a_{ij})_{k\times k} \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$.

$\boldsymbol{w} = (w_{ij})_{n\times n}$, $\boldsymbol{w}^+ = (|w_{ij}|)_{n\times n}$, $\sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)$, $\boldsymbol{B} = \mathrm{diag}(b_1, b_2, \cdots, b_n)$. 方程(2) 的向量形式为:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = -\boldsymbol{Bx} + \boldsymbol{wf}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{p}. \tag{3}$$

定理 1.1 如果系统(3) 满足下列条件

$\mathrm{T}_1 \quad |f_j(u_1) - f_j(u_2)| \leqslant \sigma_j |u_1 - u_2| \; (\forall u_1, u_2 \in \mathbf{R}, j = 1, 2, \cdots, n)$.

$\mathrm{T}_2 \quad \boldsymbol{C} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{w}^+\sigma$ 是 M_矩阵.

则系统(3) 存在唯一的平衡点 $\boldsymbol{x}^*$, $\boldsymbol{x}^*$ 是全局渐近稳定且与滞量无关.

证明 Ⅰ 平衡点的存在性

由 T_1 知, $f_j(u)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续, 并且

$$|f_j(u)| \leqslant \sigma_j |u| + |f_j(0)| \qquad (j = 1, 2, \cdots, n). \tag{4}$$

显然, 求(3) 的平衡点等价于求方程

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) \triangleq \boldsymbol{Bx} - \boldsymbol{wf}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{p} = \boldsymbol{0} \tag{5}$$

的根. 下面应用拓扑度理论, 证明系统(3) 平衡点的存在性.

考虑同伦映射

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, \lambda) = \lambda \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) + (1 - \lambda)\boldsymbol{x} \qquad (\lambda \in J = [0, 1]). \tag{6}$$

往证存在 $\mathbf{R}_0 \in \mathbf{R}_+^n$, 使得 $\forall \lambda \in J$, $\boldsymbol{H}(x, \lambda)$ 在 $U(\mathbf{R}_0)$ 的边界 $\partial U(\boldsymbol{R}_0)$ 上不为零. 事实上, 令 $H_i(\boldsymbol{x}, \lambda)$ 是 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, \lambda)$ 的第 i 个分量. 即

$$H_i(\boldsymbol{x}, \lambda) = \lambda[b_i x_i - (\sum_{j=1}^n w_{ij} f_j(x_j) + p_i)] + (1 - \lambda) x_i.$$

由(4) 式:

$$\begin{aligned}
|H_i(\boldsymbol{x}, \lambda)| &= |\lambda[b_i x_i - (\sum_{j=1}^n w_{ij} f_j(x_j) + p_i)] + (1 - \lambda) x_i| \geqslant \\
&[1 + \lambda(b_i - 1)]|x_i| - \lambda(\sum_{j=1}^n |w_{ij}||f_j(x_j)| + |p_i|) \geqslant \\
&[1 + \lambda(b_i - 1)]|x_i| - \lambda\sum_{j=1}^n |w_{ij}|\sigma_j|x_j| - \\
&\lambda(|p_i| + \sum_{j=1}^n |w_{ij}||f_j(0)|),
\end{aligned}$$

即
$$\begin{aligned}
\boldsymbol{H}^+ &\geqslant [\boldsymbol{E} + \lambda(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{E})][\boldsymbol{x}]^+ - \lambda\boldsymbol{w}^+\sigma[\boldsymbol{x}]^+ - \lambda(\boldsymbol{p}^+ + \boldsymbol{w}^+\boldsymbol{f}^+(\boldsymbol{0})) = \\
&(1 - \lambda)[\boldsymbol{x}]^+ + \lambda[(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{w}^+\sigma)[\boldsymbol{x}]^+ - (\boldsymbol{p}^+ + \boldsymbol{w}^+\boldsymbol{f}^+(\boldsymbol{0}))].
\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{w}^+\sigma$ 是 M_矩阵, 所以[11], $(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{w}^+\sigma)^{-1} \geqslant \boldsymbol{0}$ 且存在 $\boldsymbol{Q} = (Q_1, Q_2, \cdots, Q_n)^{\mathrm{T}}$, $Q_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$, 使得 $(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{w}^+\sigma)\boldsymbol{Q} > \boldsymbol{0}$.

