应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2002) 01_0087_05

多滞后区间动力系统的指数稳定性*

孙继涛[1,2], 张银萍[1], 刘永清[2], 邓飞其[2]

(1. 同济大学 应用数学系, 上海 200092; 2. 华南理工大学 自动控制系, 广州 510640)

(戴世强推荐)

摘要: 引进了多滞后区间动力系统的指数稳定的概念; 用矩阵测度和时滞微分不等式研究了滞后区间动力系统的指数稳定性, 给出了其指数稳定的判别准则, 推广和改进了 Liao Xiao_xin, 刘永清, Zhang Yin_ping 等人的工作.

关 键 词: 滞后区间动力系统; 矩阵测度; 指数稳定
中图分类号: TP202 文献标识码: A

1 引言与引理

区间矩阵的稳定性和有滞后的不确定动力系统的稳定性曾被国内外不少学者研究过[1~13]. 文[1~3]在一定条件下研究了下列单滞后区间动力系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{N}[\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}]\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{N}[\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}]\boldsymbol{x}(t-\tau)$$

的稳定性和 α 指数稳定性问题. 文[4]用矩阵测度研究了下列具有滞后的时变区间动力系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{N}[\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}]\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{N}[\boldsymbol{C}(t), \boldsymbol{D}(t)]\boldsymbol{x}(t-\tau)$$

一致渐近稳定性和 α 指数稳定性.

我们在文[5]中用矩阵测度和比较定理研究了多滞后区间时变动力系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{N}[\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}]\boldsymbol{x}(t) + \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{N}[\boldsymbol{P}_i(t), \boldsymbol{Q}_i(t)]\boldsymbol{x}(t-\tau_i), \tag{1}$$

得到了系统一致渐近稳定和 α 指数稳定的充分条件.

本文用矩阵测度和时滞微分不等式研究多滞后区间时变动力系统(1)的指数稳定性, 得到指数稳定的充分条件, 推广和改进了文[1~5]的工作.

系统(1)中, 时滞 $\tau_i > 0$ 且 $\tau = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\tau_i$, $\boldsymbol{N}[\boldsymbol{P}_i(t), \boldsymbol{Q}_i(t)]$ 是 n 阶连续区间矩阵.

定义 1 如果对任意给定的 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{N}[\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}]$ 和 $\boldsymbol{A}_i(t) \in [\boldsymbol{P}_i(t), \boldsymbol{Q}_i(t)]$, 系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}_i(t)\boldsymbol{x}(t-\tau_i) \tag{2}$$

的零解一致渐近稳定, 则称多滞后时变区间动力系统(1)一致渐近稳定, 记为 $\boldsymbol{N}[\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}; \boldsymbol{P}_i(t), \boldsymbol{Q}_i(t)] \in \boldsymbol{S}^{(m+1)}$.

定义 2 设 α 是某个正常数, 如果存在一个正常数 K, 使得对任意给定的 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{N}[\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}]$ 和

* 收稿日期: 1999_12_06; 修订日期: 2001_08_20
基金项目: 高等学校骨干教师资助项目
作者简介: 孙继涛(1963—), 男, 江苏张家港市人, 教授, 博士.

$\boldsymbol{A}_i(t) \in N[\boldsymbol{P}_i(t), \boldsymbol{Q}_i(t)]$ 及 $\varphi_i(t) \in C([-\tau_i, 0], \mathbf{R}^n)$, 总能使系统(2) 的解满足:

$$\|\boldsymbol{x}(t)\| \leqslant K\mathrm{e}^{-\alpha t}\|\varphi\|,\ t \geqslant 0,$$

则称多滞后时变区间动力系统(1) 是具有衰减度 α 指数稳定的, 简称 α 指数稳定的• 记为 $N[\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}; \boldsymbol{P}_i(t), \boldsymbol{Q}_i(t)] \in \alpha S^{(m+1)}$• $\varphi_i(t)(-\tau_i \leqslant t \leqslant 0)$ 是系统(2) 的连续向量值初始函数•

