文章编号: 1000_0887(2001) 12_1230_06

正规形的复内积平均法*

陈予恕, 孙洪军

(天津大学 力学系, 天津 300072)

(我刊编委陈予恕来稿)

摘要: 提出了求解非线性动力系统正规形的复内积平均法, 与传统的平均法相比, 其理论分析过程具有更加简单的形式, 易于编程实现, 可求到任意阶近似, 并统一了自治系统与非自治系统的求解过程, 最后求解一个例题来验证了该方法•

关 键 词: 非线性动力系统; 正规形; 复内积平均法
中图分类号: O322 文献标识码: A

前 言

工程振动中的非线性振动问题, 多数都是多自由度的[1,2], 由于非线性动力系统都不存在理论的精确解, 因此, 寻求其近似解法, 长期以来是科学家关心的焦点, 其中降维与简化就是处理非线性动力系统的关键理论之一•

传统的实数平均法是将以位移为未知量的振动方程, 化成以振幅、相位为未知量的标准方程组, 分别求出振幅、相位的近似表达式, 从而得到近似解[1~4]; 而在复内积平均法中, 用复变量来同时表示振幅相位的信息, 只需对复变量进行求解即可, 统一了自治系统与非自治系统, 以及共振与非共振的求解过程•

正规形方法是利用近恒同的非线性变换将系统简化的方法, 但当处理非自治系统时, 需要升维, 从而使计算复杂化, 而用复内积平均法得到正规形的过程, 不需考虑是否为自治系统或非自治系统• 求解过程计算简单, 易于实现计算机程序化• 虽在一般情况下, 平均后的方程即为正规形[5], 但是在有些情况下, 用复内积平均法得到的正规形, 还可用 Poincar _Birkhoff 正规形理论进一步简化[4]• 算例表明本文建议的复内积平均法是十分有效的[1]•

1 单自由度系统

现有单自由度振动方程

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(vt, x, \dot{x}) + F(vt), \tag{1}$$

其中 ε 为小参数, f 和 F 为 vt 的以 2π 为周期的周期函数、x 的非线性多项式以及 ε 的解析函数• 若无小扰动(既 ε= 0) 项, 设 x^* 为对应 $F(vt)$ 的特解, 则其派生方程解为:

---

* 收稿日期: 2000_10_10; 修订日期: 2001_06_26
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(重大 19990510), 国家重点基础研究专项经费资助项目(G1998020316), 教育部博士点基金资助项目(D09901)
作者简介: 陈予恕(1931—), 男, 山东肥城人, 教授, 博士生导师, 俄国应用科学院外籍院士.

$$x = \frac{1}{2}(z e^{i\omega t} + \bar{z} e^{-i\omega t}) + x^{*}, \tag{2}$$

$$\dot{x} = \frac{i\omega}{2}(z e^{i\omega t} - \bar{z} e^{-i\omega t}) + x^{*\prime}, \tag{3}$$

其中, z 为复常数, $\bar{z}$ 为 z 的共轭．若考虑小扰动对振动规律的影响, 则 z、$\bar{z}$ 应为时间 t 的慢变函数．将(2) 式对 t 微分后与(3) 式对比, 则有

$$\dot{z} e^{i\omega t} + \dot{\bar{z}} e^{-i\omega t} = 0． \tag{4}$$

将(3) 式对 t 微分并与(2) 式代入(1) 式, 则有

$$\dot{z} e^{i\omega t} - \dot{\bar{z}} e^{-i\omega t} = \frac{2\varepsilon f}{i\omega}． \tag{5}$$

由(4) 式、(5) 式解出

$$\dot{z} e^{i\omega t} = \frac{\varepsilon f}{i\omega}, \tag{6}$$

$$\dot{\bar{z}} e^{-i\omega t} = -\frac{\varepsilon f}{i\omega}． \tag{7}$$

取变换

$$z = H + \varepsilon R_1(H, \bar{H}, t) + \varepsilon^2 R_2(H, \bar{H}, t) + \cdots, \tag{8}$$

$$\frac{dH}{dt} = \varepsilon S_1(H, \bar{H}) + \varepsilon^2 S_2(H, \bar{H}) + \cdots, \tag{9}$$

上式中, R_i 为 t 的以 $T = 2\pi/\omega$ 为周期的周期函数, S_i 中不显含 t, 且都是复数函数．将 $\varepsilon f / i\omega$ 展开写成下式

$$\frac{\varepsilon f}{i\omega} = \varepsilon \phi_1 + \varepsilon^2 \phi_2 + \cdots, \tag{10}$$