取

$$U(\mathbf{R}_0) = \left\{ \boldsymbol{x} : [\boldsymbol{x}]^+ \leqslant \boldsymbol{R}_0 \triangleq \boldsymbol{Q} + (\boldsymbol{B} - \boldsymbol{w}^+\sigma)^{-1}(\boldsymbol{p}^+ + \boldsymbol{w}^+\boldsymbol{f}^+(\boldsymbol{0})) \right\},$$

则 $U(\mathbf{R}_0)$ 非空, 且当 $\boldsymbol{x} \in \partial U(\boldsymbol{R}_0)$ 时

$$H^+ \geqslant (1-\lambda)[x]^+ + \lambda(B - w^+\sigma)[[x]^+ - (B - w^+\sigma)^{-1}(p^+ + w^+ f^+(\mathbf{0})] = (1-\lambda)[x]^+ + \lambda(B - w^+\sigma)Q > \mathbf{0} \qquad (\lambda \in [0,1]).$$

即在 $\partial U(\mathbf{R}_0)$ 上对一切的 $\lambda \in J = [0,1]$, 均有

$$H(x, \lambda) \neq 0.$$

根据同伦不变性[12~13], 我们得到

$$d(h, U(\mathbf{R}_0), 0) = d(H(x, \lambda), U(\mathbf{R}_0), 0) = d(H(x, 0), U(\mathbf{R}_0), 0) = 1.$$

由拓扑度理论知[12], $h(x, p) = \mathbf{0}$ 在 $U(\mathbf{R}_0)$ 内至少有一个根, 即系统(3) 至少有一个平衡点.

II 平衡点的唯一性及全局渐近稳定性

设 x^* 是(3) 的平衡点, $x(t)$ 是系统(3) 的异于 x^* 的任意解, 则

$$\frac{\mathrm{d}(x_i(t) - x_i^*)}{\mathrm{d}t} = -b_i(x_i(t) - x_i^*) + \sum_{j=1}^n w_{ij}[f_j(x_j(t-\tau_{ij})) - f_j(x_j^*)]. \tag{7}$$

因为 $C = B - w^+\sigma$ 是 M_矩阵, 所以存在一组常数 $r_i > 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$, 使得

$$r_i b_i - \sum_{j=1}^n \sigma_i r_j |w_{ji}| > 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

定义函数

$$V(t) = \sum_{i=1}^n r_i[|x_i(t) - x_i^*| + \sum_{j=1}^n |w_{ij}| \int_{t-\tau_{ij}}^t |f_j(x_j(s)) - f_j(x_j^*)| \,\mathrm{d}s], \tag{8}$$

则

$$\begin{aligned} D^+ V(t)|_{(3)} \leqslant{} & \sum_{i=1}^n r_i[-b_i|x_i(t) - x_i^*| + \sum_{j=1}^n |w_{ij}||f_j(x_j(t-\tau_{ij})) - f_j(x_j^*)| + \\ & \sum_{j=1}^n |w_{ij}||f_j(x_j(t)) - f_j(x_j^*)| - \sum_{j=1}^n |w_{ij}||f_j(t-\tau_{ij}) - f_j(x_j^*)|] = \\ & \sum_{i=1}^n r_i[-b_i|x_i(t) - x_i^*| + \sum_{j=1}^n |w_{ij}||f_j(x_j(t)) - f_j(x_j^*)|] \leqslant \\ & \sum_{i=1}^n(-r_i b_i|x_i(t) - x_i^*| + \sum_{j=1}^n r_i\sigma_j|w_{ij}||x_j(t) - x_j^*|) = \\ & \sum_{i=1}^n(-r_i b_i|x_i(t) - x_i^*| + \sum_{j=1}^n r_j\sigma_i|w_{ji}||x_i(t) - x_i^*|) = \\ & -\sum_{i=1}^n(r_i b_i - \sum_{j=1}^n \sigma_i r_j|w_{ji}|)|x_i(t) - x_i^*| \leqslant \\ & -m\sum_{i=1}^n|x_i(t) - x_i^*|, \end{aligned} \tag{9}$$