与文[14] 类似证明, 可得

引理 设 $P(t)$ 是在区间$[t_0-\tau, +\infty)$ 上的非负连续函数, 满足 $t \geqslant t_0$, $P^{+}(t) \leqslant -aP(t) + \sum_{i=1}^{n} b_i(t)\|P_t\|_{\tau_i}$, 这里 $\|P_t\|_{\tau_i} = \sup_{-\tau_i \leqslant \theta_i \leqslant 0}\left\{P(t+\theta_i)\right\}$, $b_i(t)$ 连续, 又 $\inf_{t \geqslant t_0}\left\{a - \sum_{i=1}^{n} b_i(t)\right\} > 0$ 则存在正数 $\eta > 0$, 使得

$$P(t) \leqslant \|P_{t_0}\|_{\tau}\exp(-\eta(t-t_0))•$$

2 主要结果

定理 1 如果对任意的 $\boldsymbol{A} \in N[\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}]$, $\boldsymbol{A}_i(t) \in N[\boldsymbol{P}_i(t), \boldsymbol{Q}_i(t)]$, $\sup_{t \geqslant 0}\sum_{i=1}^{n}\|\boldsymbol{A}_i(t)\|_{\bullet} < -\mu_{\bullet}(\boldsymbol{A})$, 则多滞后区间动力系统(1) 是指数稳定的•

证明 对任意给定的 $\boldsymbol{A} \in N[\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}]$ 和 $\boldsymbol{A}_i \in N[\boldsymbol{P}_i(t), \boldsymbol{Q}_i(t)]$, 设 $\boldsymbol{x}(t)$ 是系统(2) 的解, $|\bullet|_{\bullet}$ 是向量模, $\|\bullet\|_{\bullet}$ 是$|\bullet|_{\bullet}$ 相应的诱导矩阵范数, $\mu_{\bullet}(\bullet)$ 是与它们相对应的矩阵测度, 则当 $t \geqslant 0$ 时

$$\frac{\mathrm{d}|\boldsymbol{x}(t)|_{\bullet}}{\mathrm{d}t} - \mu_{\bullet}(\boldsymbol{A})|\boldsymbol{x}(t)|_{\bullet} - \sum_{i=1}^{n}\|\boldsymbol{A}_i(t)\|_{\bullet}|\boldsymbol{x}(t-\tau_i)|_{\bullet} =$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+}\frac{1}{\varepsilon}\Big[|\boldsymbol{x}(t+\varepsilon)|_{\bullet} - \|\boldsymbol{I}+\varepsilon\boldsymbol{A}\|_{\bullet}|\boldsymbol{x}(t)|_{\bullet} - \varepsilon\sum_{i=1}^{n}\|\boldsymbol{A}_i(t)\|_{\bullet}|\boldsymbol{x}(t-\tau_i)|_{\bullet}\Big] \leqslant$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+}\frac{1}{\varepsilon}\Big|\boldsymbol{x}(t+\varepsilon) - (\boldsymbol{I}+\varepsilon\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}(t) - \varepsilon\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}_i(t)\boldsymbol{x}(t-\tau_i)\Big|_{\bullet}$$

由于(2) 成立, 因此

$$\frac{\mathrm{d}|\boldsymbol{x}(t)|_{\bullet}}{\mathrm{d}t} \leqslant \mu_{\bullet}(\boldsymbol{A})|\boldsymbol{x}(t)|_{\bullet} + \sum_{i=1}^{n}\|\boldsymbol{A}_i(t)\|_{\bullet}|\boldsymbol{x}(t-\tau_i)|_{\bullet} \tag{3}$$

由引理知, 定理 1 的条件保证(3) 是指数稳定的, 从而可得(2) 是指数稳定的, 又由于 $\boldsymbol{A}$ 和$\boldsymbol{A}_i(t)$ 是任意的, 故定理 1 成立• 证毕•

