应用数学和力学,第 22 卷 第 12 期(2001 年 12 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2001) 12_1243_06

广义连续统场论中新的增率型功率和能率原理*

戴 天 民

(辽宁大学 数学应用中心和数学系,沈阳 110036)

(我刊编委戴天民来稿)

摘要: 目的是建立广义连续统场论的增率型功率和能率原理• 通过组合具有交叉项的增率型虚速度和虚角度原理以及虚应力和虚偶应力原理提出了微极连续统场论中具有交叉项的增率型功率和能率原理,并借助广义 Piola 定理同时而且无需其它附加要求地推导出微极和非局部微极连续统场论的所有增率型运动方程和边界条件以及能率方程• 类似地可以推导出微态连续统的相应结果• 文中给出的结果是新的,并可作为建立广义连续统力学相关的增率型有限元方法的理论基础•

关 键 词: 广义连续统; 增率型; 功率和能率原理; 广义 Piola 定理; 运动方程; 边界条件; 能率方程

中图分类号: O33 文献标识码: A

引 言

经典连续统力学的虚功率和增率型虚功率原理以及增率型运动方程和应力边界条件已被匡震邦[1]作过系统讨论•

本文的目的有二:

1) 对极性连续统建立具有交叉项的增率型功率和能率原理;

2) 借助上述原理和广义 Piola 原理同时而且无需其它附加要求地推导出极性和非局部极性连续统的所有增率型运动方程和边界条件以及能率方程•

本文是文献[2],同时也是文献[3]的继续• 除特别说明外均将直接沿用[2]的记法和符号• 为方便起见,在推导时使用分量记法,并把最后结果用适合所有坐标系的不变性形式加以表示•

1 微极连续统的增率型功率和能率原理

我们通过对文献[2]中(2a)和(2b)每项时间求导来公设微极连续统中具有交叉项的增率

* 收稿日期: 2000_06_05; 修订日期: 2001_06_26

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19672023);国家自然科学基金委员会(10011130235)和德意志研究联合会(51520001)资助的国际合作研究项目;辽宁省教育委员会 A 类科研基金项目(990111001)

作者简介: 戴天民(1931—),男,满族,辽宁开原人,教授,博士,博士生导师,已发表专著译著 12 部,论文 50 余篇.

型虚速度$(\delta\boldsymbol{v})$和虚角速度$(\delta\boldsymbol{r})$以及虚应力$(\delta\boldsymbol{t})$和虚偶应力$(\delta\boldsymbol{m})$原理如下:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_v \delta(\rho\dot{\varepsilon})^p\mathrm{d}v = {}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_v \rho(\boldsymbol{f}-\dot{\boldsymbol{v}})\cdot\delta\boldsymbol{v}\mathrm{d}v + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint_a \boldsymbol{p}^{(n)}\cdot\delta\boldsymbol{v}\mathrm{d}a + \\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_v \rho[(\boldsymbol{l}-\dot{\boldsymbol{\sigma}}) + \boldsymbol{x}\times(\boldsymbol{f}-\dot{\boldsymbol{v}})]\cdot\delta\boldsymbol{r}\mathrm{d}v + \\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint_a(\boldsymbol{c}_{(n)} + \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p}^{(n)})\cdot\delta\boldsymbol{r}\mathrm{d}a\end{aligned} \tag{1a}$$

以及

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_v \delta(\rho\dot{\varepsilon})^c\mathrm{d}v = {}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_v \rho\,\delta(\boldsymbol{f}-\dot{\boldsymbol{v}})\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}v + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint_a \delta\boldsymbol{p}^{(n)}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}a + \\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_v \rho\,\delta[(\boldsymbol{l}-\dot{\boldsymbol{\sigma}}) + \boldsymbol{x}\times(\boldsymbol{f}-\dot{\boldsymbol{v}})]\cdot\boldsymbol{r}\mathrm{d}v + \\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint_a \delta(\boldsymbol{c}^{(n)} + \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p}^{(n)})\cdot\boldsymbol{r}\mathrm{d}a.\end{aligned} \tag{1b}$$

