 应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2001) 12_1262_05

薄壳小挠度屈曲方程的加权解法

王宗利, 王 熙, 郝文华

(上海交通大学 工程力学系, 上海 200240)

(周承倜推荐)

摘要: 基于薄壳小挠度屈曲方程, 提出了一种求临界载荷解析表达式的加权解法 在复杂边界条件下, 小挠度屈曲方程的解析解仍然是一个难点 以轴对称屈曲问题为例, 从方程中找出临界载荷的影响因素, 加权平均得到临界载荷, 再用特例解确定影响系数 这一方法利用特殊问题的已知解来求一般问题的解析解, 简化了求解过程, 拓宽了解决问题的范围; 其计算结果与利用 Algor 有限元程序得到的数值解一致

关 键 词: 薄壳; 屈曲; 临界载荷; 加权平均
中图分类号: O343 文献标识码: A

引 言

薄壁壳体结构在工程中有很多应用 地下管道、潜水器外壳等受外压的壳体, 除了要考虑在工作压力下的强度设计外, 还要考虑外压下的屈曲失稳问题; 这方面人们已做了大量的实验[1,2]和数值[3]研究, 理论方面目前也已发展到中厚度各向异性材料层合结构屈曲[4]以及塑性屈曲[5]等 理论解可以对屈曲问题的实质进行深入的研究, 但由于数学求解上的困难, 往往只能解决比较简单的问题, 对复杂一些的问题无法求解或者解的形式非常复杂, 如 Fourier 级数[6]或幂级数[7] 由于很多工程应用都是均匀外压下的轴对称结构, 因此轴对称问题[4,5,8,9]仍是目前研究的主要内容 本文以轴对称圆柱壳为例, 分别研究了薄壳在固支和简支边界条件下小挠度屈曲方程的简化解法, 从方程中找出临界载荷的影响因素, 通过数值解确定影响系数, 从而可以利用特殊问题的已知解来求解一般问题

1 引 例

壳体的经典小挠度屈曲理论的基本微分方程为[10]:

$$\frac{D}{h}\nabla^8 w+E k_x^2\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+2E k_x k_y\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+E k_y^2\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-\sigma_x^{(0)}\nabla^4\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)-2\sigma_{xy}^{(0)}\nabla^4\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)-\sigma_y^{(0)}\nabla^4\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=0, \tag{1}$$

其中 $\sigma_x^{(0)}$、$\sigma_{xy}^{(0)}$、$\sigma_y^{(0)}$ 为初始薄膜应力, w 为屈曲挠度, E 为弹性模量, D 为弯曲刚度, h 为壳的厚

收稿日期: 1999_05_17; 修订日期: 1999_11_23
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19972041)
作者简介: 王宗利(1976), 男, 湖北人, 硕士研究生.

度, $_x$、$_y$ 为x、y 方向的曲率

考虑如下问题: 两端固支半径为 R 的圆柱壳受均匀横向外压q 的作用　假定屈曲前处于无矩状态, 且仅有周向应力 $_y^{(0)} = - qR/h$, 屈曲基本微分方程可写为: (坐标系取圆柱壳的轴向为 x, 周向为 y)

$$\frac{D}{h} {}^8 w + \frac{E}{R^2} \frac{{}^4 w}{x^4} + \frac{qR}{h} {}^4 \left(\frac{{}^2 w}{y^2} \right) = 0, \tag{2}$$

边界条件:

$$x = 0, L: w = 0, \frac{w}{x} = 0 \tag{3}$$

假设满足边界条件的屈曲挠度函数为:

$$w = A \left(\cos \frac{2 x}{L} - 1 \right) \sin \frac{ny}{R}, \tag{4}$$

代入方程(2)整理得

$$\left\{ q - \left[\frac{(1+ {}^2)^2}{12(1- {}^2)} + \frac{{}^4}{(1+ {}^2)^2} \right] \frac{Eh^2}{R^2} \right\} \cos \frac{2 x}{L} + \left[q - \frac{Dn^2}{R^3} \right] = 0, \tag{5}$$

其中 $= \frac{2 R}{nL}$, $= \frac{n^2 h}{R}$

上式为关于 x 的函数等式, 令常数项和 $\cos(2 x/L)$ 系数项分别为 0, 可得:

$$q_0 = \frac{Dn^2}{R^3}, \quad q_1 = \left[\frac{(1+ {}^2)^2}{12(1- {}^2)} + \frac{{}^4}{(1+ {}^2)^2} \right] \frac{Eh^2}{R^2} \tag{6}$$