我们记 $\tilde{\boldsymbol{A}} = \lambda\boldsymbol{P} + (1-\lambda)\boldsymbol{Q}$, $\lambda \in [0, 1]$, $\tilde{\boldsymbol{A}}_i(t) = \lambda_i\boldsymbol{P}_i(t) + (1-\lambda_i)\boldsymbol{Q}_i(t)$, $\lambda_i \in [0, 1]$, $\Delta\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} - \tilde{\boldsymbol{A}}$, $\Delta\boldsymbol{A}_i = \boldsymbol{A}_i(t) - \tilde{\boldsymbol{A}}_i(t) = (a_{ij}^{(i)}(t))_{n\times n}$, $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{P} = (m_{ij})_{n\times n}$, $\boldsymbol{E}_i(t) = \boldsymbol{Q}_i(t) - \boldsymbol{P}_i(t) = (e_{ij}^{(i)}(t))_{n\times n}$ 则当 $\bullet = 1, \omega, \infty$ 时, 我们有

$$\mu_{\bullet}(\boldsymbol{A}) = \mu_{\bullet}(\tilde{\boldsymbol{A}} + \Delta\boldsymbol{A}) \leqslant \mu_{\bullet}(\tilde{\boldsymbol{A}}) + \mu_{\bullet}(\Delta\boldsymbol{A}) \leqslant \mu_{\bullet}(\tilde{\boldsymbol{A}}) + \max(1-\lambda, \lambda)\mu_{\bullet}(\boldsymbol{M})$$

$$\|\boldsymbol{A}_i(t)\|_{\bullet} \leqslant \|\tilde{\boldsymbol{A}}_i(t)\|_{\bullet} + \|\Delta\boldsymbol{A}_i\|_{\bullet} \leqslant \|\tilde{\boldsymbol{A}}_i(t)\|_{\bullet} + \max(1-\lambda_i, \lambda_i)\|\boldsymbol{E}_i(t)\|_{\bullet}$$

$$\mu_2(\boldsymbol{A}) \leqslant \mu_2(\tilde{\boldsymbol{A}}) + \mu_2(\Delta\boldsymbol{A}) = \mu_2(\tilde{\boldsymbol{A}}) + \frac{1}{2}\lambda_{\max}(\Delta\boldsymbol{A} + \Delta\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) \leqslant$$

$$\mu_2(\tilde{\boldsymbol{A}}) + \frac{1}{2}\mu_{\bullet}(\Delta\boldsymbol{A} + \Delta\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) \leqslant$$

$$\mu_2(\tilde{\boldsymbol{A}}) + \frac{1}{2}\max(1-\lambda, \lambda)\mu_{\bullet}(\boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}^{\mathrm{T}})•$$

因为 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\left\{n[\max(1-\lambda, \lambda)]^2\mathrm{diag}(\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M})\right\}\boldsymbol{x} = n[\max(1-\lambda, \lambda)]^2\sum_{j,k}\boldsymbol{x}_j m_{jk} m_{jk}\boldsymbol{x}_j \geqslant$

$$\frac{[\max(1-\lambda,\lambda)]^2}{2}\Big[\sum_{j,i,k}\boldsymbol{x}_i m_{ik} m_{ik}\boldsymbol{x}_i+\sum_{i,j,k}\boldsymbol{x}_j m_{jk} m_{jk}\boldsymbol{x}_j\Big]\geqslant$$

$$\frac{1}{2}\Big[\sum_{j,i,k}\boldsymbol{x}_i\Delta a_{ik}\Delta a_{ik}\boldsymbol{x}_i+\sum_{i,j,k}\boldsymbol{x}_j\Delta a_{jk}\Delta a_{jk}\boldsymbol{x}_j\Big]\geqslant$$

$$\sum_{i,j,k}\boldsymbol{x}_i\Delta a_{ik}\Delta a_{ik}\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{x}^{\mathrm T}\Delta\boldsymbol{A}^{\mathrm T}\Delta\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},$$

所以 $\|\Delta\boldsymbol{A}_i\|_2=\lambda_{\max}^{1/2}(\Delta\boldsymbol{A}_i^{\mathrm T}\Delta\boldsymbol{A}_i)\leqslant\max(1-\lambda_i,\lambda_i)\sqrt{n\lambda_{\max}\mathrm{diag}(\boldsymbol{E}_i^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{E}_i(t))}=$

$$\max(1-\lambda_i,\lambda_i)\sqrt{n\max_{l,j}\sum_{k=1}^{n}e_{kl}^{(i)}(t)e_{kj}^{(i)}(t)}。$$

则由定理 1, 我们得到

定理 2　如存在 $\lambda\in[0,1]$, $\lambda_i\in[0,1]\ (i=1,2,\cdots,n)$, 使得条件 1) 或 2) 至少有一个成立

