应用数学和力学, 第 23 卷 第 1 期(2002 年 1 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2002) 01_0092_07

m 阶多时滞中立型微分方程的 $2T$ 周期解*

张保生, 朱光辉

(云南民族学院 数学系, 昆明 650031)

(张鸿庆推荐)

摘要: 研究 m 阶常系数线性多时滞中立型方程的周期解, 讨论了 $2T$ 周期解的存在性和唯一性, 得到了 $2T$ 周期解存在唯一若干新的充分必要条件• 所得主要结果适用性更广• 它包括了许多相关文献的结果为其特例, 推广、改进了这些文献的主要结果• 可对所研究的中立型方程周期解存在的大量情形作出判断, 而这些情形用其他文献的结果是无法判断的• 换言之, 对方程(1) , 主要结果是最一般化的, 用同样的方法已不可能得到更好的结果•

关 键 词: 中立型方程; 周期解; Fourier 级数
中图分类号: O175.1 文献标识码: A

引 言

周知, 中立型微分方程在生物学、物理、化学、医学、力学等领域, 有着广泛的应用背景• 因此, 研究中立型方程有着十分重要的理论和应用价值• 本文考虑 m 阶中立型方程:

$$\sum_{i=0}^{m}[a_i x^{(m-i)}(t)+b_j x^{(m-j)}(t-h_j)]=f(t) \tag{1}$$

的周期解, 其中 $a_0=1,\ a_i,\ b_j,\ h_j\geqslant 0(j=0,1,2,\cdots,m)$ 是常数• $f(t)$ 是 m 阶连续可微的 $2T$ 周期函数• 设其 Fourier 展式为:

$$f(t)=k_0+\sum_{n=1}^{\infty}[k_n\cos(\alpha n t)+l_n\sin(\alpha n t)], \tag{2}$$

其中 $k_0,\ k_n,\ l_n$ 是 Fourier 系数, $\alpha=\pi/T>0$•

对方程(1) , 当 $m=2$ 时, 文[1] ~ [3] 在 $|b_0|\neq 1$ 情况下, [4] 在 $|b_0|=1$ 情况下, 讨论了周期解存在的条件, 文[5] 在 $|b_0|<1/2$ 情况下, 得到中立型方程(1) 周期解存在的若干充分必要条件, 文[6] 对任意常数 b_0, 给出了方程(1) 的 $2T$ 周期解存在的若干充分必要条件• 本文利用 Fourier 级数法, 讨论了方程(1) 对任意常数 b_0, $2T$ 周期解存在的新充分必要条件, 得到了适用性更广的结果• 该结果包容、改进或推广了有关文献的主要结果, 可对其他文献无法判断的方程(1) 周期解存在的大量情形作出判定•

1 主要定理及其证明

考虑如下代数方程组

* 收稿日期: 1999_05_31; 修订日期: 2001_08_20
基金项目: 云南省教委科研基金资助项目(990002)
作者简介: 张保生(1962—) , 男, 云南昆明人, 副教授, 理学硕士, 长期从事微分方程的理论研究.

$$\begin{cases}(a_m+b_m)c_0=k_0,\\ A(n)c_n+B(n)d_n=k_n,\\ -B(n)c_n+A(n)d_n=l_n,\end{cases}\tag{3}$$

关于 c_0, c_n, d_n 的解, 其中 $\alpha=\dfrac{\pi}{T}>0$, 并且

$$A(n)=\sum_{i=0}^{m}(\alpha n)^{(m-i)}\left[a_i\cos\frac{(m-i)\pi}{2}+b_i\cos\left(\frac{(m-i)\pi}{2}-\alpha nh\right)\right],$$

$$B(n)=\sum_{i=0}^{m}(\alpha n)^{(m-i)}\left[a_i\sin\frac{(m-i)\pi}{2}+b_i\sin\left(\frac{(m-i)\pi}{2}-\alpha nh\right)\right]\cdot$$

