

文章编号: 1000-0887(2002) 01-0099-07

# 带有横向射流的三维超声速湍流流场分析\*

孙得川, 胡春波, 蔡体敏

(西北工业大学 航天工程学院, 西安 710072)

(蔡树棠推荐)

摘要: 应用显式的五阶 WENO 格式, 结合  $k-\varepsilon$  湍流模型, 求解三维 Favre 平均 N-S 方程, 计算了从方孔横向喷出的声速气流与马赫数为 3.0 的超声速气流的干扰流场。结果表明, 在射流上游, 射流的阻碍使超声速气流产生分离, 形成两个主要的回流区域, 主回流导致在方孔射流两侧形成马蹄涡区域, 射流下游存在低压区域, 形成较小的回流以及一对螺旋形旋涡。

关键词: 射流; N-S 方程;  $k-\omega$  湍流模型; WENO 格式

中图分类号: V448 文献标识码: A

## 引言

在航空航天在许多领域, 诸如喷管中的推力矢量控制、冲压发动机的超声速燃烧, 以及飞行器的飞行姿态控制中, 都会遇到声速或超声速射流与超声速气流的混合问题<sup>[1~3]</sup>。通过对该类型流场的数值模拟, 可以了解流动的详细结构, 这在设计过程中是很重要的。

由于横向射流的干扰, 超声速流场中形成了复杂的流动结构, 包括激波与附面层干扰以及旋涡等, 因此需采用高精度的数值方法, 但是目前关于该类型流场的数值模拟, 多为二维, 鲜见三维计算, 而且计算精度不高。自八十年代 Harten, Osher 和 Shu 等人提出 essentially non-oscillatory (ENO) 方法以来, ENO 格式得到了广泛的应用, 日臻成熟<sup>[4~6]</sup>。该方法不仅有效地避免了间断附近的数值振荡, 而且能够保持较高的精度。本文采用 weighted ENO 格式, 结合  $k-\varepsilon$  湍流模型, 对带有横向射流的平板上超声速流场进行三维计算, 详细地描述了流场的细节。主流马赫数为 3.0, 射流孔为方孔、边长为 1mm, 射流马赫数为 1.0。

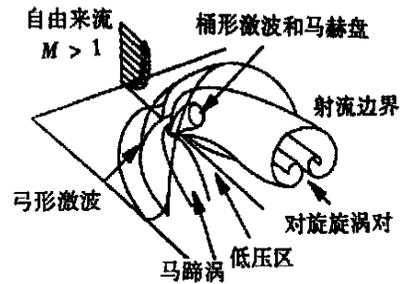


图 1

作为初步的研究, 本文不考虑化学反应。流场示意图如图 1 所示。当二次射流垂直喷入主流时, 射流迅速在主流中膨胀并与主流掺混。由于射流的阻碍, 迫使主流移动。在射流上游, 产生弓形激波, 弓形激波与附面层作用促使附面层分离并产生分离激波; 对于欠膨胀射流, 膨胀后的射流由桶形波压缩, 最终通过马赫盘达到与周围压强的平衡, 通过马赫盘使射流丧失了它的大部分动量, 于是随主流流向下流; 在射流下游的物面附近有一低压区域存在, 此处存

\* 收稿日期: 2000\_01\_17; 修订日期: 2001\_08\_

作者简介: 孙得川(1973—), 男, 河北容城人, 博士。

在一较小的回流·

## 1 控制方程

采用三维 Favé 平均 Navier-Stokes 方程和低雷诺数  $k-\varepsilon$  湍流模型, 如下

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{E} - \mathbf{E}_v) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{F} - \mathbf{F}_v) + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{G} - \mathbf{G}_v) = \mathbf{H}, \quad (1)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \\ \rho k \\ \rho \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u v \\ \rho u w \\ u(e + p) \\ \rho u k \\ \rho u \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v w \\ \rho v^2 + p \\ \rho v u \\ v(e + p) \\ \rho v k \\ \rho v \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho w v \\ \rho w^2 + p \\ \rho w u \\ w(e + p) \\ \rho w k \\ \rho w \varepsilon \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{E}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} - q_x \\ \left\{ \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right\} \frac{\partial k}{\partial x} \\ \left\{ \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right\} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} - q_y \\ \left\{ \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right\} \frac{\partial k}{\partial y} \\ \left\{ \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right\} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zz} \\ u\tau_{xz} + v\tau_{yz} + w\tau_{zz} - q_z \\ \left\{ \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right\} \frac{\partial k}{\partial z} \\ \left\{ \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right\} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mu_t P - \rho \varepsilon \\ c_1 f_1 \mu_t \frac{\varepsilon}{k} P - c_2 f_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \end{pmatrix},$$

