应用数学和力学, 第 23 卷 第 1 期(2002 年 1 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2002) 01_0082_05

事件空间中二阶非 ¶Ä±¶³ 型非完整系统的守恒律*

方建会

(石油大学 应用物理系, 山东东营 257061)

(钱伟长推荐)

摘要: 研究事件空间中二阶非 ¶Ä±¶³ 型非完整系统的守恒律• 提出事件空间中的 Jourdain 原理, 引入事件空间中的 Jourdain 生成元, 给出无限小变换下 Jourdain 原理的不变性条件• 在一定条件下得到事件空间中系统的守恒律• 并举例说明结果的应用•

关 键 词: 事件空间; Jourdain 原理; 非完整系统; 守恒律
中图分类号: O316 文献标识码: A

引 言

力学系统的守恒律不仅具有数学上的重要性, 而且表现为深刻的物理规律• 1918 年德国科学家 A. E. Noether 利用 Hamilton 原理在无限小变换下的不变性, 研究了力学系统的守恒律, 提出了著名的 Noether 定理[1]• 利用微分变分原理也可以研究力学系统的守恒律[2~5]• 关于力学系统对称性与守恒律的研究在近十多年取得了很大进展[3~11]• 然而, 以往的研究基本上是局限于位形空间• 本文在事件空间中利用 Jourdain 微分变分原理研究二阶非 ¶Ä±¶³ 型非完整系统的守恒律•

1 事件空间中系统的 Jourdain 原理

设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 确定, 在位形空间中, 受理想约束的力学系统的 Jourdain 原理为

$$\sum_{s=1}^{n}\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}+\frac{\partial L}{\partial q_s}+Q_s\right)\delta\dot{q}_s=0, \tag{1}$$

其中 L 为系统的 Lagrange 函数, Q_s 为非势广义力•

构造 $(n+1)$ 维扩充的位形空间, 即事件空间[12,13], 此空间点的坐标是广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 和时间 t• 引入记号

$$X_1=t,\quad X_{s+1}=q_s\qquad(s=1,2,\cdots,n), \tag{2}$$

所有变量 $X_\alpha(\alpha=1,2,\cdots,n+1)$ 可作为某参数 τ 的已知函数, 令

$$X_\alpha=X_\alpha(\tau)\qquad(\alpha=1,2,\cdots,n+1), \tag{3}$$

* 收稿日期: 2000_06_25; 修订日期: 2001_10_09
作者简介: 方建会(1957—) , 男, 教授, 已发表论文 50 多篇.

使得

$$\frac{\mathrm{d}X_\alpha}{\mathrm{d}\tau}=X'_\alpha, \tag{4}$$

不同时为零, 有

$$\dot{X}_\alpha=\frac{\mathrm{d}X_\alpha}{\mathrm{d}t}=\frac{X'_\alpha}{X'_1}. \tag{5}$$

与原理(1)相应的事件空间中的 Jourdain 原理为

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1}\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial\Lambda}{\partial X'_\alpha}+\frac{\partial\Lambda}{\partial X_\alpha}+P_\alpha\right)\delta X'_\alpha=0, \tag{6}$$

其中

$$\Lambda=X'_1L\left(X_\alpha,\frac{X'_2}{X'_1},\ \cdots,\ \frac{X'_{n+1}}{X'_1}\right), \tag{7}$$

为事件空间中的 Lagrange 函数.

$$P_1=-\sum_{s=1}^{n}Q_sX'_{s+1},\qquad P_{s+1}=X'_1Q_s\left(X_s,\frac{X'_2}{X'_1},\ \cdots,\ \frac{X'_{n+1}}{X'_1}\right), \tag{8}$$

为事件空间中的非势广义力[12], $\delta X'_\alpha$ 为事件空间中的 Jourdain 等参数(τ 固定) 变分.

