应用数学和力学, 第 23 卷 第 1 期(2002 年 1 月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

文章编号: 1000_0887(2002)01_0065_08

锥线性算子的延拓定理*

盛宝怀, 刘三阳, 毛 华

(西安电子科技大学 应用数学系, 西安 710071)

(协平推荐)

摘要: 建立了一种锥分离定理, 据此证明了锥线性算子的延拓定理, 作为应用,给出了正线性算子的延拓定理•

关 键 词: 延拓定理; 分离定理; 锥分离定理; 锥线性算子
中图分类号: O177.2 文献标识码: A

引 言

众所周知, 线性泛函的延拓定理是泛函分析中的一个基本定理• 这一定理已经被推广到了多种形式,并且在非光滑分析、最优化和变分问题等领域发现了许多新的用途[1~6]• 另外,由于正线性算子是一重要的算子类且为函数逼近论的基础• 因此研究正线性算子的延拓很有必要•

本文首先证明两个凸集可由锥线性算子分离(锥线性算子为正线性算子的推广), 进而在 Benson 真有效意义下给出了锥线性算子的一种延拓, 作为应用还给出了正线性算子的延拓定理•

1 预备知识

文中, X 表示一个由锥 D 而诱导出偏序的 Banach 空间, Y 为一个由锥 S 而诱导出偏序的 Banach 空间, 其中 $D = \mathrm{int}D \cup \{\theta\}$, $S = \mathrm{int}S \cup \{\theta\}$, 这里 $\mathrm{int}D$ 和 $\mathrm{int}S$ 分别为 D 及 S 的内部•

用 θ 表示文中所出现的一切零元素•

令 A 为 Y 中一非空子集, 则由 A 而诱导出的生成锥定义为

$$\mathrm{cone}(A) = \{\alpha a: \alpha \geqslant 0, a \in A\}•$$

众所周知 $\mathrm{cone}(A)$ 为一非空锥, 且当 A 为一凸集时 $\mathrm{cone}(A)$ 为凸锥•

如果 $A \subset X$, $\theta \in \mathrm{int}A$, 或对任意 $a \in X$ 存在 $\lambda > 0$ 而使 $\lambda a \in X$, 则称 A 为一吸引集•

设 $A \subset Y$, A 非空, 令

---

* 收稿日期: 2000_01_20; 修订日期: 2001_06_25
基金项目: 国家自然科学基金资助(69972036); 陕西省自然科学基金资助(99SL02)
作者简介: 盛宝怀(1962—), 男, 陕西凤县人, 副教授, 博士, 现在宁波大学数学所;
刘三阳(1959—), 男, 西安市人, 教授, 博士生导师.

$P_{\min}[A,S]=\{y\in A:(-S)\cap \text{clcone}(A+S-y)=\{\theta\}\}$.

$P_{\max}[A,S]=\{y\in A:S\cap \text{clcone}(A-S-y)=\{\theta\}\}$,

和 $\min[A,S]=\{y\in A:A\cap(y-S)=\{y\}\}$, $P_{\min}[A,S]\subset \min[A,S]$,

这里 cl$A$ 为A 的闭包.

我们称 $P_{\min}[A,S]$ 为 A 的 Benson 真有效集.

定义在 X 上的集值映射$F:X\to 2^Y$被称为S 一凸的, 如果, 对一切$x_1, x_2\in X$, 任意 $\lambda\in[0,1]$

$\lambda F(x_1)+(1-\lambda)F(x_2)\subset F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)+S$.

集值映射: $F:X\to 2^Y$ 的上图定义为

$\text{epi}F=\{(x,y)\in X\times Y: y\in F(x)+S\}$.

它的像定义为

$\text{Graph}(F)=\{(x.y):y\in F(x)\}$,

其逆 F^{-1}为映 Y 到X 的集值映射. 定义为 $x\in F^{-1}(y)$, 当且仅当 $y\in F(x)$ 或$(x,y)\in \text{Graph}(F)$.