令 $R_{2m}(n)=A^2(n)+B^2(n)$, 它是关于 αn 的 $2m$ 次多项式, 它的每个系数都由 a_i, b_i, b_0, $\cos\dfrac{(m-i)\pi}{2}$, $\sin\dfrac{(m-i)\pi}{2}$, $\cos\left[\dfrac{(m-i)\pi}{2}-\alpha nh_i\right]$, $\sin\left[\dfrac{(m-i)\pi}{2}-\alpha nh_i\right]$, 经过有限次加减乘运算而得到·

引理 1　$R_{2m}(n)=\sum_{k=0}^{2m}\beta_{2m-k}(\alpha n)^{2m-k}$ 其中它的 j 次项系数为

$$\beta_{2m-p}=\sum_{i=0}^{p}(-1)^{i+p}[a_ia_{p-i}+a_ib_{p-i}\cos(\alpha nh_{p-i})+b_ia_{p-i}\cos(\alpha nh_i)+$$
$$b_ib_{p-i}\cos(h_i-h_{p-i})\alpha n]\qquad(p=0,2,\dots,2m),\tag{4}$$

$$\beta_{2m-(4q-3)}=\sum_{i=0}^{4q-3}(-1)^i[-a_ib_{p-i}\sin\alpha nh_{p-i}+a_{p-i}b_i\sin(\alpha nh_i)-$$
$$b_ib_{p-i}\sin\alpha n(h_{p-i}-h_i)](p=4q-3;\ q=1,2,\dots,\left[\frac{m+1}{2}\right]),\tag{5}$$

$$\beta_{2m-(4q-1)}=\sum_{i=0}^{4q-1}(-1)^i[a_ib_{p-i}\sin\alpha nh_{p-i}-a_{p-i}b_i\sin\alpha nh_i+$$
$$b_ib_{p-i}\sin\alpha n(h_{p-i}-h_i)](p=2q-1;\ q=1,2,\dots,\left[\frac{m}{2}\right])\cdot\tag{6}$$

定理 1　如果存在一个常数 $d>0$ 使得多项式 $R_{2m}(n)$ 的 $2(m-j)$ 次项系数 $\beta_{2(m-j)}\geqslant d$ 对一切 n 都成立, 且

$$\beta_{2m-k}\geqslant 0,\qquad k=\begin{cases}0 & (\text{当 } j=0 \text{ 时}),\\ 1,2,\dots,2j-1 & \left(\text{当 } 1\leqslant j\leqslant m_0\overset{\triangle}{=}\min\left\{\left[\frac{m}{2}\right],\left[\frac{2m-2}{3}\right]\right\}\text{ 时}\right),\end{cases}$$

那么方程(1)存在 m 阶连续可微的 $2T$ 周期解的充分必要条件是代数方程组(3)关于 c_0, c_n, d_n 有解·

证明　必要性的证明类似于文[5]· 下面证明充分性, 为此, 考虑如下 $m+1$ 个三角级数:

$$c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos\alpha nt+d_n\sin\alpha nt\tag{7}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[(\alpha n)^k\left(c_n\cos\frac{k\pi}{2}+d_n\sin\frac{k\pi}{2}\right)\cos\alpha nt+(\alpha n)^k\left(d_n\cos\frac{k\pi}{2}-\right.\right.$$
$$\left.c_n\sin\frac{k\pi}{2}\right)\sin\alpha nt\qquad(k=1,2,\dots,m)\cdot\tag{8}$$

首先证明这些级数是绝对收敛和一致收敛的· 事实上, 由引理 1 知

$$A^2(n)+B^2(n)=R_{2m}(n)=\sum_{k=0}^{2m}\beta_{2m-k}(\alpha n)^{2m-k}=$$
$$\sum_{k=0}^{2m-(2j-1)}\beta_{2m-k}(\alpha n)^{2m-k}+\beta_{2(m-j)}(\alpha n)^{2(m-j)}R_{2(m-j)-1}(n),$$