2　事件空间中的 Jourdain 非等参数变分

类似于位形空间中广义坐标 $q_s(t)$ 的等时变分 δq_s 和非等时变分 Δq_s 的讨论[13], 我们可得到事件空间中坐标 $X_\alpha(t)$ 的等参数变分 δX_α 和非等参数变分 ΔX_α 的关系为

$$\Delta X_\alpha=\delta X_\alpha+X'_\alpha\Delta\tau. \tag{9}$$

对任何函数 g, 非等参数变分 Δ 和等参数变分 δ 都有如下关系

$$\Delta g=\delta g+g'\Delta\tau. \tag{10}$$

现在定义 Jourdain 非等参数变分 $\Delta X'_\alpha$, $(\Delta X_\alpha)'$ 和 $(\Delta\tau)'$, 要求

$$\Delta X_\alpha=0,\qquad \Delta\tau=0, \tag{11}$$

于是有

$$\Delta X'_\alpha=\delta X'_\alpha+X''_\alpha\Delta\tau=\delta X'_\alpha, \tag{12}$$

$$(\Delta X_\alpha)'=\delta X'_\alpha+X''_\alpha\Delta\tau+X'_\alpha(\Delta\tau)'=\delta X'_\alpha+X'_\alpha(\Delta\tau)', \tag{13}$$

$$\Delta X'_\alpha=(\Delta X_\alpha)'-X'_\alpha(\Delta\tau)'. \tag{14}$$

取无限小变换

$$X^*_\alpha=X_\alpha,\qquad \tau^*=\tau, \tag{15}$$

$$\frac{\mathrm{d}X^*_\alpha}{\mathrm{d}\tau}-\frac{\mathrm{d}X_\alpha}{\mathrm{d}\tau}=\delta X'_\alpha=\Delta X'_\alpha, \tag{16}$$

$$\frac{\mathrm{d}X^*_\alpha}{\mathrm{d}\tau^*}-\frac{\mathrm{d}X_\alpha}{\mathrm{d}\tau}=(\Delta X_\alpha)'. \tag{17}$$

考虑无限小量 $(\Delta X_\alpha)'$ 和 $(\Delta\tau)'$ 作为 Jourdain 无限小变换的组成元, 引入变换的 Jourdain 生成元

$$(\Delta X_\alpha)'=\varepsilon F_\alpha(X_\alpha,X'_\alpha),\qquad (\Delta\tau)'=\varepsilon f(X_\alpha,X'_\alpha), \tag{18}$$

由关系式(12)~(14), 将 Jourdain 等参数变分表为生成元, 有

$$\delta X'_\alpha=\varepsilon[F_\alpha(X_\alpha,X'_\alpha)-X'_\alpha f(X_\alpha,X'_\alpha)]. \tag{19}$$

3 系统的运动微分方程

设系统在事件空间中的运动受到 r 个理想的二阶非 ¶Ä-¶ß 型非完整约束

$$\Phi_\beta(X_\alpha, X'_\alpha, X''_\alpha) = 0 \quad (\beta = 1, 2, \cdots, r;\ \alpha = 1, 2, \cdots, n+1)\cdot \tag{20}$$

假设约束(20) 加在变分 $\delta X'_\alpha$ 上的限制条件为

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1} \Psi_{\beta\alpha}(X_\alpha, X'_\alpha, X''_\alpha)\,\delta X'_\alpha = 0\cdot \tag{21}$$

一般说来, $\Psi_{\beta\alpha}$ 与 $\dfrac{\partial \Phi_\beta}{\partial X''_\alpha}$ 无关, 特别地, 当 $\Psi_{\beta\alpha} = \dfrac{\partial \Phi_\beta}{\partial X''_\alpha}$ 时, 则为 BБaTБ 型非完整约束•

由原理(6) 和限制条件(21), 利用 Lagrange 乘子法, 可得到事件空间中二阶非 BБaTБ 型非完整系统的运动微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial \Lambda}{\partial X'_\alpha} - \frac{\partial \Lambda}{\partial X_\alpha} = P_\alpha + \sum_{\beta=1}^{r}\lambda_\beta \Psi_{\beta\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \cdots, n+1), \tag{22}$$

其中 λ_β 为约束乘子•

4 系统的守恒律

由(20)、(21)、(22) 描述的系统满足原理(6), 因为将方程(22) 乘以 $\delta X'_\alpha$ 并对 α 求和后与式(21) 联立, 便可得到式(6)• 下面利用原理(6) 研究(20)、(21)、(22) 描述的系统的守恒律•