一个已知的结论是 F 为S 一凸当且仅当 epi$F$ 为凸集.

用 Y^* 表示 Y 的对偶, 锥 $Q\subset Y$ 时其正对偶锥Q^* 定义为

$Q^*=\{y^*\in Y^*:y^*(y)\geqslant 0, y\in Q\}$.

映射 $F:X\to 2^Y$ 被称为锥映射[7], 指对一切$x_1,x_2\in X$, 由$x_1-x_2\in D$ 有$F(x_1)-F(x_2)\subset S$.

用 $L(X,Y)$ 表示映 X 到 Y 的一切连续性算子的集合, 用 $L^+(X,Y)=\{L\in L(X,Y):L(D)\subset S\}$ 表示映X 到Y 之锥线性算子类.

设 $F:X\to 2^Y$, 如果 F 的上图为闭集, 则称 F 为闭映射, 如果其上图为一个锥则称 F 为一个(正齐次) 过程. 因此, 一个闭凸过程指一个集值映射, 其上图为一个闭凸锥.

当 $F:X\to 2^Y$ 为一闭凸过程且为锥映射时, 我们称其为一个锥闭凸过程.

2 锥线性算子的延拓定理

引理 2.1[8] 设 Q 为锥, 其对偶锥为 Q^*, 如果$q^*\in Q^*\setminus\{\theta\}$, $q\in \text{int}Q$, 则

$$q^*(q)>0.$$

引理 2.2 令 A 为 Y 的一个凸子集$\theta\in A$, 且

$\text{clcone}(A)\cap(-\text{int}S)\neq\varnothing$,

则

$A\cap(-\text{int}S)\neq\varnothing$,

证明 如若不然假设

$A\cap(-\text{int}S)=\varnothing$

则由 Eidelheit 分离定理[9]知, 存在 $\varphi\in Y^*$ 而使

$\sup_{a\in A}\varphi(\alpha)<\varphi(-s)$, $s\in\text{int}S$.

令 $c\in \text{clcone}A\cap(-\text{int}S)$ 则

$$\sup_{\alpha\in A}\varphi(\alpha)<\varphi(c),$$

由此可找到一实数 a 满足

$$\sup_{\alpha\in A}\varphi(\alpha)\leqslant\alpha<\varphi(c)$$

不失一般性,假设 $\alpha=0$,则

$$\sup_{\alpha\in A}\varphi(\alpha)\leqslant 0,\quad \varphi(c)>0.$$

另一方面由 $c\neq 0$ 且 $c\in \mathrm{clcone}A$ 则存在 $\lambda_n\geqslant 0$, $a_n\in A$,而使 $c=\lim\lambda_n a_n$,由此导出

$$\varphi(c)=\lim_{n\to\infty}\lambda_n\varphi(a_n)\leqslant 0.$$

这与 $\varphi(c)>0$ 矛盾.

引理 2.3 令 X, Y 为 Banach 空间, $C\subset X\times Y$ 为一凸锥. 假设

i) $\mathrm{int}C\neq \varnothing$, $\theta\notin \mathrm{int}C$;

ii) $\{(\theta,y): y\in S\}\subset C$; $\{(x,\theta): x\in D\}\subset C$;

iii) 存在 $x\in X$, $y\in Y$ 而使

$$V_x=\{x\in X:(x,y)\in C\},\quad V_y=\{y\in Y:(x,y)\in C\}$$

为吸收集.

则存在锥线性连续算子 $\Lambda: X\to Y$ 而使

$$\mathrm{clcone}\Big(\bigcup_{(x,y)\in C}(\Lambda(x)+y)\Big)\cap(-S)=\{\theta\}.$$

证明 由 i) 及凸集分离定理知,存在线性泛函 $\Phi\neq\theta$, $\Phi: X\times Y\to R$ 使得

$$\Phi(x,y)\geqslant 0,\quad (x,y)\in C.$$

因而,存在线性泛函 $\varphi: X\to R$, $\psi: Y\to R$, $(\varphi,\psi)\neq(\theta,\theta)$ 而使

$$\varphi(x)+\psi(y)\geqslant 0,\quad (x,y)\in C.$$

现证明下述结论:

a) $\psi\in S^*$, $\varphi\in D^*$.