其中  $P$  表示湍流生成项·

$$P = \left[ \mu_t \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \right] \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad (2)$$

$$\mu_t = C_\mu f_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad C_\mu = 0.09, \quad f_\mu = \left\{ 1 - \exp[-0.0165 R_y] \right\}^2 (1 + 20.5/R_t), \quad (3)$$

$$c_1 = 1.44, \quad c_2 = 1.92, \quad \sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3, \quad (4)$$

$$R_t = \rho k^2 / \mu \varepsilon, \quad R_y = \rho \sqrt{k} y / \mu, \quad f_1 = 1 + (0.05/f_\mu)^3, \quad f_2 = 1 - \exp(-R_t^2) \cdot (5)$$

## 2 数值方法

### 2.1 空间差分

本文采用 Shu 和 Osher 的五阶 weighted ENO 格式, 并对该格式进行修正, 提高了激波分辨率。该格式的主要思想是通过插值模板的光滑性度量, 计算出每个模板的权重系数, 从而避免大量的逻辑判断。该格式仅在间断处降为三阶精度, 在光滑区域为五阶精度。

NS 方程的半离散形式如下:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} = - [(\mathbf{E} - \mathbf{E}_v)_{i+1/2, j, k} - (\mathbf{E} - \mathbf{E}_v)_{i-1/2, j, k}] - [(\mathbf{F} - \mathbf{F}_v)_{i, j+1/2, k} - (\mathbf{F} - \mathbf{F}_v)_{i, j-1/2, k}] - [(\mathbf{G} - \mathbf{G}_v)_{i, j, k+1/2} - (\mathbf{G} - \mathbf{G}_v)_{i, j, k-1/2}] \quad (6)$$

其中对流项采用五阶精度的 weighted ENO (WENO5,  $r = 3$ ) 格式进行离散, 粘性项采用四阶中心差分。

在应用 WENO 方法时, 物理通量(例如  $F$ ) 先分裂为正负两项,

$$\mathbf{F}(\mathbf{Q}) = \mathbf{F}^+(\mathbf{Q}) + \mathbf{F}^-(\mathbf{Q}), \quad (7)$$

其中  $\partial \mathbf{F}^+ / \partial \mathbf{Q} \geq 0, \partial \mathbf{F}^- / \partial \mathbf{Q} \leq 0$  本文采用 Lax-Friedrichs 形式进行通量分裂。

$$\mathbf{F}^\pm(\mathbf{Q}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}(\mathbf{Q}) \pm \Lambda |\mathbf{Q}|), \quad (8)$$

式中  $|\Lambda| = \text{diag}(|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|, |\lambda_4|, |\lambda_5|, \dots)$ , 而  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$  是当地的特征值。下面以一维标量系统来说明 WENO 的应用。对于方程

$$u + f(u)_x = 0 \quad (9)$$

若空间离散时均匀划分网格, 记  $x_j = j \Delta x$ 。则在  $x_j$  的空间差分可以表示为

$$L = - \frac{1}{\Delta x} (f_{j+1/2} - f_{j-1/2}), \quad (10)$$

其中,  $f_{j+1/2}$  和  $f_{j-1/2}$  是数值通量。并且若记  $f_{j+1/2}^+$  和  $f_{j+1/2}^-$  是  $f_{j+1/2}$  的正负数值通量, 则有

$$f_{j+1/2} = f_{j+1/2}^+ + f_{j+1/2}^- \quad (11)$$

以下只给出数值通量  $f_{j+1/2}^+$  的形式,  $f_{j+1/2}^-$  可以对称地写出。

$$f_{j+1/2}^+ = \omega_0^+ \left[ \frac{2}{6} f_{j-2}^+ - \frac{7}{6} f_{j-1}^+ + \frac{11}{6} f_j^+ \right] + \omega_1^+ \left[ -\frac{1}{6} f_{j-1}^+ + \frac{5}{6} f_j^+ + \frac{2}{6} f_{j+1}^+ \right] + \omega_2^+ \left[ \frac{2}{6} f_j^+ + \frac{5}{6} f_{j+1}^+ - \frac{1}{6} f_{j+2}^+ \right], \quad (12)$$

其中  $\omega_k^+ = \frac{\alpha_k^+}{\alpha_0^+ + \alpha_1^+ + \alpha_2^+}, k = 0, 1, 2,$

$$\alpha_0^+ = \frac{1}{10} (\varepsilon + IS_0^+)^{-2}, \alpha_1^+ = \frac{6}{10} (\varepsilon + IS_1^+)^{-2}, \alpha_2^+ = \frac{3}{10} (\varepsilon + IS_2^+)^{-2},$$