将式(19) 代入式(6), 得

$$\varepsilon\left\{\sum_{\alpha=1}^{n+1}P_\alpha(F_\alpha - X'_\alpha f) + \sum_{\alpha=1}^{n+1}\frac{\partial \Lambda}{\partial X_\alpha}F_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{n+1}\frac{\partial \Lambda}{\partial X'_\alpha}F'_\alpha - \sum_{\alpha=1}^{n+1}\frac{\partial \Lambda}{\partial X'_\alpha}X'_\alpha f' - \left(\sum_{\alpha=1}^{n+1}\frac{\partial \Lambda}{\partial X_\alpha}X'_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{n+1}\frac{\partial \Lambda}{\partial X'_\alpha}X''_\alpha\right)f - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left[\sum_{\alpha=1}^{n+1}\frac{\partial \Lambda}{\partial X'_\alpha}(F_\alpha - X'_\alpha f)\right]\right\} = 0\cdot \tag{23}$$

在式(23) 中加上并减去一个函数 $\varepsilon G'(X_\alpha, X'_\alpha)$, 且注意到

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1}\frac{\partial \Lambda}{\partial X_\alpha}X'_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{n+1}\frac{\partial \Lambda}{\partial X'_\alpha}X''_\alpha = \frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}\tau}, \tag{24}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1}\frac{\partial \Lambda}{\partial X'_\alpha}X'_\alpha = \Lambda, \tag{25}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1}P_\alpha X'_\alpha = 0, \tag{26}$$

可得

$$\varepsilon\left\{\sum_{\alpha=1}^{n+1}P_\alpha F_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{n+1}\frac{\partial \Lambda}{\partial X_\alpha}F_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{n+1}\frac{\partial \Lambda}{\partial X'_\alpha}F'_\alpha + G'(X_\alpha, X'_\alpha) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left[\sum_{\alpha=1}^{n+1}\frac{\partial \Lambda}{\partial X'_\alpha}F_\alpha + G(X_\alpha, X'_\alpha)\right]\right\} = 0, \tag{27}$$

其中 $G(X_\alpha, X'_\alpha)$ 为事件空间中的规范函数• 这就是事件空间中 Jourdain 原理不变性条件的变换•

将式(19) 代入式(21) 得

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1}\Psi_{\beta\alpha}(F_\alpha - X'_\alpha f) = 0 \quad (\beta = 1, 2, \cdots, r)\cdot \tag{28}$$

式(28) 就是二阶非完整约束(20) 对无限小生成元 F_α, f 的限制• 由式(27) 可知, 如果无限小

生成元满足关系

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1}\left(P_\alpha F_\alpha + \frac{\partial \Lambda}{\partial X_\alpha}F_\alpha + \frac{\partial \Lambda}{\partial X'_\alpha}F'_\alpha\right) + G'(X_\alpha, X'_\alpha) = 0, \tag{29}$$

则系统存在如下守恒量

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1}\frac{\partial \Lambda}{\partial X'_\alpha}F_\alpha + G(X_\alpha, X'_\alpha) = \text{const}. \tag{30}$$

于是得到

命题　对事件空间中的二阶非 ¶Ä±¶³ 型非完整系统(20)、(21)、(22)，如果无限小变换的生成元 F_α, f 满足条件(28)，(29)，则系统存在形如式(30)的守恒律．

如果系统受到的约束是 ¶Ä±¶³ 型的，则 $\Psi_{\beta\alpha} = \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial X''_\alpha}$，由式(28)得

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1}\frac{\partial \Phi_\beta}{\partial X''_\alpha}(F_\alpha - X'_\alpha f) = 0 \qquad (\beta = 1, 2, \cdots, r). \tag{31}$$

由命题得

推论 1　对于事件空间中的二阶 ¶Ä±¶³ 型非完整系统，如果无限小变换的生成元 F_α, f 满足条件(31)，(29)，则系统存在形如式(30)的守恒律．

如果系统不受非完整约束，则命题给出

推论 2　对于事件空间中的完整系统，如果无限小变换的生成元 F_α, f 满足条件(29)，则系统存在形如式(30)的守恒律．

5　算　　例

事件空间中系统的 Lagrange 函数为

$$\Lambda = \frac{1}{2X'_1}\left[(X'_2)^2 + (X'_3)^2 + (X'_4)^2\right] - X'_1 X_4. \tag{32}$$