事实上,由 ii) 及 $y\in S$ 知 $(\theta,y)\in C$ 且

$$\psi(y)=\varphi(\theta)+\psi(y)\geqslant 0.$$

同理可证,当 $x\in D$ 时, $\varphi(x)\geqslant 0$.

b) $\psi\neq\theta$, $\varphi\neq\theta$.

如果不然,设 $\psi=\theta$,由 $(x,y)\in C$ 则 $\varphi(x)\geqslant 0$. 由 V_x 为吸收集,对 $x\in X$,存在 $\lambda>0$ 使 $\pm\lambda x\in V_x$ 且 $\lambda\varphi(\pm x)\geqslant 0$,因而 $\varphi(x)=0$. 这与 $\Phi\neq\theta$ 相矛盾. 因而 $\psi\neq\theta$,同理可证 $\varphi\neq\theta$.

因为 $\mathrm{int}S\neq\varnothing$,因而可找到 $y_0'\in\mathrm{int}S$ 而使 $y_0'\neq\theta$,由引理 2.1 知 $\psi(y_0')>0$,令 $y_0=y_0'/\psi(y_0')$,则 $y_0\in\mathrm{int}S$ 且 $\psi(y_0)=1$. 现在定义一线性算子 $f: R\to Y$ 如下:

$$f(t)=ty_0\qquad(t\in R).$$

由 a) 知, $\Lambda(x)=f\cdot\varphi(x)=\varphi(x)y_0$ 为映 X 到 Y 之锥连续算子且

$$[\varphi(x)+\psi(y)]y_0=f\cdot\varphi(x)+\psi(y)y_0.\tag{1}$$

现进一步证明

$$\mathrm{clcone}\Big(\bigcup_{(x,y)\in C}(\Lambda(x)+y)\Big)\cap(-S)=\{\theta\}.\tag{2}$$

假设 (2) 不成立. 由 $(\theta,\theta)\in C$,我们有

$$\mathrm{clcone}\Big(\bigcup_{(x,y)\in C}(\Lambda(x)+y)\Big)\cap(-\mathrm{int}S)\neq\varnothing.$$

由引理 2.2 有

$$\bigcup_{(x,y)\in C}(\Lambda(x)+y))\cap(-\operatorname{int}S)\neq\varnothing.$$

因而,存在 $(x,y)\in C$ 使得

$$\Lambda(x)+y\in-\operatorname{int}S.$$

由引理2.1知 $\psi(\Lambda(x)+y)<0$. 另一方面

$$\psi(\Lambda(x)+y)=\varphi(x)\psi(y_0)+y(y)\geqslant 0.$$

这一矛盾说明(2)成立.

定理 2.1　令 X、Y 为 Banach 空间, $C\in X\times Y$ 为一凸锥, 且设下列条件满足:

i) $\operatorname{int}C\neq\varnothing$;

ii) $\operatorname{clcone}(\bigcup_{(\theta,y)\in C}y)\cap(-S)=\{\theta\}$, $\operatorname{clcone}(\bigcup_{(x,\theta)\in C}x)\cap(-D)=\{\theta\}$;

iii) 存在 $\hat{y}\in Y$, $\hat{x}\in X$ 使 $V_x=\{x\in X:(x,\hat{y})\in C\}$, $V_x=\{y\in Y:(\hat{x},y)\in C\}$ 为吸收集.