因为 $\beta_{2m-k}\geqslant 0(k=0,1,2,\cdots,2j-1)$, $\beta_{2(m-j)}\geqslant d>0$, 所以

$$A^2(n)+B^2(n)\geqslant d(\alpha n)^{2(m-j)}+R_{2(m-j)-1}(n). \tag{9}$$

由(9)式可知,必存在正数 δ 及充分大的自然数N, 使得当 $n\geqslant N$ 时,就有

$$A^2(n)+B^2(n)\geqslant\delta^2(\alpha n)^{2(m-j)} \text{ 且 } \alpha n\geqslant 1. \tag{10}$$

由方程(3)易知

$$[A^2(n)+B^2(n)]c_n=A(n)k_n-B(n)l_n, \tag{11}$$
$$[A^2(n)+B^2(n)]d_n=B(n)k_n+A(n)l_n, \tag{12}$$

由(10)~(12)可知: 当 $n\geqslant N$ 时

$$\delta(\alpha n)^k(|c_n|+|d_n|)\leqslant\delta(\alpha n)^{m-j}(|c_n|+|d_n|)\leqslant\sqrt{A^2(n)+B^2(n)}(|c_n|+|d_n|)=$$
$$\frac{|A(n)k_n-B(n)l_n|}{\sqrt{A^2(n)+B^2(n)}}+\frac{|B(n)k_n-A(n)l_n|}{\sqrt{A^2(n)+B^2(n)}}\leqslant 2(|k_n|+|l_n|)$$
$$(k=0,1,2,\cdots,m-j;0\leqslant j\leqslant m_0).$$

注意到

$$|k_n|+|l_n|=\frac{1}{(\alpha n)^{(m-j)}}(|\alpha n|^{m-j}|k_n|+|\alpha n|^{(m-j)}|l_n|)\leqslant$$
$$\frac{1}{2(\alpha n)^{2(m-j)}}+[(|\alpha n|^{(m-j)}|k_n|)^2+(|\alpha n|^{(m-j)}|l_n|)^2].$$

我们可得

$$(\alpha n)^k(|c_n|+|d_n|)\leqslant(\alpha n)^{(m-j)}(|c_n|+|d_n|)\leqslant$$
$$\frac{1}{\delta(\alpha n)^{2(m-j)}}+\frac{2}{\delta}[|(\alpha n)^{(m-j)}k_n|^2+|(\alpha n)^{(m-j)}l_n|^2]\quad(k=0,1,2,\cdots,n-j), \tag{13}$$

不等式(13)两边同乘 $(\alpha n)^j$ 得

$$(\alpha n)^k(|c_n|+|d_n|)\leqslant(\alpha n)^m(|c_n|+|d_n|)\leqslant$$
$$\frac{1}{\delta(\alpha n)^{(2m-3j)}}+\frac{2}{\delta}[|(\alpha n)^{(m-j)}k_n|^2+|(\alpha n)^{(m-j)}l_n|^2](\alpha n)^j\leqslant$$
$$\frac{1}{\delta(\alpha n)^{(2m-3j)}}+\frac{2}{\delta}[|(\alpha n)^m k_n|^2+|(\alpha n)^m l_n|^2]$$
$$(k=j,j+1,\cdots,m;1\leqslant j\leqslant m_0). \tag{14}$$

注意到: $j\leqslant m_0\leqslant\left[\frac{m}{2}\right]\leqslant\frac{m}{2}$, 即 $m-j\geqslant j$, 因此, 对 $k=0,1,2,\cdots,m$, (13)、(14) 至少有一式成立. 因为$0\leqslant j\leqslant\left[\frac{2m-2}{3}\right]\leqslant\frac{2m-2}{3}$, 即$2m-3j\geqslant 2$, 所以级数 $\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{\delta(n\alpha)^{2m-3j}}$ 收敛. 又因为连续函数$f^{(k)}(t)$ $(k=1,2,\cdots,m)$ 的 Fourier 系数为:

$$(n\alpha)^k\left(k_n\cos\frac{k\pi}{2}+l_n\sin\frac{k\pi}{2}\right)\text{和}(n\alpha)^k\left(l_n\cos\frac{k\pi}{2}-k_n\sin\frac{k\pi}{2}\right)\quad(k=1,2,\cdots,m),$$