通过对[2]中(3)每项时间求导,我们即可得到微极连续统中具有交叉项的增率型功率和能率原理如下:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_v(\rho\dot{\varepsilon})\mathrm{d}v = {}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_v \rho(\boldsymbol{f}-\dot{\boldsymbol{v}})\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}v + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint_a(\boldsymbol{p}^{(n)}\cdot\boldsymbol{v})\mathrm{d}a + \\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_v \rho[(\boldsymbol{l}-\dot{\boldsymbol{\sigma}}) + \boldsymbol{x}\times(\boldsymbol{f}-\dot{\boldsymbol{v}})]\cdot\boldsymbol{r}\mathrm{d}v + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint_a(\boldsymbol{c}^{(n)} + \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p}^{(n)})\cdot\boldsymbol{r}\mathrm{d}a.\end{aligned} \tag{2}$$

这里等号右边的第4项和第6项是交叉项.

2 微极连续统的增率型运动方程和边界条件以及能率方程

考虑到下列关系式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_v \rho[(\boldsymbol{f}-\dot{\boldsymbol{v}})\cdot\boldsymbol{v}]\mathrm{d}v = \int_v \rho[(\dot{f}_l-\ddot{v}_l)v_l + (f_l-\dot{v}_l)\dot{v}_l]\mathrm{d}v, \tag{a}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint_a(\boldsymbol{p}^{(n)}\cdot\boldsymbol{v})\mathrm{d}a = {}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint_a n_k t_{kl}v_l\mathrm{d}a = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_v(t_{kl,k}v_l + t_{kl}v_{l,k})\mathrm{d}v = \\ &\int_v\Big[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t_{kl,K}X_{K,k})v_l + t_{kl,k}\dot{v}_l + \dot{t}_{kl}v_{l,k} + t_{kl}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_{l,K}X_{K,k}) + \\ &(t_{kl,k}v_l + t_{kl}v_{l,k})v_{p,p}\Big]\mathrm{d}v = \\ &\int_v[(\dot{t}_{kl,k} - t_{kl,p}v_{p,k} + t_{kl,k}v_{p,p})v_l + t_{kl,k}\dot{v}_l + \dot{t}_{kl}v_{l,k} + \\ &t_{kl}(\dot{v}_{l,k} - v_{l,p}v_{p,k} + v_{l,k}v_{p,p})]\mathrm{d}v = \\ &\int_v(\dot{t}_{kl,k}v_l + t_{kl,k}\dot{v}_l + \dot{t}_{kl}v_{l,k} + t_{kl}\dot{v}_{l,k})\mathrm{d}v,\end{aligned} \tag{b}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_v \rho[(\boldsymbol{l}-\dot{\boldsymbol{\sigma}})\cdot\boldsymbol{r}]\mathrm{d}v = \int_v \rho[(\dot{l}_l-\ddot{\sigma}_l)r_l + (l_l-\dot{\sigma}_l)\dot{r}_l]\mathrm{d}v, \tag{c}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_v \rho\boldsymbol{x}\times(\boldsymbol{f}-\dot{\boldsymbol{v}})\cdot\boldsymbol{r}\mathrm{d}v = {}&\int_v \varepsilon_{lmn}\rho\Big\{[v_m(f_n-\dot{v}_n) + x_m(\dot{f}_n-\ddot{v}_n)]r_l + \\ &x_m(f_n-\dot{v}_n)\dot{r}_l\Big\}\mathrm{d}v,\end{aligned} \tag{d}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint_a \boldsymbol{c}^{(n)}\cdot\boldsymbol{r}\mathrm{d}a = \int_v(\underline{\dot{m}_{kl,k}}r_l + m_{kl,k}\dot{r}_l + \dot{m}_{kl}r_{l,k} + m_{kl}\underline{\dot{r}_{l,k}})\mathrm{d}v, \tag{e}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint_a(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p}^{(n)})\cdot\boldsymbol{r}\mathrm{d}a = \int_v \varepsilon_{lmn}\Big\{[(\dot{t}_{mn} + t_{mn}v_{p,p}) + x_m\underline{\dot{t}_{kn,k}} + v_m t_{kn,k}]r_l +$$

$$(t_{mn} + x_m \dot{t}_{kn,k})\dot{r}_l + (v_m t_{kn} + x_m \dot{t}_{kn}) r_{l,k} + x_m t_{kn} \underline{\dot{r}_{l,k}}\Big\}\mathrm{d}v \tag{f}$$