则存在锥线性连续算子 $\Lambda: X\to Y$ 使

$$\operatorname{clcone}(\bigcup_{(x,y)\in C}(\Lambda(x)+y))\cap(-S)=\{\theta\}.$$

证明　考虑下列凸包

$$C_0=C_0[C\cup\{(\theta,y):y\subset S\}\cup\{(x,\theta):x\subset D\}],$$

则

$$C_0=$$
$$\{(1-a-b)(x,y)+\alpha(\theta,y')+b(x',\theta):(x,y)\in C,y'\in S,x'\in D,a,b\geqslant 0\}=$$
$$\{((1-a-b)x+bx'(1-a-b)y+ay'):(x,y)\in C,y'\in S,x'\in D,a,b\geqslant 0\}.$$

显然,对 $t>0$, $tC_0\subset C_0$. 因而 C_0 为一凸锥, 且

$$C_0\supset C.$$

我们指出 $(\theta,\theta)\notin\operatorname{int}C$. 否则, 设 $(\theta,\theta)\in\operatorname{int}C_0$, 则 C_0 为一吸收集, 存在 $t>0$ 使 $t(x_1,y_1)\in C_0$(其中 $x_1\in-\operatorname{int}D$, $y_1\in-\operatorname{int}S$), 因而存在 $a>0$, $b>0$, $(x,y)\in C$, $x'\in D$, $y'\in S$ 使

$$t(x_1,y_1)=((1-a-b)x+bx',(1-a-b)y+ay'))$$

且

$$tx_1=(1-a-b)x+bx',\quad ty_1=(1-a-b)y+ay',$$

由此而知

$$x=\frac{tx_1}{1-a-b}-\frac{bx'}{1-a-b}\in-\operatorname{int}D,\quad y=\frac{ty_1}{1-a-b}-\frac{ay'}{1-a-b}\in-\operatorname{int}S,$$

这与 ii) 矛盾. 因而 $(\theta,\theta)\notin\operatorname{int}C_0$. 因为 $\operatorname{int}C_0\supset\operatorname{int}C$, 由 i) 知 $\operatorname{int}C_0\neq\varnothing$. 令

$$V_x=\{x\in X:(x,\hat{y})\in C_0\}\supset\{x\in X:(x,\hat{y})\in C\},$$
$$V_y=\{y\in X:(\hat{x},y)\in C_0\}\supset\{y\in X:(\hat{x},y)\in C\}.$$

由 iii) 知 V_x, V_y 为吸收集, 因而 C_0 满足引理 2.3 的条件. 定理证毕.

推论 2.1　设 $A\subset X\times Y$ 为一凸集 X, Y, 为 Banach 空间, 假设

i) $\operatorname{int}A\neq\varnothing$;

ii) $\operatorname{clcone}(\bigcup_{(\theta,y)\in A}y)\cap(-S)=\{\theta\}$, $\operatorname{clcone}(\bigcup_{(x,\theta)\in A}x)\cap(-D)=\{\theta\}$;

iii) 存在 $\hat{x}\in X$, $\hat{y}\in Y$ 而使

$$V_x=\{x\in X:(x,\hat{y})\in A\},\quad V_y=\{y\in X:(\hat{x},y)\in A\}\text{ 为吸收集}.$$

则存在锥线性连续算子 $\Lambda: X \to Y$ 而使

$$\mathrm{clcone}\left(\bigcup_{(x,y)\in A}(\Lambda(x)+y)\right)\cap(-S)=\{\theta\}.$$

证明　令 $C=\bigcup_{\lambda>0}\lambda A$ 则 C 为一凸锥, 且满足定理 2.1 的条件.