非完整约束为

$$\Psi = X''_2 + X''_3 - X_1 X''_4 = 0. \tag{33}$$

设约束(33)是非 ¶Ä±¶³ 型的，(33)加在变分 $\delta X'_\alpha$ 上的限制条件为

$$\delta X'_2 + \delta X'_3 - \delta X'_4 = 0, \tag{34}$$

非势力不存在．试研究事件空间中系统的守恒律．

式(28)给出

$$F_2 - X'_2 f + F_3 - X'_3 f - F_4 + X'_4 f = 0. \tag{35}$$

式(29)给出

$$-X'_1 F_4 - \left[\frac{1}{2(X'_1)^2}\left((X'_2)^2 + (X'_3)^2 + (X'_4)^2\right) + X_4\right]F'_1 + \frac{1}{X'_1}(X'_2 F'_2 + X'_3 F'_3 + X'_4 F'_4) + G' = 0. \tag{36}$$

取无限小变换的生成元为

$$f = 0, \quad F_1 = 0, \quad F_2 = -X_1, \quad F_3 = X_1, \quad F_4 = 0, \tag{37}$$

则式(35)满足，由式(36)求得规范函数

$$G = X_2 - X_3. \tag{38}$$

由式(30)得守恒律

$$\frac{X_1}{X_1}(X_3' - X_2') + X_2 - X_3 = \text{const}. \tag{39}$$

[参 考 文 献]

[1] Noether A E. Invariante variation probleme[J]. Nachr Akad Wiss Gottingen Math Phys, 1918(KI II): 235—257.

[2] Vujanović B. Conservation laws of dynamical systems via D' Aalembert principle[J]. Int J Non_Linear Mech, 1978, **13**: 185—197.

[3] Vujanović B. A study of conservation laws of dynamical systems by means of the differential variational principle of Joundain and Gauss[J]. Acta Mechanica, 1986, **65**: 63—80.

[4] 李子平. 经典和量子约束系统及其对称性质[M]. 北京: 北京工业大学出版社, 1993.

[5] 梅凤翔. 利用 Jourdain 原理研究二阶非完整系统的守恒律[J]. 北京理工大学学报, 1998, **18**(1): 17—21.

[6] 刘端. 非完整非保守动力学系统的守恒律[J]. 力学学报, 1989, **21**(1): 75—83.

[7] 刘端. 非完整非保守动力学系统的 Noether 定理及其逆定理[J]. 中国科学, A 辑, 1990, **20**(11): 1189—1197.

[8] 张解放. Vacco 动力学的 Noether 理论[J]. 应用数学和力学, 1993, **14**(7): 635—641.

[9] 赵跃宇, 梅凤翔. 关于力学系统的对称性与不变量[J]. 力学进展, 1993, **23**(3): 360—372.

[10] WU Run_hong, MEI Feng_xiang. On the Lie symmetries of the nonholonomic mechanical systems [J]. J of BIT, 1997, **6**(3): 229—235.

[11] 梅凤翔, 吴润衡, 张永发. 非 ¶Ä-ß 型非完整系统的 Lie 对称性与守恒量[J]. 力学学报, 1998, **30**(4): 468—474.

[12] MEI Feng_xiang. Parametric equations of nonholonomic nonconservative systems in the event space and the method of their integration[J]. Acta Mechanica Sinica, 1990, **6**(2): 160—168.

[13] 梅凤翔, 刘端, 罗勇. 高等分析力学[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 1991, 76, 360—365.

The Conservation Law of Nonholonomic System of Second_Order Non_Chetave's Type in Event Space

FANG Jian_hui

(Department of Applied Physics, University of Petroleum, Dongying, Shandong 257061, P R China)

Abstract: The conservation law of nonholonomic system of second_order non_Chataev's type in event space is studied. The Jourdain's principle in event space is presented. The invariant condition of the Jourdain's principle under infinitesimal transformation is given by introducing Jourdain's generators in event space. Then the conservation law of the system in event space is obtained under certain conditions. Finally a calculating example is given.

Key words: event space; Jourdain's principle; nonholonomic system; conservation law