引入权值 , 令原来问题的解为: $q = q_0 + (1-) q_1$, 无量纲化为

$$q = \frac{qR^2}{Eh^2}, \quad q = q_0 + (1-) q_1 \tag{7}$$

要确定其中的 , 可将一组测试或数值计算得到的特例结果(临界载荷 q_{cr} 和周向波数 n) 代入即可求得, 也就是根据特例解来确定一般问题的解　我们利用 Algor 有限元程序的计算结果求得 $= 0\ 6$, 代入得:

$$q = 0\ 6 q_0 + 0\ 4 q_1, \tag{8}$$

由此再求其最小值即为临界载荷 q_{cr}　由于 n 为整数, 对任意具体问题, 只要将 $n = 1, 2, 3,$ 分别代入, q 最小值即为q_{cr}　这样我们就得到了固支边界条件问题的临界载荷　这一结果与 Algor 有限元程序数值解比较如表 1, 可以看出二者接近程度相当好, 且适用范围宽, 至少在 $L/R = 1 \sim 20$ 内都是有效的, 实际上 $L/R = 20$ 已属长壳

由于 q 是 和 的函数, 而 和 则与壳体几何参数R、L、h 有关, 所以q 也是R、L、h 的函数　此外, 从(6) 式可看出, q_0 为无限长壳的临界载荷, 即无边界效应的均匀压缩屈曲临界载荷; q_1 为纵向屈曲半波数为 2 的临界载荷, 这两种因素在本例中都有体现　对无限长壳, 此时有 $= 0$, $q_1 = q_0$, 由(8) 式可得, $q = q_0$, 因此(8) 式覆盖了极限情况

2　加权方法的一般解法

通过以上例子, 可以把这一解法总结如下:

轴对称问题中有 $_{xy}^{(0)} = 0$, 由(1) 式可得轴对称问题屈曲基本微分方程, 即:

$$\frac{D}{h} {}^8 w + E {}_x^2 \frac{{}^4 w}{y^4} + 2E {}_x {}_y \frac{{}^4 w}{x^2 y^2} + E {}_y^2 \frac{{}^4 w}{x^4} - {}_x^{(0)} {}^4 \left(\frac{{}^2 w}{x^2} \right) - {}_y^{(0)} {}^4 \left(\frac{{}^2 w}{y^2} \right) = 0 \tag{9}$$

由于方程中不含有奇次偏导数, 故可用分离变量法, 假设满足给定边界条件的屈曲挠度函数, 其一般形式可写为:

$$w = f(x)\sin\frac{ny}{R} \tag{10}$$

一般情况下 $f(x)$ 很难满足(9) 式这一八阶微分方程　将(10) 代入(9), 整理得到关于 x 的函数等式　令其中的同类项系数分别为零, 得到关于 q 的 $n+1$ 个值 $q_0, q_1, q_2, \quad, q_n$, 引入权值 $_0, \ _1, \ _2, \quad, \ _n\left(\sum_{i=0}^{n} \ _i = 1\right)$　令原来问题的解为:

$$q = \sum_{i=1}^{n} \ _i q_i \tag{11}$$

要确定权值 $_0, \ _1, \ _2, \quad, \ _n$, 可将 n 组测试或数值计算得到的特例问题的结果 q^i_{cr}, n^i 代入加上 $\sum_{i=0}^{n} \ _i = 1$ 的条件, 解关于 $_i = \quad n+1$ 阶线性方程组即可得到 $_i$　由于 n 为整数, 对任意具体问题, 只要将 $n = 1, 2, 3, \quad$ 分别代入, q 最小值即为 q_{cr}

讨论

1　式(10) 中的 $q_0, q_1, q_2, \quad, q_n$ 可以看作屈曲临界载荷的影响因素　这些因素在屈曲中都有体现, 其比重大小由 $_i$ 决定; 理论上, 从长壳到短壳 $_i$ 应取不同的值, 但从引例及后面的算例可以看出, 由若干特例算得的 $_i$ 在相当宽的范围内都是适用的

2　在假设 $f(x)$ 时, 一般来说边界条件应首先满足　进一步也可以考虑载荷的因素　比如可以借用材料力学中梁的弯曲挠度函数作为 $f(x)$　这样做有一定的合理性, 因为屈曲以后, 壳上每一点在径向的移动更自由了, 也就是说, 在纵剖面上, 壳的变形接近于梁的变形　不过复杂载荷下, 壳的前屈曲将不能再当作无矩状态, 小挠度屈曲方程不再适用, 上述解法误差可能会增加, 这些可以作进一步的研究

3　对非轴对称的一般问题, 上述解法也有参考意义, 不过屈曲挠度函数要假设为一般形式的 $f(x, y)$, 求解过程一样, 结果将复杂一些

3　算　　例

前面作为引例我们已经计算固支边界条件下圆柱壳的临界载荷, 作为对上述方法应用的拓宽, 下面再来求简支边界条件的临界载荷

基本方程同式(2), 简支边界条件为:

$$x = 0, L: \ w = 0, \ \frac{^2 w}{x^2} = 0$$

假设满足简支边界条件的屈曲挠度函数为:

$$w = \left(c_1\sin\frac{x}{L} + c_2\sin\frac{2 \ x}{L} + c_3\sin\frac{3 \ x}{L}\right)\sin\frac{ny}{R}, \tag{12}$$

代入方程(9) 可解出 q_1, q_2, q_3 都是　和　的函数($= \quad R/nL, \quad = n^2h/R$)