并把它们代入(2),则有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_v(\rho\dot{\varepsilon})\mathrm{d}v = & \int_v[\rho(f_l - \dot{v}_l) + t_{kl,k}]\dot{v}_l\mathrm{d}v + \int_v[\rho(\dot{f}_l - \ddot{v}_l) + \underline{\dot{t}_{kl,k}}]v_l\mathrm{d}v + \\ & \int_v\Big\{[\rho(l_l - \dot{\sigma}_l) + m_{kl,k} + \varepsilon_{lmn}t_{mn}] + \varepsilon_{lmn}x_m[\rho(f_n - \dot{v}_n) + t_{kn,k}]\Big\}\dot{r}_l\mathrm{d}v + \\ & \int_v\Big\{[\rho(\dot{l}_l - \ddot{\sigma}_l) + \underline{\dot{m}_{kl,k}} + \varepsilon_{lmn}(\dot{t}_{mn} + t_{mn}v_{p,p})] + \\ & \varepsilon_{lmn}v_m[\rho(f_n - \dot{v}_n) + t_{kn,k}] + \varepsilon_{lmn}x_m[\rho(\dot{f}_n - \ddot{v}_n) + \underline{\dot{t}_{kn,k}}]\Big\}r_l\mathrm{d}v + \\ & \int_v(\dot{t}_{kl}v_{l,k} + t_{kl}\underline{\dot{v}_{l,k}} + \dot{\overset{*}{m}}_{kl}r_{l,k} + \overset{*}{m}_{kl}\underline{\dot{r}_{l,k}})\mathrm{d}v,\end{aligned} \tag{3}$$

这里

$$\underline{\dot{t}_{kl,k}} = \dot{t}_{kl,k} - t_{kl,p}v_{p,k} + t_{kl,k}v_{p,p}, \tag{4a}$$

$$\underline{\dot{v}_{l,k}} = \dot{v}_{l,k} - v_{l,p}v_{p,k} + v_{l,k}v_{p,p}, \tag{4b}$$

$$\underline{\dot{m}_{kl,k}} = \dot{m}_{kl,k} - m_{kl,p}v_{p,k} + m_{kl,k}v_{p,p}, \tag{4c}$$

$$\underline{\dot{r}_{l,k}} = \dot{r}_{l,k} - r_{l,p}v_{p,k} + t_{kl,k}v_{p,p}, \tag{4d}$$

$$\dot{\overset{*}{m}}_{kl} = \dot{m}_{kl} + \varepsilon_{lmn}(v_m t_{kn} + x_m\dot{t}_{kn})\text{.} \tag{4e}$$

由(3)并利用类似在[2]中给出的那样广义 Piola 定理,则得

$$\rho(f_l - \dot{v}_l) + t_{kl,k} = 0 \qquad \text{在 } v \text{ 内}, \tag{5}$$

$$\rho(l_l - \dot{\sigma}_l) + m_{kl,k} + \varepsilon_{lmn}t_{mn} = 0 \qquad \text{在 } v \text{ 内}, \tag{6}$$

$$\rho(\dot{f}_l - \ddot{v}_l) + \underline{\dot{t}_{kl,k}} = 0 \qquad \text{在 } v \text{ 内}, \tag{7}$$

$$\rho(\dot{l}_l - \ddot{\sigma}_l) + \underline{\dot{m}_{kl,k}} + \varepsilon_{lmn}(\dot{t}_{mn} + t_{mn}v_{p,p}) = 0 \qquad \text{在 } v \text{ 内}, \tag{8}$$

$$\rho\ddot{\varepsilon} = \dot{t}_{kl}v_{l,k} + t_{kl}\underline{\dot{v}_{l,k}} + \dot{\overset{*}{m}}_{kl}r_{l,k} + \overset{*}{m}_{kl}\underline{\dot{r}_{l,k}} \qquad \text{在 } v \text{ 内}, \tag{9a}$$