其中 $m = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(r_i b_i - \sum_{j=1}^n \sigma_i r_j |w_{ji}|) > 0$. 对(9) 积分得

$$V(t) + m\int_0^t \sum_{i=1}^n |x_i(s) - x_i^*| \,\mathrm{d}s \leqslant V(0) \qquad (t \geqslant 0).$$

因此，$\int_0^t \sum_{i=1}^{n} | x_i(s) - x_i^* | \mathrm{d}s < +\infty \quad (t \geqslant 0)$，

$$\sum_{i=1}^{n} | x_i(t) - x_i^* | \text{ 在}[0, +\infty) \text{ 上有界},$$

从而 $| x_i(t) - x_t^* |$ 在 $[0, +\infty)$ 上有界，不妨假设

$$| x_i(t) - x_i^* | \leqslant M^* \ (t \geqslant 0, i = 1, 2, \cdots, n)\cdot$$

由(7)式

$$-\left(b_i + \sum_{j=1}^{n} \sigma_j | w_{ij} |\right) M^* \leqslant \frac{\mathrm{d}(x_i(t) - x_i^*)}{\mathrm{d}t} \leqslant \left(b_i + \sum_{j=1}^{n} \sigma_j | w_{ij} |\right) M^*,$$

即 $\frac{\mathrm{d}(x_i(t) - x_i^*)}{\mathrm{d}t} (i = 1, 2, \cdots, n))$ 在 $[0, +\infty)$ 上有界·

因为，$(x_i(t) - x_i^*)$ 与 $\mathrm{d}(x_i(t) - x_i^*)/\mathrm{d}t$ 在 $[0, +\infty)$ 上有界，所以，$| x_i(t) - x_i^* |$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续，从而 $\sum_{i=1}^{n} | x_i(t) - x_i^* |$ 在 $[0, +\infty)$ 上也一致连续· 利用 Barbalat 引理[14]，知

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{i=1}^{n} | x_i(t) - x_i^* | = 0,$$

故 $\lim_{t\to\infty} | x_i(t) - x_i^* | = 0$，

即 $\lim_{t\to\infty} x_i(t) = x_i^* \quad (i = 1, 2, \cdots, n)\cdot$

因为系统(3)的异于平衡点 $\boldsymbol{x}^*$ 的任何解 $\boldsymbol{x}(t)$，当 $t \to +\infty$ 时均趋于 $\boldsymbol{x}^*$，并且有(9)知平衡点 $\boldsymbol{x}^*$ 是稳定的，所以(3)的平衡点是唯一的，并且是全局渐近稳定的·　　(证毕)·

推论 1　如果系统(3)满足条件 T_1 且

$$\mathrm{T}_3 \quad \sum_{j=1}^{n} | w_{ij} | \sigma_j < b_i \text{ 或} \sum_{i=1}^{n} | w_{ij} | \sigma_j < b_j\cdot$$

则系统(3)存在唯一的平衡点 $\boldsymbol{x}^*$，$\boldsymbol{x}^*$ 是全局渐近稳定且与滞量无关·

因为无论 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{w}^+ \sigma$ 行严格对角占优，还是列严格对角占优，都保证 $\boldsymbol{C}$ 是 M_矩阵，因此，推论成立·

推论 2　如果系统(3)满足条件 T_1 且

$$\mathrm{T}_4 \quad \frac{1}{2b_i} \sum_{j=1}^{n} (| w_{ij} | \sigma_j + | w_{ji} | \sigma_i) < 1 \quad (b_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n)\cdot$$

则系统(3)存在唯一的平衡点 $\boldsymbol{x}^*$，$\boldsymbol{x}^*$ 是全局渐近稳定的且与滞量无关·

由文献[10]的推论 2 知，若 T_4 成立，则 $\boldsymbol{C}$ 是 M_矩阵· 因此，本文推论 2 成立·

注　文献[4~7]的有关结果是推论 1, 2 的特例·

2　实　　例

考虑系统

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} |x_1(t-\tau_1)+1|+|x_1(t-\tau_1)-1| \\ |x_2(t-\tau_2)+1|+|x_2(t-\tau_2)-1| \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{w}^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix},$$

$$f_1(x_1(t-\tau_1)) = |x_1(t-\tau_1)+1|+|x_1(t-\tau_1)-1|,$$

$$f_2(x_2(t-\tau_2)) = |x_2(t-\tau_2)+1|+|x_2(t-\tau_2)-1| \cdot$$

因为 $\forall u_1, u_2 \in \mathbf{R}$,

$$|f_1(u_1)-f_1(u_2)| \leqslant 2|u_1-u_2|,$$

$$|f_2(u_1)-f_2(u_2)| \leqslant 2|u_1-u_2| \cdot$$

所以 $\sigma_1 = \sigma_2 = 2$, 由此得

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{w}^+\sigma = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot$$