1) $\sup_{t\geqslant 0}\Big\{\mu_\bullet(\tilde{\boldsymbol{A}})+\max(1-\lambda,\lambda)\mu_\bullet(\boldsymbol{M})+\sum_{i=1}^{n}(\|\tilde{\boldsymbol{A}}_i(t)\|_\bullet+\max(1-\lambda_i,\lambda_i)\|\boldsymbol{E}_i(t)\|_\bullet)\Big\}<0$, 这里 $\bullet=1,\omega,\infty$;

2) $\sup_{t\geqslant 0}\Big\{\mu_2(\tilde{\boldsymbol{A}})+\frac{1}{2}\max(1-\lambda,\lambda)\mu_\bullet(\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}^{\mathrm T})+\sum_{i=1}^{n}(\|\tilde{\boldsymbol{A}}_i(t)\|_2+$

$\max(1-\lambda_i,\lambda_i)\sqrt{n\max_{l,j}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}_{kl}^{(i)}(t)\mathrm{e}_{kj}^{(i)}(t)})\Big\}<0$, 这里 $\bullet=1,\omega,\infty$,

则多滞后区间动力系统(1) 是指数稳定的。

我们记 $\boldsymbol{G}=(g_{ij})_{n\times n}$, $g_{ij}=\max(|p_{ij}|,|q_{ij}|)$, $(i\neq j)$, $g_{ii}=q_{ii}$, $(i=1,2,\cdots,n)$。因为对任意的 $\boldsymbol{A}\in N[\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}]$

$$\lambda_{\max}(\Delta\boldsymbol{A}_i^{\mathrm T}\Delta\boldsymbol{A}_i)\leqslant\min\Big[\max_l\sum_{j=1}^{n}\Big|\sum_{k=1}^{n}a_{kl}^{(i)}a_{kj}^{(i)}\Big|,\max_j\sum_{l=1}^{n}\Big|\sum_{k=1}^{n}a_{kl}^{(i)}a_{kj}^{(i)}\Big|\Big]\leqslant$$

$$[\max(1-\lambda_i,\lambda_i)]^2\min\Big[\max_l\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}_{kl}^{(i)}\mathrm{e}_{kj}^{(i)},\max_j\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}_{kl}^{(i)}\mathrm{e}_{kj}^{(i)}\Big]。$$

因此我们有

定理 3　如果存在 $\lambda\in[0,1]$, $\lambda_i\in[0,1]\ (i=1,2,\cdots,n)$, 使得 1) 或 2) 至少有一个成立

1) $\sup_{t\geqslant 0}\Big\{\mu_\bullet(\boldsymbol{G})+\sum_{i=1}^{n}(\|\tilde{\boldsymbol{A}}_i(t)\|+\max(1-\lambda_i,\lambda_i)\|\boldsymbol{E}_i(t)\|)\Big\}<0$ 这里 $\bullet=1,\omega,\infty$,

2) $\sup_{t\geqslant 0}\Big\{\mu_2(\tilde{\boldsymbol{A}})+\frac{1}{2}\max(1-\lambda,\lambda)\mu_\bullet(\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}^{\mathrm T})+$

$\sum_{i=1}^{n}(\|\tilde{\boldsymbol{A}}_i\|_2+\max(1-\lambda_i,\lambda_i)\sqrt{\min[\max_l\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}_{kl}^{(i)}\mathrm{e}_{kl}^{(i)},\max_j\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}_{kl}^{(i)}\mathrm{e}_{kj}^{(i)}]})\Big\}<0$

这里 $\bullet=1,\omega,\infty$,

则多滞后区间动力系统(1) 是指数稳定的。

3　应 用 举 例

考虑系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=N[\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}]\boldsymbol{x}(t)+\sum_{i=1}^{2}N[\boldsymbol{P}_i(t),\boldsymbol{Q}_i(t)]\boldsymbol{x}(t-\tau_i)\tag{4}$$

这里 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}-6 & -2\\ -2 & -5\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}-5 & 1\\ 1 & -4\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{P}_1(t)=\begin{bmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\sin t-\frac{1}{4} & 0\end{bmatrix}$,

$$\boldsymbol{Q}_1(t)=\begin{bmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\sin t & 0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{P}_2(t)=\begin{bmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\cos t-\frac{1}{4} & 0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{Q}_2(t)=\begin{bmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\cos t & 0\end{bmatrix},$$