或

$$\rho\ddot{\varepsilon} = \underline{\dot{t}_{kl}}v_{l,k} + t_{kl}\dot{v}_{l,k} + \underline{\dot{\overset{*}{m}}_{kl}}r_{kl} + \overset{*}{m}_{kl}\dot{r}_{l,k} \qquad \text{在 } v \text{ 内}, \tag{9b}$$

这里

$$\underline{\dot{t}_{kl}} = \dot{t}_{kl} - t_{pl}v_{k,p} + t_{kl}v_{p,p}, \tag{10a}$$

$$\underline{\dot{m}_{kl}} = \dot{m}_{kl} - m_{pl}v_{k,p} + m_{kl}v_{p,p}, \tag{10b}$$

$$\underline{\dot{\overset{*}{m}}_{kl}} = \dot{m}_{kl} - \varepsilon_{lmn}(x_m\dot{t}_{kn} + v_m t_{kn}), \tag{10c}$$

$$\underline{\overset{*}{m}_{kl}} = \overset{*}{m}_{kl} - \overset{*}{m}_{pl}v_{k,p} + \overset{*}{m}_{kl}v_{p,p}, \tag{10d}$$

而且容易证明

$$\dot{t}_{\underline{kl,k}} = \underline{\dot{t}_{kl,k}}, \tag{11a}$$

$$\dot{m}_{\underline{kl,k}} = \underline{\dot{m}_{kl,k}}\text{.} \tag{11b}$$

(5)、(6)以及(7)、(8)和(9a)、(9b)就是微极连续统的运动方程以及增率型运动方程和能率方程.

现在我们来推导微极连续统的所有增率型边界条件如下:

由(2)和(9b)可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_v(\rho\dot{\varepsilon})\mathrm{d}v = \int_v(\underline{\dot{t}_{kl}}v_{l,k} + t_{kl}\dot{v}_{l,k} + \underline{\overset{*}{m}_{kl}}r_{l,k} + \overset{*}{m}_{kl}\underline{\dot{r}_{l,k}})\mathrm{d}v =$$

$$\oint_a n_k(\underline{\dot t_{kl}}v_l + t_{kl}\dot v_l + \underline{\dot m_{kl}}r_l + \overset{*}{m}_{kl}\dot r_l)\,\mathrm{d}a -$$
$$\int_v(\dot t_{\underline{kl,k}}v_l + t_{kl,k}\dot v_l + \underline{m}_{kl,k}r_l + \overset{*}{m}_{kl,k}\dot r_l)\,\mathrm{d}v =$$
$$\int_v \rho[(\dot f_l - \ddot v_l)v_l + (f_l - \dot v_l)\dot v_l]\mathrm{d}v + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint_{a_t}\bar p_l^{(n)}v_l\mathrm{d}a +$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint_{a_v}p_l^{(n)}v_l\mathrm{d}a + \int_v \rho[(\dot l_l - \ddot\sigma_l)r_l + (l_l - \dot\sigma_l)\dot r_l]\mathrm{d}v +$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint_{a_m}(c_l^{(n)} + \varepsilon_{lmn}x_m p_n^{(n)})r_l\mathrm{d}a + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint_{a_r}(c_l^{(n)} + \varepsilon_{lmn}x_m p_n^{(n)})r_l\mathrm{d}a, \tag{12a}$$