由 Bessel 不等式得:

$$\sum_{n=N}^{\infty}[|(\alpha n)^k k_n|^2+|(\alpha n)^k l_n|^2]=\sum_{n=N}^{\infty}\left[\left|(\alpha n)^k\left(k_n\cos\frac{k\pi}{2}+l_n\sin\frac{k\pi}{2}\right)\right|^2+\right.$$

$$\left|(\alpha n)^k\left(l_n\cos\frac{k\pi}{2}-k_n\sin\frac{k\pi}{2}\right)\right|^2\leqslant\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}|f^{(k)}(t)|^2\mathrm{d}t\quad(k=1,2,\cdots,m),$$

故 $\sum_{n=N}^{\infty}[|(\alpha n)^k k_n|^2+|(\alpha n)^k l_n|^2](k=1,2,\cdots,m)$ 收敛•

因此,由(13)、(14)知 $\sum_{n=N}^{\infty}(\alpha n)^k(|c_n|+|d_n|)(k=0,1,2,\cdots,m)$• 收敛,$(k=0,1,2,\cdots,m)$ 从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha n)^k(|c_n|+|d_n|)(k=0,1,2,\cdots,m)$ 收敛• 又因为

$$|c_n\cos(\alpha nt)+d_n\sin(\alpha nt)|\leqslant|c_n|+|d_n|,$$

$$\left|(\alpha n)^k\left(c_n\cos\frac{k\pi}{2}+d_n\sin\frac{k\pi}{2}\right)\cos\alpha nt+(\alpha n)^k\left(d_n\cos\frac{k\pi}{2}-c_n\sin\frac{k\pi}{2}\right)\sin\alpha nt\right|=$$

$$|(\alpha n)|^2\left|c_n\cos\left(\frac{k\pi}{2}+\alpha nt\right)+d_n\sin\left(\frac{k\pi}{2}\alpha nt\right)\right|\leqslant|(\alpha n)|^k(|c_n|+|d_n|)$$

$$(k=1,2,\cdots,m),$$

所以,三角级数(7)、(8)是绝对收敛和一致收敛的•

令 $x(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos\alpha nt+d_n\sin\alpha nt)$ 则有:

$$x^{(k)}(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(\alpha n)^k\left[\left(c_n\cos\frac{k\pi}{2}+d_n\sin\frac{k\pi}{2}\right)\cos\alpha nt+\left(d_n\cos\frac{k\pi}{2}-c_n\sin\frac{k\pi}{2}\right)\sin\alpha nt\right]\right\}(k$$

$=1,2,\cdots,m)$ 是连续的,易证 $x(t)$ 满足方程(1),因此 $x(t)$ 是方程(1)的 m 阶连续可微的 $2T$ 周期解•

推论 1 假设 $|b_0|\neq 1$ 或者 $b_0\neq-1$,且 $h_0=2kT$,k 为某个自然数,那么方程(1)存在 m 阶连续可微的 $2T$ 周期解的充分必要条件同定理 1•

证明 由引理 1 知,当 $|b_0|\neq 1$ 时,$\beta_{2m}=(1+2b_0\cos\alpha nh_0+b_0^2)\geqslant(1-|b_0|)^2=d>0$;当 $b_0\neq-1$ 且 $h_0=2Tk$ 时,$\beta_{2m}=(1+2b_0\cos2k\pi+b_0^2)=(1+b_0)^2=d>0$,由定理 1 知推论 1 的结论成立•