ϕ_i 为在 $\varepsilon = 0$ 点展成台劳级数时 ε 的复系数．

定义复空间的内积

$$\langle p, q \rangle = \frac{1}{t}\int_0^t pq\,dt． \tag{11}$$

将(8) 式两边对时间 t 求导, 并考虑(9) 式得

$$\dot{z} = \varepsilon\left(S_1 + \frac{\partial R_1}{\partial t}\right) + \varepsilon^2\left(S_2 + \frac{\partial R_1}{\partial H}S_1 + \frac{\partial R_1}{\partial \bar{H}}\bar{S}_1 + \frac{\partial R_2}{\partial t}\right) + \varepsilon^3 + \cdots． \tag{12}$$

根据复内积的定义, 考虑(6) 式、(10) 式、(11) 式、(12) 式可得

$$\left\langle S_i + \sum_{j+k=i,\, j\geqslant 0,\, k\geqslant 0}\left(\frac{\partial R_j}{\partial H}S_k + \frac{\partial R_j}{\partial \bar{H}}\bar{S}_k + \frac{\partial R_i}{\partial t}\right), 1\right\rangle_T = \langle \phi_i, e^{i\omega t}\rangle_T, \tag{13}$$

其中为了公式统一化, 定义: $R_0 = S_0 \equiv 0$．

当 t 取为一个周期 T 时, 则 R_j 在此一个周期中内积为 0, 故可得

$$S_i = \langle \phi_i, e^{i\omega t}\rangle_T - \sum_{j+k=i,\, j\geqslant 0,\, k\geqslant 0}\left(\frac{\partial R_j}{\partial H}S_k + \frac{\partial R_j}{\partial \bar{H}}\bar{S}_k\right); \tag{14}$$

当 t 取少于一个周期 T 时, 则 R_j 在此一个周期中内积不为 0, 故可得

$$R_i = t(\langle \phi_i, e^{i\omega t}\rangle_t) - S_i - \sum_{j+k=i,\, j\geqslant 0,\, k\geqslant 0}\left(\frac{\partial R_j}{\partial H}S_k + \frac{\partial R_j}{\partial \bar{H}}\bar{S}_k\right)． \tag{15}$$

由(14) 式、(15) 式即可依次确定 R_i 和 S_i, 其中 i 从 1 到 m, 可求得任意的 m 阶近似．

故复数形式的正规形为

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon^i S_i(H, \bar{H}); \tag{16}$$

原方程的渐进解为

$$x = \frac{1}{2}(z e^{i\omega t} + \bar{z} e^{-i\omega t}), \tag{17}$$

$$z = H + \sum_{i=0}^{m} \varepsilon^i R_i(H, \bar{H}, t). \tag{18}$$

注: 在我们建议的复内积平均法中, 由于采取了复数的形式, 既包含了振幅的信息, 又包含了相位的信息, 故 $S_i(H, \bar{H})$ 对于共振、非共振情况均适用, 因而不用再另设解的形式。

2 多自由度系统的强迫振动

现有典则形式的多自由度非线性振动方程

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{\beta=1}^{n} \alpha_{s\beta} x_\beta + f_s(vt) + \varepsilon F_s(vt, x, \varepsilon) \qquad (s = 1, 2, \cdots, n;\ q = n/2), \tag{19}$$

其中 $\alpha_{s\beta}$ 为常数; ε 为小参数; f_s 和 F_s 为 vt 的以 2π 为周期的周期函数、x 的非线性多项式以及 ε 的解析函数。

方程组(19)的派生系统为:

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{\beta=1}^{n} \alpha_{s\beta} x_\beta + f_s(vt), \tag{20}$$

设其齐次部分

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{\beta=1}^{n} \alpha_{s\beta} x_\beta \tag{21}$$

的特征方程只有简单的纯虚根 $\pm \omega_1 i, \cdots, \pm \omega_q i$。

方程(21)式对应于 ω_i 的特解为:

$$x_{si}(t) = (a_{si}\cos\omega_i t - b_{si}\sin\omega_i t) + i(a_{si}\cos\omega_i t + b_{si}\sin\omega_i t) = P_{si} e^{i\omega_i t}, \tag{22}$$

其中 a_{si}、b_{si} 为实数, $P_{si} = a_{si} + i b_{si}$。

假若函数 $f_s(vt)$ 满足(20)式的通解为以 $T = 2\pi/v$ 为周期的周期性条件

$$\int_0^T \sum_{s=1}^{n} f_s(vt) y_{sj}(t)\, dt = 0, \tag{23}$$

则方程(20)式将有周期特解 x_s^*, 其中

$$y_{sj}(t) = (g_{sj}\cos\omega_j t - h_{sj}\sin\omega_j t) + i(g_{sj}\cos\omega_j t + h_{sj}\sin\omega_j t) = C_{sj} e^{i\omega_j t} \tag{24}$$