或

$$\int_v\Big\{[\rho(\dot f_l - \ddot v_l) + \dot t_{\underline{kl,k}}]v_l + [\rho(f_l - \dot v_l) + t_{kl,k}]\dot v_l\Big\}\mathrm{d}v +$$
$$\int_v\Big\{[\rho(\dot l_l - \ddot\sigma_l) + \dot{\overset{*}{m}}_{\underline{kl,k}}]r_l + [\rho(l_l - \dot\sigma_l) + \overset{*}{m}_{kl,k}]\dot r_l\Big\}\mathrm{d}v +$$
$$\oint_{a_t}\Big\{[\dot{\bar p}_l^{(n)} + p_l^{(n)}(v_{p,p} - v_{p,r}n_pn_r)] - n_k\underline{\dot t_{kl}}\Big\}v_l\mathrm{d}a +$$
$$\oint_{a_v}\Big\{p_l^{(n)}[\dot{\bar v}_l - v_l(v_{p,p} - v_{p,r}n_pn_r)] - n_kt_{kl}\dot v_l\Big\}\mathrm{d}a +$$
$$\oint_{a_m}\Big\{[\dot{\bar c}_l^{(n)} + \varepsilon_{lmn}(v_m p_n^{(n)}) + (c_l^{(n)} + \varepsilon_{lmn}x_m p_n^{(n)})\times$$
$$(v_{p,p} - v_{p,r}n_pn_r)] - n_k\underline{\dot{\overset{*}{m}}_{kl}}\Big\}r_l\mathrm{d}a +$$
$$\oint_{a_r}\Big\{(c_l^{(n)} + \varepsilon_{lmn}x_m p_n^{(n)})[\dot{\bar r}_l + r_l(v_{p,p} - v_{p,r}n_pn_r)] - \overset{*}{m}_{kl}\dot r_l\Big\}\mathrm{d}a = 0. \tag{12b}$$

这里我们利用了下列熟悉的关系式:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{d}a) = (v_{p,p} - v_{p,r}n_pn_r)\,\mathrm{d}a. \tag{13}$$

把(5)~(8)代入(12b),即可得到增率型应力和偶应力以及速度和角速度边界条件如下:

$$\dot{\bar p}_l^{(n)} = n_k\dot t_{\underline{kl}} - p_l^{(n)}(v_{p,p} - v_{p,r}n_pn_r) = n_k\dot t_{kl} + t_{kl}((v_{p,k})n_kn_r - v_{p,k})n_p,$$
$$p_l^{(n)} = n_kt_{kl} \qquad \text{在 } a_t \text{ 上}, \tag{14a}$$

和

$$\dot{\bar c}_l^{(n)} = n_k\underline{\dot m_{kl}} - c_l^{(n)}(v_{p,p} - v_{p,r}n_pn_r) = n_k\dot m_{kl} + m_{kl}(v_{p,r}n_kn_r - v_{p,r})n_p,$$
$$c_l^{(n)} = n_km_{kl} \qquad \text{在 } a_m \text{ 上}, \tag{14b}$$

以及

$$\dot{\bar v}_l = \dot v_l(v_{p,p} - v_{p,r}n_pn_r),$$
$$v_l = v_l \qquad \text{在 } a_v \text{ 上}, \tag{15a}$$

和

$$\dot{\bar r}_l = \dot r_l - r_l(v_{p,p} - v_{p,r}n_pn_r),$$
$$r_l = r_l \qquad \text{在 } a_r \text{ 上}. \tag{15b}$$

为方便和完整起见, 我们把上面推导出来的微极连续统的结果用适合所有坐标系的不变性形式汇总如下:

1) 运动方程:

$$\rho(\boldsymbol{f}-\dot{\boldsymbol{v}})+\nabla\cdot\boldsymbol{t}=\boldsymbol{0}\qquad \text{在 } v \text{ 内,}\tag{5}$$

$$\rho(\boldsymbol{l}-\dot{\boldsymbol{\sigma}})+\nabla\cdot\boldsymbol{m}+\boldsymbol{\varepsilon}:\boldsymbol{t}=\boldsymbol{0}\qquad \text{在 } v \text{ 内;}\tag{6}$$

2) 增率型运动方程:

$$\rho(\boldsymbol{f}-\ddot{\boldsymbol{v}})+\underline{\nabla\cdot\boldsymbol{t}}^{\triangleright}=0\qquad \text{在 } v \text{ 内,}\tag{7}$$

$$\rho(\boldsymbol{l}-\ddot{\sigma})+\nabla\cdot\dot{\boldsymbol{m}}+\boldsymbol{\varepsilon}:[\boldsymbol{t}^{\triangleright}+\boldsymbol{t}(\nabla\cdot\boldsymbol{v})]=0\qquad \text{在 } v \text{ 内;}\tag{8}$$