则 $\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}-5 & 2\\ 2 & -4\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{E}_1(t)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ \frac{1}{4} & 0\end{bmatrix}=\boldsymbol{E}_2(t)$, $\mu_\infty(\boldsymbol{G})=-2$, $\|\boldsymbol{E}_1(t)\|_\infty=\|\boldsymbol{E}_2(t)\|_\infty=\frac{1}{4}$•

将 $\lambda_1=\lambda_2=\frac{1}{2}$ 代入, 则 $\tilde{A}_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{8} & 0\end{bmatrix}$, $\tilde{A}_2(t)=\begin{bmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{8} & 0\end{bmatrix}$, $\|\tilde{A}_1(t)\|_\infty=\frac{2}{3}=\|\tilde{A}_2(t)\|_\infty$•

由文[5]的结果, 我们只能得到系统(4)是一致渐近稳定的, 而有本文定理3, 我们得到系统(4)是指数稳定的•

[参 考 文 献]

[1] LIAO Xiao_xin, WANG Xiao_jun, FU Yu_li. Stability and decay rate of interval delay dynamical systems[J]. Appl Math JCU, 1992, **7**(3): 391—402.

[2] 刘永清, 唐功友. 大型动力系统的理论与应用[M]. 卷3. 广州: 华南理工大学出版社, 1992.

[3] ZHANG Yin_ping, SUN Ji_tao. Decay rate of interval delay dynamical system[J]. Adv in Modeling and Analysis, C, 1994, **44**(1): 41—44.

[4] 张银萍, 孙继涛. 单滞后区间动力系统的稳定性[J]. 控制理论与应用, 1994, **11**(3): 371—375.

[5] SUN Ji_tao. Stability and decay rate of interval time_varying dynamical systems with multidelay[J]. Chin J of Auto, 1996, **8**(3): 243—247.

[6] 孙继涛. 关于区间矩阵的稳定性[J]. 自动化学报, 1991, **17**(6): 745—748.

[7] Soh C B. Correcting argoun' s approach for the stability of interval matrices[J]. Int J Control, 1990, **51**(5): 1151—1154.

[8] Xu D, Simple criteria for stability of interval matrices[J]. Int J Control, 1986, **41**(1): 289—295.

[9] Sun Y J, Hsieh J G, Yang H C. On the stability of uncertain systems with multiple time_varying delays[J]. IEEE AC, 1997, **42**(1): 101—105.

[10] Wu H, Eigenst Ructure assignment_based robust stability conditions for uncertain systems with multiple time_varying delays[J]. Automatica, 1997, **33**(1): 97—102.

[11] Luo J S, Vanden Bosch P P J, Weiland S, Goldenberge A. Design of performance robustness for uncertain linear systems with state and control delays[J]. IEEE AC, 1998, **43**(11): 1593—1596.

[12] CAO Yong_yan, SUN You_xian. Robust stabilization of uncertain systems with time_varying multistate delay[J]. IEEE AC, 1998, **43**(10): 1484—1488.

[13] GU Yong_ru, Wang S C. On delay_dependent stability and decay estimate for uncertain systems with time_varying delay[J]. Automatica, 1998, **34**(8): 1035—1039.

[14] Hou C, Qian J. Remarks on quantitative analysis for a family of scalar delay differential inequalities

[J]. IEEE AC, 1999, **44**(2): 334－336.

Exponential Stability of Interval Dynamical System With Multidelay

SUN JI_tao,[1,2], ZHANG Yin_ping[1], LIU Yong_qing[2], DENG Fei_qi[2]
(1. Department of Applied Mathematics, Tongji University,
Shanghai 200092, P R China;
2. Department of Automation, South China University of Technology,
Guangzhou 510640, P R China)

Abstract: Using the matrix measure and delay differential inequality, the sufficient conditions were obtained for exponential stability of interval dynamical system with multidelay
These conditions are an improvement and extension of the results achieved in earlier papers presented by Liao, Liu, Zhang, Sun, et al.

Key words: interval delay dynamical system; matrix measure; exponential stability