推论 2 设 $m\geqslant3$,$h_0=h_1=\frac{p}{q}T$(p、q 为不可约自然数),若如下任一条件成立•

(i) $(a_1\pm b_1)^2>4(|a_2|+|b_2|)$,

(ii) $a_2\leqslant0$,$b_2b_0\leqslant0$,$|a_1|\neq|b_1|$,$h_0=h_2$,

那么方程(1)存在 m 阶连续可微的 $2T$ 周期解的充分必要条件同定理 1•

证明 如果 $|b_0|\neq1$,那么由推论 1 知结论成立• 现设 $|b_0|=1$,对时滞 $h_0=h_1=\frac{p}{q}T$(p、q 为不可约自然数),分两种情况讨论

① 当 $\alpha nh_0=\alpha nh_1=k\pi$,$k$ 为某个自然数时,由引理 1 知

$$R_{2m}(n)=\beta_{2m}(\alpha n)^{2m}+\beta_{2m-1}(\alpha n)^{2m-1}+\beta_{2(m-1)}(\alpha n)^{2(m-1)}+R_{2m-3}(n),$$

其中 $\beta_{2m}=1+2b_0\cos k\pi+b_0^2=(1\pm b_0)^2\geqslant0$•

$$\beta_{2m-1}=\sum_{i=0}^{1}(-1)^i[a_ib_{1-i}\sin(\alpha nh_{1-i})-b_ia_{1-i}\sin(\alpha nh_i)+b_ib_{1-i}\sin(\alpha n(h_{k-i}h_i))]=0,$$

$$\beta_{2(m-1)}=\sum_{i=0}^{2}(-1)^{i+1}[a_ia_{k-i}+a_ib_{k-i}\cos(\alpha nh_{k-i})+b_ia_{k-i}\cos(\alpha nh_i)+$$

$$b_ia_{k-i}\cos(\alpha n(h_i-h_{k-i}))]=[a_1^2+b_1^2+2a_1b_1\cos k\pi-$$

$$2(a_2+a_2b_0\cos k\pi+b_0b_2\cos(\alpha n(h_2-h_0))+b_2\cos(\alpha nh_2))]\cdot$$

在条件(i)下,

$$\beta_{2(m-1)}\geqslant[(a_1\pm b_1)^2-4(|a_2|+|b_2|)]=d_1>0,\ 对一切 n 成立(j=1\leqslant m_0,\ m\geqslant 3),$$

在条件(ii)下,

$$\beta_{2(m-1)}\geqslant(a_1\pm b_1)^2-2(a_2+a_2b_0\cos k\pi+b_0b_2\cos(\alpha n(h_2-h_0))+b_2\cos(\alpha nh_2))\geqslant$$
$$(a_1\pm b_1)^2-2a_2(1+b_0\cos k\pi)-2b_2b_0[1+b_0\cos k\pi]\geqslant(a_1\pm b_1)^2=d_2,$$

对一切 n, 成立$(j=1\leqslant m_0,\ m\geqslant 3)$•

② $\alpha nh_0=\alpha nh_1=k\pi+\dfrac{\lambda}{p}\pi(\lambda=1,2,\cdots,p-1)$, 令

$$d=\max\left\{\left|\cos\frac{\pi}{p}\right|,\left|\cos\frac{2\pi}{p}\right|,\cdots,\left|\cos\frac{(p-1)\pi}{p}\right|,\right\}\quad 则\ 0<d<1,$$

$\beta_{2m}=(1+2b_0\cos k\pi+b_0^2)=(2+2b_0\cos k\pi)\geqslant 2(1-d)=d_3>0$, 对一切 n 成立• 因此, 定理 1 的条件得到满足, 从而推论 2 结论成立• 证毕•

推论 3 设 $m\geqslant 4$; $h_0=h_4=\dfrac{p}{q}T$(p、q 为不可约自然数), 且满足条件: $a_1=b_1=0$, $a_2\leqslant 0$, $b_2b_0\leqslant 0$, $|a_2|\neq|b_2|$, $a_4\geqslant 0$, $b_4b_0\geqslant 0$,