是和(21)式共轭方程组

$$\frac{dy_s}{dt} + \sum_{\beta=1}^{n} \alpha_{\beta s} y_\beta = 0 \tag{25}$$

的特解。(25)式中 g_{sj}、h_{sj} 为实数, $C_{sj} = g_{sj} + i h_{sj}$。

由共轭方程组的解的性质, 有

$$\sum_{s=1}^{n} x_{si}(t) y_{sj}(t) = \text{const} \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, q). \tag{26}$$

当 $i \neq j$ 时,

$$\sum_{s=1}^{n} P_{si} C_{sj} e^{i(\omega_i + \omega_j)t} = \text{const}, \quad \sum_{s=1}^{n} P_{si} \bar{C}_{sj} e^{i(\omega_i - \omega_j)t} = \text{const}, \tag{27}$$

可得

$$\sum_{s=1}^{n} P_{si} C_{sj} = \sum_{s=1}^{n} P_{si} C_{sj} = 0; \tag{28}$$

当 $i = j$ 时,

$$\sum_{s=1}^{n} P_{si} C_{si} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega_i t} = \mathrm{const}, \quad \sum_{s=1}^{n} P_{si} C_{si} = \mathrm{const}, \tag{29}$$

可得

$$\sum_{s=1}^{n} P_{si} C_{si} = 0, \quad \sum_{s=1}^{n} P_{si} C_{si} = \mathrm{const}. \tag{30}$$

取变换

$$x_s = \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{2} \left(z_i P_{si} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_i t} + z_i P_{si} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_i t} \right) + x_s^*. \tag{31}$$

当 $z_i = \mathrm{const}$ 时, 式(31) 为(20) 式的通解, 将之代入(20) 式中, 可得

$$\sum_{i=1}^{q} \frac{\mathrm{i}\omega}{2} \left(z_i P_{si} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_i t} - z_i P_{si} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_i t} \right) = \sum_{\beta=1}^{n} \alpha_{s\beta} x_\beta. \tag{32}$$

当考虑非线性项的影响时, 则 z_i 应为时间 t 的慢变函数, 即 $z_i = z_i(t)$, 对(19) 式取(31) 形式的变换, 并考虑到(32) 式, 可得

$$\sum_{i=1}^{q} \frac{1}{2} \left(\dot{z}_i P_{si} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_i t} + \dot{z}_i P_{si} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_i t} \right) = \varepsilon F(vt, z, z, \varepsilon). \tag{33}$$

有了(28)、(30)、(33) 后, 以 C_{si} 和 C_{si} 分别乘(33) 式, 再将 s 从 1 到 n 求和, 则可得方程(19) 式的标准形式如下

$$\dot{z}_i \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_i t} = \frac{2\varepsilon}{\Delta_i} \sum_{s=1}^{n} F_s C_{si}, \tag{34}$$

$$\dot{z}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_i t} = \frac{2\varepsilon}{\Delta_i} \sum_{s=1}^{n} F_s C_{si}, \tag{35}$$

$$\Delta_i = \sum_{s=1}^{n} P_{si} C_{si} \qquad (i = 1, 2, \cdots, q). \tag{36}$$

取变换

$$z_i = H_i + \varepsilon R_{i1}(H, H, t) + \varepsilon^2 R_{2i}(H, H, t) + \cdots, \tag{37}$$

$$\frac{\mathrm{d}H_i}{\mathrm{d}t} = \varepsilon S_{1i}(H, H) + \varepsilon^2 S_{2i}(H, H) + \cdots, \tag{38}$$

上式中, R_{ji} 为 t 的周期函数, S_{ji} 中不显含 t, 且都是复数函数.

将 $\frac{2\varepsilon}{\Delta_i} \sum_{s=1}^{n} F_s C_{si}$ 展开写成下式:

$$\frac{2\varepsilon}{\Delta_i} \sum_{s=1}^{n} F_s C_{si} = \varepsilon \phi_{1i} + \varepsilon^2 \phi_{2i} + \cdots, \tag{39}$$

ϕ_{ji} 为在 $\varepsilon = 0$ 点展成台劳级数时 ε 的复系数.

将(34)、(37)、(39) 代入复内积的公式(11), 可得

$$\left\langle S_{ji} + \sum_{l+k=j,\, l \geqslant 0,\, k \geqslant 0} \left(\frac{\partial R_{li}}{\partial H_i} S_{jk} + \frac{\partial R_{li}}{\partial H_i} S_{jk} + \frac{\partial R_{ji}}{\partial t} \right), 1 \right\rangle_T = \left\langle \phi_{ji}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_i t} \right\rangle_T. \tag{40}$$

R_{ji} 和 S_{ji} 的确定与(14)、(15) 同, 其中 i 从 1 到 m, 可求得任意的 m 阶近似. 故复数形式的正规形为

$$\frac{\mathrm{d}H_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{m} \varepsilon^j S_{ji}(H, H); \tag{41}$$