定理 2.2(延拓定理)　令 X, Y 为 Banach 空间, $F: X_1\to 2^Y$ 为一锥闭凸过程, $L_0: X_0\to Y$ 为一锥线性连续算子, $X_0, X_1\subset X$ 为两个线性子空间, $B=\{(x, L_0(x)): X\in X_0\}$, 假设 $X_0\cap X_1\neq\varnothing$, $\theta\in\mathrm{int}(\mathrm{epi}F-B)$ 且

$$\theta\in P_{\min}[(F-L)(X_1), S],$$

则存在锥线性连续算子 $L\in L^+(X, Y)$ 使

$$\theta\in P_{\min}[(F-L)(X_1), S],\tag{3}$$

$$\theta\in P_{\min}[(L-L_0)(X_0), S],\tag{4}$$

且

$$\theta\in P_{\max}[(L-L_0)(X_0), S].\tag{5}$$

证明　令

$$K=\mathrm{epi}F=\{(x,y); y\in F(x)+S, x\in X_1\},$$

$$B=\{(x, L_0(x)): x\in X_0\},\quad A=K-B.$$

因为 $F(x)$ 为一个闭凸过程, 因而 K, A, B 为凸锥.　并且

a) 由假设条件知, $\mathrm{int}A\neq\varnothing$.

b) 我们现在证明

$$\mathrm{clcone}\left(\bigcup_{(\theta,y)\in A}y\right)\cap(-S)=\{\theta\}.$$

事实上, 令

$$(\theta, y)=(x-x, y'-L_0(x)), y'\in F(x)+S.$$

因为

$$\mathrm{clcone}\left(\bigcup_{x\in X_0\cap X_1}(F(x)-L_0(x))+S\right)\cap(-S)=\{\theta\}.$$

我们有

$$\mathrm{clcone}\left(\bigcup_{(\theta,y)\in A}y\right)\cap(-S)=\{\theta\}.$$

现在证明

$$\mathrm{clcone}\left(\bigcup_{(x,\theta)\in A}x\right)\cap(-D)=\{\theta\}.$$

这等价于

$$\mathrm{clcone}\left(\bigcup_{y\in L_0(X_0)\cap(F(X_1)+S)}(L_0^{-1}(y)-F^{-1}(y))\right)\cap(-D)=\{\theta\}.$$

假如此式不成立, 则由引理 2.2 有

$$\bigcup_{y\in L_0(X_0)\cap(F(X_1)+S)}(L_0^{-1}(y)-F^{-1}(y))\cap(-\mathrm{int}D)\neq\varnothing.$$

于是存在 $x_1'\in L_0^{-1}(y'), x_2'\in F^{-1}(y'), y'\in L_0(X_0)\cap(F(X_1)+S)$ 使

$$x_1'-x_2'=-d\in-\mathrm{int}D,$$

$$F(x_2')-L_0(x_2')=y'-L_0(x_2')=y'-L_0(x_1'+d).$$

由引理 2.2, 存在 $s_1\in S$ 而使

$$L_0(x_1'+d)-L_0(x_1')=s_1\in\mathrm{int}S,$$

由此而知

$$F(x_2') - L_0(x_2') = y' - L_0(x') - s_1 = -s_1 \in \operatorname{int} S,$$

这与 $\theta \in P_{\min}[(F - L_0)(X_0 \cap X_1), S]$ 矛盾•

c) 令 $V_x = \{x \in X: (x, \theta) \in A\}$, $V_y = \{y \in Y: (\theta, y) \in A\}$, 则由已知条件知道 V_x, V_y 为吸收集•

由推论 2.1, 存在一个锥线性连续算子 $\Lambda: X \to Y$ 使

$$\operatorname{clcone}\left(\bigcup_{(x,y)\in A}(\Lambda(x) + y)\right) \cap (-S) = \{\theta\}•$$

因为 $(\theta, \theta) \in B$, $\theta \in F(\theta)$ 我们有

$$\operatorname{clcone}\left(\bigcup_{(x,y)\in K}(\Lambda(x) + y)\right) \cap (-S) = \{\theta\},$$

即

$$\operatorname{clcone}\left(\bigcup_{x\in X_1}(\Lambda(x) + F(x)) + S\right) \cap (-S) = \{\theta\}•$$