那么方程(1)存在 m 阶连续可微的 $2T$ 周期解的充分必要条件同定理 1•

证明 推论 3 的证明类似推论 2•

易见, 代数方程(3)的唯一解的充分必要条件是:

$$a_m+b_m\neq 0\ 和\ A^2(n)+B^2(n)\neq 0,\ n=1,2,\cdots \tag{15}$$

定理 2 在定理 1 及其推论 1~3 的相应条件下, 方程(1)存在唯一的 m 阶连续可微的 $2T$ 周期的充分必要条件是(15)成立•

定理 3 设 $b_0\neq -1$, $h_j=2Tk_j$, k_j 为自然数($j=0,1,2,\cdots,m$), 如果 $a_m+b_m\neq 0$, 并且以下条件之一成立:

(i) $(a_{2j-1}+b_{2j-1})(a_{2j+1}+b_{2j+1})\leqslant 0$, $j=1,2,\cdots,m_1$, 且存在一个 j_0($1\leqslant j_0\leqslant m_1+1$)使得 $(a_{2j_0-1}+b_{2j_0-1})\neq 0$,

(ii) $(a_{2(j-1)}+b_{2(j-1)})(a_{2j}+b_{2j})\leqslant 0$, $j=1,2,\cdots,m_2$, 且存在一个 j_0($1\leqslant j_0\leqslant m_2+1$)使得 $(a_{2(j_0-1)}+b_{2(j_0-1)})\neq 0$,

那么方程(1)存在唯一的 m 阶连续可微的 $2T$ 周期解• 其中

$$m_1=\begin{cases}\dfrac{m-2}{2} & (当\ m\ 偶数时),\\[2mm] \dfrac{m-1}{2} & (当\ m\ 为奇数时),\end{cases}\qquad m_2=\begin{cases}\dfrac{m}{2} & (当\ m\ 偶数时),\\[2mm] \dfrac{m-1}{2} & (当\ m\ 为奇数时)\cdot\end{cases}$$

证明 因 $b_0\neq -1$, $h_0=2k_0T$, 故由推论 1 知方程(1)存在唯一的 m 阶连续可微的 $2T$ 周期解的充分必要条件是(15)式成立•

当 $m=2k$, $k=1,2,\cdots$ 时, 有:

$$A(n)=(\alpha n)^{2k}(1+b_0)(-1)^k+(\alpha n)^{2(k-1)}(a_2+b_2)(-1)^{k-1}+\cdots+(a_{2k}+b_{2k})(-1)^0,$$

$$B(n)=(\alpha n)^{2k-1}(a_1+b_1)(-1)^{k-1}+(\alpha n)^{2k-3)}(a_3+b_3)(-1)^{k-2}+\cdots+$$
$$(\alpha n)(a_{2k-1}+b_{2k-1})\cdot$$

当 $m=2k+1$, $k=1,2,\cdots$ 时, 有:

$$A(n)=(\alpha n)^{2k}(a_1+b_1)(-1)^{k+1}+(\alpha n)^{2(k-1)}(a_3+b_3)(-1)^{k-2}+\cdots+(a_{2k-1}+b_{2k-1}),$$

$$B(n)=(\alpha n)^{2k+1}(1+b_0)(-1)^{k}+(\alpha n)^{2k-1)}(a_2+b_2)(-1)^{k-1}+\cdots+(a_{2k}+b_{2k})(\alpha n),$$

因此, 在条件(i)下, 当 m 为偶数时, $B(n)\neq 0$, 当 m 为奇数时, $A(n)\neq 0$; 在条件(ii)下, 当 m 为偶数时 $A(n)\neq 0$, 当 m 为奇数时, $B(n)\neq 0$, 即对任何自然数 n, (15) 式成立, 因此定理 3 得证•

注 1　对方程(1), 本文定理 1 是最一般的结果, 用本文的方法已不可能得到比定理 1 更好的结果, 即用 Fourier 级数方法研究方程(1) 的工作已完成, 不会再有新的进展•

注 2　定理 1 适用面极广, 推论 1~ 3 和定理 3 都可视为其特例• 定理 1 的结果推广、改进和完善了文献[1~ 6] 中的主要结果, 并且可对以往何文献都无法判定的方程(1) 周期解存在的大量情形作出判定•