$\varepsilon$  是一小量, 并且

$$\left. \begin{aligned} IS_0^+ &= \frac{13}{12} (f_{j-2}^+ - 2f_{j-1}^+ + f_j^+)^2 + \frac{1}{4} (f_{j-2}^+ - 4f_{j-1}^+ + 3f_j^+)^2, \\ IS_1^+ &= \frac{13}{12} (f_{j-1}^+ - 2f_j^+ + f_{j+1}^+)^2 + \frac{1}{4} (f_{j-1}^+ - f_{j+1}^+)^2, \\ IS_2^+ &= \frac{13}{12} (f_j^+ - 2f_{j+1}^+ + f_{j+2}^+)^2 + \frac{1}{4} (3f_j^+ - 4f_{j+1}^+ + f_{j+2}^+)^2. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式(13)是插值模板的光滑程度度量, 通过对每一插值模板的光滑性度量, 给出它的权重系数, 然后组成数值通量的插值多项式。

## 2.2 时间离散

应用三阶的 Runge-Kutta 方法进行时间推进。对于偏微分方程

$$\frac{du}{dt} = L(u), L \text{ 是空间微分算子} \quad (14)$$

三阶的 Runge\_Kutta 格式为

$$\left. \begin{aligned} u^{(1)} &= u^n + \Delta t L(u^n), \\ u^{(2)} &= \frac{3}{4}u^n + \frac{1}{4}u^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t L(u^{(1)}), \quad u^{n+1} = \frac{1}{3}u^n + \frac{2}{3}u^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t L(u^{(2)}) \end{aligned} \right\} (15)$$

### 3 计算结果

#### 3.1 二维计算结果的比较

针对二维平板上的横向射流问题, 本文给出了采用 WENO 方法得到的结果和参考文献 [7] 中实验结果的比较。

计算区域长 44mm, 高 50mm, 射流宽度 1mm。自由来流是马赫数为 3.71, 总压为 1atm 的空气。射流总压为 0.31atm, 出口马赫数为 1.0。全场网格数为  $89 \times 60$ , 见图 2, 网格在物面附近加密, 第一条网格距物面的  $y^+ \approx 1$ 。

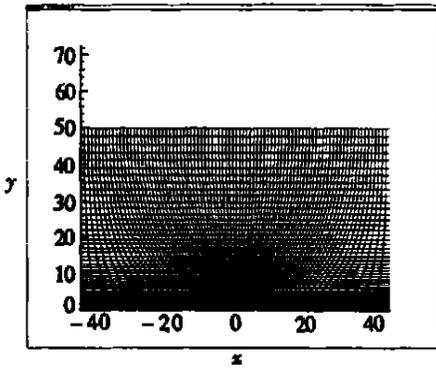


图 2 计算网格

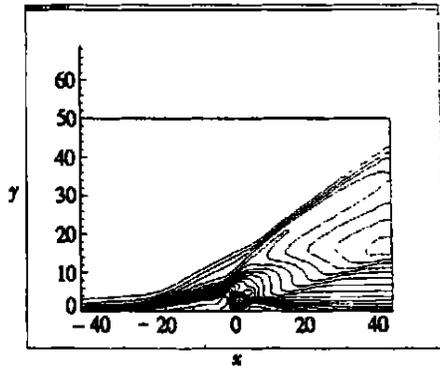


图 3 马赫数分布

为了同文献 [7] 的实验比较, 给定入口边界层厚度约为 4.9mm, 其他条件相同, 这相当于文献中射流所在的位置。图 3 显示的是马赫数分布, 清晰地显示出了“ $\lambda$ 波”、射流出口的压缩波、马赫盘以及射流下游气流再次遇到壁面形成的压缩波。图 4 是射流附近速度矢量的局部放大, 从中可以清楚地看到射流上游有两个回流区域, 下游也有一个回流区域。图 5 是物面的静压分布, 计算结果与实验值很接近。物面压强在射流上游的气流分离以后迅速上升, 在达到第一个峰值后稍有下降, 而后在两回流区域中间的气流驻点上升到第二个峰值; 紧靠射流的下游存在低压区, 产生逆压梯度, 导致此地气流分离, 形成回流。

#### 3.2 方孔射流与横向超声速来流的流场分析

计算区域长 37mm, 宽 22mm, 高 25mm, 射流孔为方孔, 边长 1mm。自由来流是马赫数为 3.0, 总压为 1atm 的空气, 射流总压为 0.5atm, 出口马赫数为 1.0。全场网格数为  $69 \times 59 \times 51$ 。