另一方面

$$\bigcup_{(x,y)\in A}(\Lambda(x) + y) = \bigcup_{x\in X_1}(\Lambda(x) + F(x) + S) - \bigcup_{x\in X_0}(\Lambda(x) + L_0(x)),$$

因而

$$\operatorname{clcone}\left[\bigcup_{x\in X_1}(\Lambda(x) + F(x) + S) - \bigcup_{x\in X_0}(\Lambda(x) + L_0(x))\right] \cap (-S) = \{\theta\}•$$

由 Λ 和 L_0 之线性性及 $\theta \in X_1$, $\theta \in F(\theta)$ 有

$$\{\theta\} \subset \operatorname{clcone}\left[\bigcup_{x\in X_0}(-\Lambda(x) - L_0(x)) + S\right] \cap (-S) \subset \operatorname{clcone}\left[\bigcup_{x\in X_1}(\Lambda(X) + F(x) + S) - \bigcup_{x\in X_0}(\Lambda(x) + L_0(x))\right] \cap (-S) = \{\theta\},$$

且

$$\{\theta\} \subset \operatorname{clcone}\left[\bigcup_{x\in X_1}(\Lambda(x) + F(x)) + S\right] \cap (-S) \subset \operatorname{clcone}\left[\bigcup_{x\in X_1}(\Lambda(X) + F(x) + S) - \bigcup_{x\in X_0}(\Lambda(x) + L_0(x))\right] \cap (-S) = \{\theta\}•$$

因而

$$\operatorname{clcone}\left[\bigcup_{x\in X_0}(-\Lambda(x) - L_0(x)) + S\right] \cap (-S) = \{\theta\}, \tag{6}$$

且

$$\operatorname{clcone}\left[\bigcup_{x\in X_1}(\Lambda(x) + F(x)) + S\right] \cap (-S) = \{\theta\}• \tag{7}$$

最后, 令 $L = -\Lambda$, 由(7) 可得(3), 且由(6) 有

$$\theta \in P_{\min}[(L - L_0)(X_0), S]•$$

因为 X_0 为一线性向量空间, 由 L 和 L_0 之线性性可得到(5)•

推论 2.2　在定理 2.2 的条件, 设

$$\theta \in P_{\min}[(L_0 - F)(X_0 \cap X_1), S],$$

则存在一个锥线性连续算子 $L: X \to Y$ 而使

$$\theta \in P_{\min}[(L - F)(X_1), S], \theta \in P_{\min}[(L_0 - L)(X_0), S],$$

且

$$\theta \in P_{\max}[(L_0 - L)(X_0), S]•$$

3　应　　用

令 E 为具有凸的点锥 D 的一个 Banach 空间, $R = (-\infty, +\infty)$, $R_+ = [0, +\infty)$, E^* 为 E

之对偶空间• 如果$f\in E^*$且$f(D)\subset R_+$则称f为E上之单调线性泛函[10]•

如果假设$Y=R, S=R_+$, 且$F: X\to R$为一单值锥闭凸过程, 则称其为一单调正齐次泛函, 即对任意$x\in D$, $F(x)\geqslant 0$且

$$F(x+y)\leqslant F(x)+F(y),\quad x,y\in E,$$

$$F(\alpha x)=\alpha F(x),\quad \alpha\geqslant 0•$$

推论 3.1(正线性泛函的延拓定理) 假设

i) E为一实 Banach 空间, $E_0\subset E$为一个实线性子空间;

ii) $\mathrm{int}(\mathrm{epi}F-B)\neq\theta$, 这里$B=\left\{(x,f_0(x)): x\in E_0\right\}$;

iii) $F(x)$为定义在E上单调正齐次泛函, f_0为E_0上定义的正线性连续泛函, 且$f_0(x)\leqslant F(x)$, $x\in E_0$•