例 1　中立型方程

$$x^{(10)}(t)+x^{(7)}(t)+8x^{(6)}(t)+x^{(10)}\left(t-\frac{\pi}{3}\right)+x^{(7)}\left(t-\frac{5}{6}\pi\right)-x^{(6)}\left(t-\frac{7}{6}\pi\right)+x\left(t-\frac{\pi}{6}\right)=\sin(12t),$$

这是方程(1) 的特例, 文献[5, 6] 无法判定其周期解的存在性, 但用本文定理 3 可知该方程存在唯一的 10 阶连续可微的 $\frac{\pi}{6}$ 周期解•

例 2　中立型方程

$$x''(t)-12x(t)+x''(t-\sqrt{2})+6x(t-3\sqrt{3})=2\cos\sqrt{2}\pi t$$

其中 $b_0=1$, $a_1=b_1=0$, $h_0=\sqrt{2}$, $h_2=3\sqrt{2}$, $2T=\sqrt{2}$•

这是方程(1) 的一个特例, 不满足文[1~ 6] 的条件• 但满足本文定理 1、2、3 的条件, 故存在唯一的二阶连续可微的 $\sqrt{2}$ 周期解•

例 3　中立型方程

$$x^{(5)}(t)+4x^{(3)}(t)+x^{(2)}(t)+7x'(t)+2x(t)-x^{(5)}\left(t-\frac{2}{3}\right)+2x^{(3)}(t-\sqrt{3})-x^{(2)}(t-4)-x'\left(t-\frac{2}{3}\right)+x(t-8)=\sin\pi t,$$

这是方程(1) 的一个特例, 不满足文[5, 6] 的条件, 但因为 $m=5$, $h_0=h_4=\frac{2\times 2}{2\times 3}=\frac{2}{3}$, $2T=2$ 易验证推论 3 的条件(i) 和(ii) 成立, 且

$$B(n)=(\pi n)^5\left(1-\cos\frac{2n}{3}\pi\right)+(\pi n)^3(4-2\cos\sqrt{3}\pi n)+\pi n\left(7-\cos\frac{2n}{3}\pi\right)>0,$$

由定理 2 知该方程存在唯一的五阶连续可微的 2 周期解•

[参 考 文 献]

[1]　张毅, 章毅. 关于二阶常系数线性中立型方程的周期解[J]. 数学学报, 1990, **33**(4): 517—520.

[2]　王根强. 二阶中立型方程的周期解[J] . 高校应用数学学报, 1993, **8**A(3): 251—254.

[3]　曹进德. 二阶常系数中立型方程的周期解[J] . 纯粹数学与应用数学, 1996, **12**(2): 69—72.

[4]　冯兆先. 关于二阶中立型方程周期解的存在性[J] . 数学研究与评论, 1997, **17**(4): 553—556.

[5] 司建国. 关于常系数线性中立型方程周期解的讨论[J]. 应用数学和力学, 1996, **17**(1): 29—37.
[6] 张保生, 曹进德. 关于高阶中立型方程的周期解[J]. 生物数学学报, 1999, **14**(1): 50—55.

$2T$_Periodic Solution for m Order Neutral Type Differential Equations With Time Delays

ZHANG Bao_sheng, ZHU Guang_hui
(Department of Mathematics, Yunnan Nationalities Institute,
Kunming 650031, P R China)

Abstract: Periodic solution of m order linear neutral equations with constant coefficient and time delays was studied. Existence and uniqueness of $2T$_periodic solutions for the equation were discussed by using the method of Fourier series. Some new necessary and sufficient conditions of existence and uniqueness of $2T$_periodic solutions for the equation are obtained. The main result is used widely. It contains results in some correlation paper for its special case, improves and extends the main results in them. Existence of periodic solution for the equation in larger number of particular case can be checked by using the result, but cannot be checked in another paper. In other words, the main result in this paper is most generalized for (1), the better result by using the same method.

Key words: neutral type equation; $2T$_periodic solution; Fourier series