且　　$q_1 = q_g(\ , \ ), \ q_2 = q_g(2 \ , \ ), \ q_3 = q_g(3 \ , \ ),$

其中　　$q_g(\ , \ ) = \dfrac{(1+ \ ^2)^2}{12(1- \ ^2)} + \dfrac{^4}{(1+ \ ^2)^2}$

以下步骤同前面一样　结果列于表 2 中, 可见比文献[10] 中的结果 $q = (1+ \ ^2)^2 \ /12(1 - \ ^2) + \ ^4/(1+ \ ^2)^2$　更接近数值解

表 1 固支边界数值解与加权解比较

L/R	数值解 q_{cr}	加权解 q_{cr}	误差 $E/(\%)$
20	0 017 34	0 016 60	- 4 2
10	0 037 15	0 036 58	- 1 5
5	0 059 92	0 063 46	5 6
2	0 150 80	0 160 20	6 3
1	0 365 80	0 387 40	7 1

表 2 简支边界加权解、文献解与数值解比较

L/R	数值解 q_{cr}	文献[10] 解 q_{cr}	误差 $E/(\%)$	加权解 q_{cr}	误差 $E/(\%)$
20	0 016 32	0 015 28	- 6 4	0 016 36	0 3
10	0 030 96	0 019 25	- 38	0 030 96	0 0
5	0 051 56	0 041 36	- 20	0 054 00	4 8
2	0 137 46	0 107 30	- 22	0 137 46	0 0
1	0 291 96	0 249 30	- 14	0 328 65	12

注: 以上数值解的圆柱壳模型计算参数为: 半径 $R =$ 68 mm, 厚度 $h =$ 2 7 mm, 弹性模量 $E =$ 70 GPa 是利用 Algor 有限元程序计算的

4 结 语

本文讨论的小挠度屈曲方程的加权解法的基本思想就是从基本微分方程中寻求临界载荷的影响因素, 将这些影响因素加权平均作为临界载荷, 再利用若干特例解, 确定权值 这种方法利用特殊的简单问题的解来求解一般的复杂问题, 简化了求解过程, 拓宽了解决问题的范围; 并且分别将引例中固支边界条件问题与算例中简支边界条件问题的计算结果与利用 Algor 有限元程序数值解相比得到较好的一致性, 从而可以说明本文提出的方法是可靠的, 并具有一般性, 可为薄壳结构临界载荷的求解提供一种有效的参考方法

[参 考 文 献]

[1] Singer Josef. Experimental studies in shell buckling[A]. In: Proceedings of the 1997 38th AIAA Structures, Structural Dynamics & Materials Conference[C]. 1997, **3**: 1922 1932.

[2] Raisuddin Khan. New approach to instability testing of shells[J]. Int J Pressure Vissels and Piping, 1998, **75**(1): 75 80.

[3] Hauch Soren. Use of finite element analysis for local buckling design of pipelines[A]. In: Proceedings of the International Conference on OMAE[C]. 5_9, July, 1998, 9.

[4] Simitses G J. Buckling of moderately thick laminated cylindrical shells: a review[J]. Composites Part B: Engineering, 1996, **27**(6): 581 587.

[5] Ross C T F. Plastic axisymmetric collapse of thin_walled circular cylinders and cones under uniform external pressure[J]. Thin_Walled Structures, 1998, **30**(1_4): 35 54.

[6] Al_Hassani S T S. Analytical study of buckling of composite tubes with various boundary condition [J]. Composite Structures, 1997, **39**(1_2): 157 164.

[7] TONG Li_yong. Simple solutions for buckling of laminated conical shells[J]. Int J Mechanical Sciences, 1992, **34**(2): 93 111.
[8] Ross Carl T F. Instability of circumferentially corrugated cylinders under uniform external press[A]. In: ASME Petroleum Division PD Proceedings of the 1996 3rd Joint Conference on Engineering Systems Design and Analysis[C]. 1996, **81**(9): 249 255.
[9] Filippov S B. Buckling of joined cylindrical shells under uniform external pressure[J]. Prikladnaya Matematika Mekhanika, 1995, **59**(1): 140 148.
[10] 吴连元. 板壳稳定性理论[M]. 上海: 华中理工大学出版社, 1996.

Weighted Solution of Small_Deflection Buckling Equation of Thin Shell

WANG Zong_li, WANG Xi, HAO Wen_hua
(Department of Engineering Mechanics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, P R China)

Abstract: Based on small_deflection buckling equation, a weighted solution for critical load is presented. Usually, it is very difficult to solve the equation for general problems, especially those with complicated boundary conditions. Axisymmetric problem was studied as an example. Influencing factors were found from the equation and averaged as the buckling load by introducing weights. To determine those weights, some special known results were applied. This method solves general complicated problems by using the solutions of special simple problems, simplifies the solving procedure and expands the scope of solvable problem. Compared with numerical solution, it also has fine precision.

Key words: shell; buckling; critical load; weighted average