那么, 存在E上一个正线性连续泛函f而使

iv) $f(x)=f_0,\quad x\in E_0$;

v) $f(x)\leqslant F(x),\quad x\in E$•

证明 令$X_0=E_0$, $X_1=E$, $Y=R$, $S=R_+$, 由于$\theta\in P_{\min}[(F-f_0)(E), R_+]$当且仅当$F(x)\geqslant f_0(x)$, $x\in E$• 由定理 2.2 便可得到推论 3.1•

局部 Lipschitz 函数$f: X\to R$在x点沿方向v的广义方向导数$f^0(x;v)$定义为

$$f^0(x;v)=\limsup_{x'\to x,\, t\downarrow 0^+}\frac{f(x'+tv)-f(x')}{t}$$

而 Clarke 广义梯度$\partial_C f(x)\subset X^*$为集

$$\partial_C f(x)=\left\{x^*\in X^*: x^*(v)\leqslant f^0(x;v),\ v\in X\right\},$$

则由 Hahn_Banach 定理我们可证[11]$\partial_C f(x)\neq\emptyset$•

当$f(x)$为一个单调 Lipschitz 函数时, 易证$f^0(x;v)$关于v为一个单调正齐次泛函• 由推论 3.1 可证存在正线性连续泛函$x^*\in X^*$使$x^*\in\partial_f(x)$•

我们认为, 定理 2.2 有望用于讨论集值映射在切锥导数意义下的广义梯度的存在性•

[参 考 文 献]

[1] 史树中. 完备向量格的凸集分离定理及其应用[J]. 数学年刊, 1985, **6**A(4): 431—438.

[2] 王苏生. 半序线性空间的凸锥分离定理及其应用[J]. 应用数学学报, 1986, **9**(3): 310—318.

[3] CHEN Guang_ya, WANG Yu_yun. Generalized Hahn_Banach theorems and subdifferential of set_valued mapping[J]. J Sys Sci and Math Sci, 1985, **5**(3): 223—230.

[4] 孟志青. 集值映射的 Hahn_Banach 定理[J]. 应用数学和力学, 1998, **19**(1): 55—61.

[5] 李声杰. S_凸集值映射的次梯度和弱有效解[J]. 高校应用数学学报, 1998, **13**(4): 463—472.

[6] Yang X Q. A Hahn_Banach theorem in ordered linear spaces and its applications[J]. Optimization, 1992, **25**(1): 1—9.

[7] Luc D T, Jahn J. Axiomatic approach to duality in optimization[J]. Number Funct Anal and Optimiz, 1992, **13**(3, 4): 305—326.

[8] 胡毓达. 多目标规划有效性理论[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1994, 126—127.

[9] 定光桂. 巴拿赫空间引论[M]. 北京: 科学出版社, 1984: 175—176.

[10] 谢庭藩, 周颂平. 实函数逼近论[M]. 杭州: 杭州大学出版社, 1998.

[11] Clarke F H. Optimization and Nonsmooth Analysis[M]. New York: Wiley, Interscience, 1983.

[12] Guerraggio A, Molho E, Zaffaroni A. On the notation of proper efficiency in vector optimization[J].

J of Optim Theory and Appl, 1994, **82**(1): 1—21.

[13] Holmes R B. Geometric Functional Analysis and its Applications[M]. New York: Springer_Verlag, 1975.

[14] 李仲飞. 集值映射向量优化的 Benson 真有效性[J]. 应用数学学报, 1998, **21**(1): 123—134.

[15] Aubin J P, Frankowska H. Set_Valued Analysis [M]. Boston: Birkhauser, 1990.

[16] 关肇直, 张恭庆, 冯德兴. 线性泛函分析引论[M]. 上海: 上海科技出版社, 1979.

The Extension Theorems of Cone Linear Operators

SHENG Bao_huai, LIU San_yang

(Department of Applied Mathematics, Xidian University, Xi'an 710071, P R China)

Abstract: A kind of cone separation theorems is established, by which the extension theorems for cone linear continuous operators are developed. As application, the extension theorem for positive linear continuous operators is given.

Key words: cone separation theorem; cone linear operator; extension theorem; separation theorems