原方程的渐进解为

$$x_s = \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{2}\left(z_i P_{si} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_i t} + z_i P_{si} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_i t}\right) + x_s^*, \tag{42}$$

$$z_i = H_i + \sum_{j=0}^{m} \varepsilon^j R_{ji}(H, H, t) \qquad (s = 1, 2, \cdots, n;\ i = 1, 2, \cdots, q). \tag{43}$$

3 例　　子

现有 Van de Pol 系统

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x}. \tag{44}$$

利用 Maple 程序进行推导, 得其结果如下:

$$S_1 = -\frac{1}{8}H^2 H + \frac{1}{2}H, \tag{45}$$

$$S_2 = \left(-\frac{11}{256}H^2 H^3 + \frac{3}{16}H^2 H - \frac{1}{8}H\right)\mathrm{i}, \tag{46}$$

$$R_1 = \left(-\frac{1}{16}HH^2 \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t} + \frac{1}{32}H^3 \mathrm{e}^{-4\mathrm{i}t} + \frac{1}{16}H^3 \mathrm{e}^{2\mathrm{i}t} - \frac{1}{4}H\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}\right)\mathrm{i}. \tag{47}$$

下面将其化为实数的形式与传统的平均法结果作一比较.

$$z = a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \tag{48}$$

$$a = y + \varepsilon U_1 + \varepsilon^2 \cdots, \tag{49}$$

$$\theta = \vartheta + \varepsilon V_1 + \varepsilon^2 \cdots, \tag{50}$$

将(49)、(50)代入(48)并考虑到

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon V} = 1 + \mathrm{i}\varepsilon V + \varepsilon^2 \cdots \tag{51}$$

则可得 $$z = y\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta} + \varepsilon(U_1 + \mathrm{i}yV_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta} + \varepsilon^2 \cdots. \tag{52}$$

与(8)作比较, 可得

$$H = y\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}, \tag{53}$$

$$R_1 = (U_1 + \mathrm{i}yV_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}. \tag{54}$$

将(53)两边对 t 进行微分, 可得

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \mathrm{i}y\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}. \tag{55}$$

将(53)代入(45)、(46)、(47)中, 则得

$$S_1 = \left(-\frac{1}{8}y^3 + \frac{1}{2}y\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}, \tag{56}$$

$$S_2 = \left(-\frac{11}{256}y^5 + \frac{3}{16}y^3 - \frac{1}{8}y\right)\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}, \tag{57}$$

$$R_1 = \left(-\frac{1}{16}y^3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t} + \frac{1}{32}y^3\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\vartheta}\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}t} + \frac{1}{16}y^3\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\vartheta}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t} - \frac{1}{4}y\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}\right)\mathrm{i}. \tag{58}$$

分别比较(54)、(55)则可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \varepsilon\left(-\frac{1}{8}y^3 + \frac{1}{2}y\right), \tag{59}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t} = \varepsilon^2\left(-\frac{11}{256}y^4 + \frac{3}{16}y^2 - \frac{1}{8}\right), \tag{60}$$

$$U_1 = -\frac{\gamma}{4}\sin 2(t+\vartheta) + \frac{\gamma^3}{32}\sin 4(t+\vartheta), \tag{61}$$

$$V_1 = -\frac{1}{4}\left(1-\frac{\gamma^2}{2}\right)\cos 2(t+\vartheta) + \frac{\gamma^2}{32}\cos 4(t+\vartheta)\cdot \tag{62}$$

这与实数平均法所得的结果是一样的[1]•

多自由度及其他系统的算例和计算机推导程序将另文发表•

[参 考 文 献]

[1] 陈予恕. 非线性振动[M]. 天津: 天津科学技术出版社, 1983, 154—174.

[2] Bogoliubov N, Mitropolsky Y A. Asymptotic methods in the theory of non_linear oscillations[J]. Gordon and Breach, New York, 1961, **11**(2): 241—253.

[3] 陈予恕. 非线性振动系统的分岔和混沌理论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1993, 330—340.

[4] CHEN Yu_shu, Andrew Y T. Leung Bifurcation and Chaos in Engineering[M]. London: Springer_Verlag, 1998, 230—239.

[5] Chow S Y, Hale J K. Methods of Bifurcation Theory[M]. New York: Springer_Verlag, 1982, 420—425.

Complex Inner Product Averaging Method for Calculating Normal Form of ODE

CHEN Yu_shu, SUN Hong_jun

(Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 300072, P R China)

Abstract: This paper puts forward a complex inner product averaging method for calculating normal form of ODE. Compared with conventional averaging method, the theoretic analytical process has such simple forms as to realize computer program easily. Results can be applied in both autonomous and non_autonomous systems. At last, an example is resolved to verify the method.

Key words: non_linear dynamic system; normal form; complex inner product averaging method