因为, $\det \boldsymbol{C}_1 = 1 > 0$, $\det \boldsymbol{C}_2 = \frac{1}{2} > 0$• 所以 $\boldsymbol{C}$ 是 M_矩阵• 因此, 由本文定理知系统(10) 存在唯一的全局渐近稳定的平衡点 $\boldsymbol{x}^*$• 事实上,

$$\boldsymbol{x}^* = \left(\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right)^{\mathrm{T}} \cdot$$

注 显然 f_1, f_2 在 $\mathbf{R}$ 上无界, $\boldsymbol{B} - \boldsymbol{w}^+\sigma$ 即不是行严格对角占优, 也不是列严格对角占优矩阵, 文献[4～7] 的有关定理不能判别(10) 的平衡点的唯一性及全局渐近稳定性•

[参 考 文 献]

[1] 梁学斌, 吴立德. Hopfield 型神经网络的全局指数稳定性及其应用[J]. 中国科学(A 辑), 1995, **25**(5): 523—532.

[2] Hipfield J J. Neurons with graded response have collective computational properties like those of two_state neurons[J]. Proc Natl Acad Sci USA, 1984, **81**: 3088—3092.

[3] LIAO Xiao_feng, YU Jue_bang. Robust stability for interval Hopfield neural networks with time delay [J]. IEEE Transacions on Neural Networks, 1998, **9**(5): 1043—1045.

[4] 曹进德, 李继彬. 具有交互神经传递的神经网络的稳定性[J]. 应用数学和力学, 1998, **19**(5): 425—430.

[5] 黄永明, 周冬明, 曹进德. 一类具有时滞的神经网格模型的收敛性[J]. 生物数学学报, 1998, **13**(1): 47—49.

[6] 曹进德, 林怡平. 一类时滞神经网络模型的稳定性[J]. 应用数学和力学, 1999, **20**(8): 851—855.

[7] 曹进德, 万世栋. 具有时滞的 Hopfield 型神经网络的全局渐近稳定性[J]. 生物数学学报, 1997, **12**(1): 60—63.

[8] 房辉. 几类动力系统的周期解与稳定性问题研究[D]. 成都: 四川大学博士论文, 1999 年 11 月,

45－67.

[9] 蒋耀林. 细胞神经网络系统解轨线的长时间性态[J]. 应用数学和力学, 2000, **21**(3): 285－289.

[10] 廖晓昕. Hopfield 型神经网络的稳定性[J]. 中国科学(A 辑), 1993, **23**(10): 1032－1035.

[11] 廖晓昕. 稳定性的理论、方法和应用[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1999.

[12] 胡适耕. 非线性分析理论与方法[M]. 武汉: 武汉华中理工大学出版社, 1996.

[13] 沈轶, 廖晓昕. 广义的时滞细胞神经网络的动态分析[J]. 电子学报, 1999, **27**(10): 62－64.

[14] Gopalsamy K. Stability and Oscillations in Dalay Differential Equations of Population Dynamics [M]. Netherlands: Dordrecht, Kluwer Academic. Publishers, 1992.

[15] 廖晓昕. 细胞神经网络的数学理论(Ⅱ)[J]. 中国科学(A 辑), 1994, **24**(10): 1043－1046.

Stability Analysis of Hopfield Neural Networks With Time Delay

WANG Lin_shan, XU Dao_yi

(Mathematics College, Sichuan University, Chengdu 610064, P R China)

Abstract: The global asymptotic stability for Hopfield neural networks with time delay was investigated. A theorem and two corollaries were obtained, in which the boundness and differentiability of f_j on R in some articles were deleted. Some sufficient conditions for the existence of global asymptotic stable equilibrium of the networks in this paper are better than the sufficient conditions in quoted articles.

Key words: neural networks; equilibrium; stability; topological degree