3) 增率型应力和偶应力边界条件:

$$\dot{\bar{\boldsymbol{p}}}^{(n)}=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{t}^{\triangleright}+\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\cdot[\boldsymbol{nn}\cdot(\nabla\boldsymbol{v})-(\nabla\boldsymbol{v})]\cdot\boldsymbol{n}\qquad \text{在 } a_t \text{ 上,}\tag{14a}$$

$$\dot{\bar{\boldsymbol{c}}}^{(n)}=\boldsymbol{n}\cdot\dot{\boldsymbol{m}}+\boldsymbol{m}^{\mathrm{T}}\cdot[\boldsymbol{nn}\cdot(\nabla\boldsymbol{v})-(\nabla\boldsymbol{v})]\cdot\boldsymbol{n}\qquad \text{在 } a_m \text{ 上;}\tag{14b}$$

4) 增率型速度和角速度边界条件:

$$\dot{\bar{\boldsymbol{v}}}=\dot{\boldsymbol{v}}-\boldsymbol{v}[(\nabla\cdot\boldsymbol{v})-\boldsymbol{n}\cdot(\nabla\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{n}]\qquad \text{在 } a_v \text{ 上,}\tag{15a}$$

$$\dot{\bar{\boldsymbol{r}}}=\dot{\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{r}[(\nabla\cdot\boldsymbol{v})-\boldsymbol{n}\cdot(\nabla\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{n}]\qquad \text{在 } a_r \text{ 上;}\tag{15b}$$

5) 增率型能率方程:

$$\rho\ddot{\varepsilon}=\boldsymbol{t}^{\triangleright}:(\nabla\boldsymbol{v})+\boldsymbol{t}^{\triangleright}:(\underline{\nabla\dot{\boldsymbol{v}}})+\dot{\boldsymbol{m}}^{*}:(\nabla\boldsymbol{r})+\boldsymbol{m}^{*}:(\underline{\nabla\dot{\boldsymbol{r}}})\tag{9a}$$

$$=\underline{\boldsymbol{t}}^{\triangleright}:(\nabla\boldsymbol{v})+\boldsymbol{t}:(\nabla\dot{\boldsymbol{v}})+\underline{\dot{\boldsymbol{m}}}^{*}:(\nabla\boldsymbol{r})+\boldsymbol{m}^{*}:(\nabla\dot{\boldsymbol{r}})\qquad \text{在 } v \text{ 内.}\tag{9b}$$

3 非局部微极连续统的增率型运动方程和能率方程

对(3)进行局部化,我们可以立即而且很自然地得到以不变性形式表示的非局部微极连续统的运动方程以及增率型运动方程和能率方程如下:

1) 运动方程:

$$\rho(\boldsymbol{f}-\dot{\boldsymbol{v}})+\nabla\cdot\boldsymbol{t}=-\rho\hat{\boldsymbol{f}},\tag{16}$$

$$\rho(\boldsymbol{l}-\dot{\sigma})+\nabla\cdot\boldsymbol{m}+\boldsymbol{\varepsilon}:\boldsymbol{t}=-\rho\hat{\boldsymbol{l}};\tag{17}$$

2) 增率型运动方程:

$$\rho(\dot{\boldsymbol{f}}-\ddot{\boldsymbol{v}})+\underline{\nabla\cdot\boldsymbol{t}}^{\triangleright}=-\rho\hat{\boldsymbol{f}}^{\triangleright},\tag{18}$$

$$\rho(\dot{\boldsymbol{l}}-\ddot{\sigma})+\underline{\nabla\cdot\dot{\boldsymbol{m}}}+\boldsymbol{\varepsilon}:[\boldsymbol{t}^{\triangleright}-\boldsymbol{t}(\nabla\cdot\boldsymbol{v})]=-\rho(\hat{\boldsymbol{l}}^{\triangleright}-\boldsymbol{x}\times\hat{\boldsymbol{f}}^{\triangleright}-\boldsymbol{v}\times\hat{\boldsymbol{f}});\tag{19}$$