图 6 和图 7 是分别是对称面上的马赫数分布和压强分布, 从图中可以清楚地看到射流正前方有一道弓形激波, 弓形激波与附面层作用, 引起附面层分离(见图 9), 形成分离激波, 分离激波和弓形激波组成“ $\lambda$ ”波, 由马赫数分布还能够分辨出射流周围的桶形激波。

图 8 是对称面物面压强分布, 图 9 是对称面射流附近的速度矢量图, 图 10 是射流上游对称面速度分布的局部放大。速度矢量图显示出, 在射流上游有两个主要的旋涡, 称之为主涡和

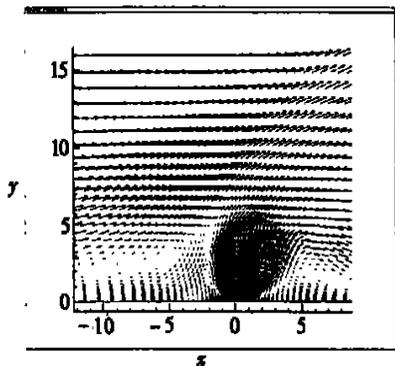


图 4 射流附近的速度矢量

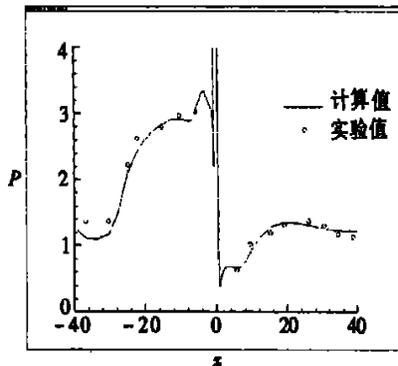


图 5 物面压强分布

副涡(primary vortex and secondary vortex)• 主涡是附面层分离引起的, 副涡是射流的引射作用引起的• 另外, 在主涡和平板之间还有一很小的旋涡, 称之为三次涡(Tertiary Vortex)• 在射流上游对称面上, 随着附面层分离, 压强逐渐升高, 在此区域存在两个压力峰• 第一个压力峰在三次涡处, 这个区域的速度很低, 经过三次涡, 随着流速的增加, 压强逐渐降低, 在主涡和副涡之间, 气流流向物面, 形成压强更高的第二个压力峰• 射流下游, 有一低压区, 在此区域有小的回流(图 9)•

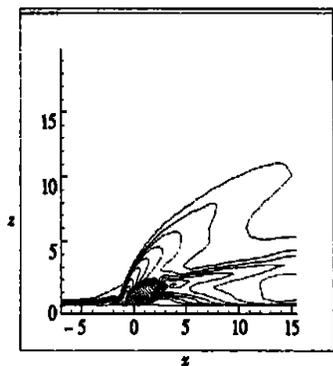


图 6 对称面上的马赫数分布

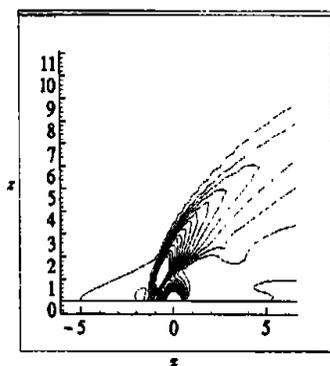


图 7 对称面上的压强分布

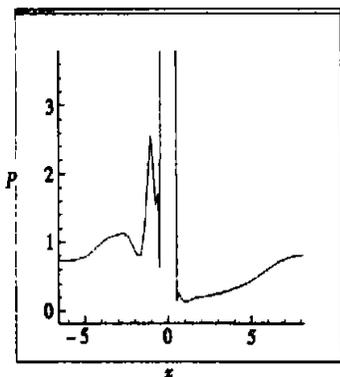


图 8 对称面的物面压强分布

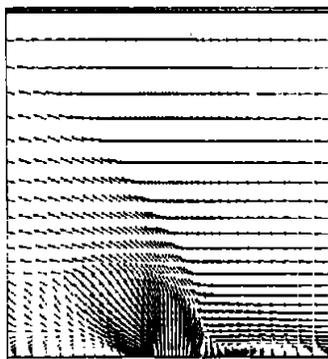


图 9 对称面上的速度矢量

图 11 以流线显示了流场中的旋涡结构, 主要有 4 对旋涡• 射流上游由附面层分离形成的马蹄涡区域非常明显, 从图 12 的物面压强分布也可以清楚地看到马蹄涡的形状• 紧随马蹄涡

的是副涡引起的一对旋涡。这两对旋涡自射流上游生成以后,围绕射流流向下游。射流从方孔喷出,边缘的气流发生翻卷,形成一对逆向旋转的旋涡对。而在本文的计算条件下,在射流下游低压区还有一对螺旋形的旋涡结构(Helical Vortex),图13是射流下游该旋涡对所在的一个速度剖面。

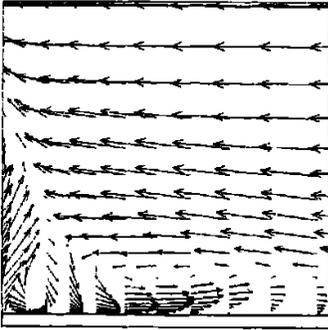


图10 射流上游的速度矢量

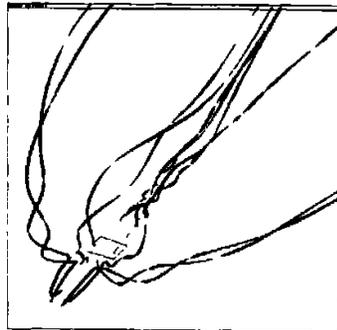


图11 射流周围的旋涡对

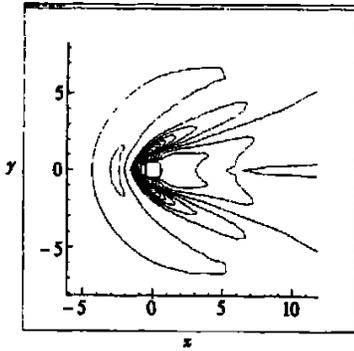


图12 物面压强分布

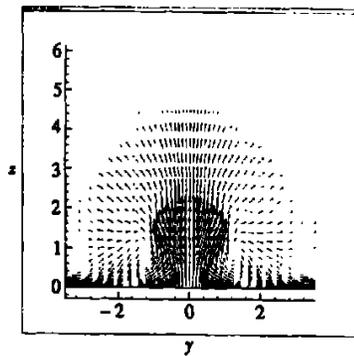


图13 射流下游横截面上的速度矢量

## 4 结 论

通过WENO方法,结合低雷诺数 $k-\varepsilon$ 湍流模型求解带有横向射流的三维湍流流场,比较详细地捕捉到了流场中的复杂激波系和旋涡结构。结果表明,平板上的横向声速射流使超声速主流分离,形成弓形激波和马蹄涡区域;射流上游压强升高,有两个压力峰,靠近射流的第二个压力峰值高于第一个压力峰值;射流在流向下游的过程中,形成一对逆向旋转的旋涡;在射流下游近壁低压区,有一对螺旋形旋涡。

### [参 考 文 献]

- [1] Gruber M R, Goss L P. Surface pressure measurements in supersonic transverse injection flowfields [J]. J Propulsion and Power, 1999, 15(5): 633—641.
- [2] Toda K, Yamamoto M. Computation of Supersonic Turbulent Flowfield with Secondary Jet normal to Freestream[R]. AIAA 98\_0944, 1998.
- [3] Roger R P, Chan S C. Parameters Affecting Penetration of a Single Jet into a Supersonic Crossflow [R]. AIAA 98\_0325, 1998.
- [4] Harten A, Engquist B, Osher S, Chakravarthy. Uniformly high\_order accurate nonoscillatory schemes

- [J]. *J Comp Phys*, 1987, **71**: 231.
- [5] Wilcoxson Mark, Manousiouthakis Vasilios. On an implicit ENO scheme[J]. *J Comp Phys*, 1994, **115**: 376—389.
- [6] JIANG Guang\_shan, SHU Chi\_wang. Efficient implementation of weighted ENO schemes[J]. *J Comp Phys*, 1996, **126**: 202—228.
- [7] Aso S, Okuyama S. Experimental study of mixing phenomena in supersonic flows with slot injection [R]. AIAA 91\_0016, 1991.

## Computation of Supersonic Turbulent Flowfield With Transverse Injection

SUN De\_chuan, HU Chun\_bo, CAI Ti\_min

(College of Astronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, P R China)

**Abstract:** Three-dimensional steady flowfield generated by transverse sonic injection into a supersonic flow was simulated by solving the Favre-averaged Navier-Stokes equations using the weighted essentially nonoscillatory (WENO) schemes and Jones-Launder  $k-\varepsilon$  model. Results indicate that in the upstream of the square injection there exist two main recirculation regions and the primary vortex induces the horseshoe vortex region. In the downstream there is a low pressure region which conduces a pair of helical vortex.

**Key words:** injection; N-S equation;  $k-\varepsilon$  model; weighted ENO scheme