3) 增率型能率方程:

$$\rho\ddot{\varepsilon}=\boldsymbol{t}^{\triangleright}:(\nabla\boldsymbol{v})+\boldsymbol{t}:(\underline{\nabla\dot{\boldsymbol{v}}})+\dot{\boldsymbol{m}}^{*}:(\nabla\boldsymbol{r})+\boldsymbol{m}^{*}:(\underline{\nabla\dot{\boldsymbol{r}}})-$$

$$\rho[\hat{\boldsymbol{f}}\cdot\boldsymbol{v}^{\triangleright}+\hat{\boldsymbol{f}}^{\triangleright}\cdot\boldsymbol{v}+(\hat{\boldsymbol{l}}-\boldsymbol{x}\times\hat{\boldsymbol{f}})\cdot\dot{\boldsymbol{r}}+(\hat{\boldsymbol{l}}^{\triangleright}-\boldsymbol{x}\times\hat{\boldsymbol{f}}^{\triangleright}-\boldsymbol{v}\times\hat{\boldsymbol{f}})\cdot\boldsymbol{r}];\tag{20}$$

4) 非局部剩余的要求条件:

$$\int_v\rho(\hat{\boldsymbol{f}},\hat{\boldsymbol{f}}^{\triangleright},\hat{\boldsymbol{l}},\hat{\boldsymbol{l}}^{\triangleright})\,\mathrm{d}v=0,\tag{21}$$

这里, $\hat{\boldsymbol{f}}$、$\hat{\boldsymbol{f}}^{\triangleright}$、$\hat{\boldsymbol{l}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{l}}^{\triangleright}$ 分别为体力、体力率、体力偶和体力偶率密度非局部剩余.

4 结 语

1) 我们在文献[3]直接推导出的微极连续统的增率型运动方程与应力和偶应力边界条件以及速度和角速度边界条件与本文分别从虚速度和虚角速度原理(1a)以及虚应力和虚偶应力原理(1b)得到的结果相同.

2) 另外,非局部连续统的完整结果(16)~(21)只能通过局部化给出. 这些事实恰好说明本文提出的有关广义连续统的具有交叉项的增率型功率和能率原理是更为普遍的.

3) 类似前面对微极连续统所作的工作那样, 也可提出微态连续统的增率型功率和能率原理并导出所有相应的增率型运动方程、能率方程和边界条件•

4) 这里要着重指出的是本文提出的带有交叉项的增率型功率和能率原理以及推导出的结果都是新的, 而任何不带交叉项的增率型功率和能率原理都不可能是完整的•

致谢 对作者在德国卡塞尔大学力学研究所合作期间 P. Haupt 教授的热情友好接待表示衷心感谢•

[参 考 文 献]

[1] 匡震邦. 非线性连续介质力学基础[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1989.

[2] 戴天民. 广义连续统场论中新的功能及功率能率原理[J]. 应用数学和力学, 2001, **22**(11): 1111—1118.

[3] 戴天民. 极性连续统的增率型运动方程和边界条件[J]. 应用数为和力学, 2000, **21**(3): 221—225.

New Principles of Power and Energy Rate of Incremental Rate Type for Generalized Continuum Field Theories

DAI Tian_min

(Center for the Application of Mathematics and Depertment of Mathematics, Liaoning University, Shenyang 110036, P R China)

Abstract: The aim of this paper is to establish new principles of power and energy rate of incremental type in generalized continuum mechanics. By combining new principles of virtual velocity and virtual angular velocity as well as of virtual stress and virtual couple stress with cross terms of incremental rate type a new principle of power and energy rate of incremental rate type with cross terms for micropolar continuum field theories is presented and from it all corresponding equations of motion and boundary conditions as well as power and energy rate equations of incremental rate type for micropolar and nonlocal micropolar continua with the help of generalized Piola' s theorems in all and without any additional requirement are derived. Complete results for micromorphic continua could be similarly derived. The derived results in the present paper are believed to be new. They could be used to establish corresponding finite element methods of incremental rate type for generalized continuum mechanics.

Key words: generalized continua; incremental rate type; principles of power and energy rate; generalized Piola theorem