应用数学和力学,第 22 卷 第 12 期(2001 年 12 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2001) 12_1324_05

一类四阶 p_Laplace 方程正解的存在性及多解性*

白占兵

(石油大学(华东) 应用数学系, 山东 东营 257061)

(林宗池推荐)

摘要: 讨论了如下形式一维四阶 p_Laplace 方程的可解性

$$\begin{cases}(g(u''))'' + \lambda a(t)f(u) = 0 & 0 < t < 1,\\ u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0,\end{cases}$$

这里, $g(v) := |v|^{p-2}v,\ p > 1$• 用锥拉伸与锥压缩不动点定理, 根据非线性项 f 在 0 及无穷远处的不同增长情况, 获得了一些正解的存在性及多解性结果•

关 键 词: p_Laplacian; 正解; 锥

中图分类号: O175.8 文献标识码: A

引 言

p_Laplace 方程在气体通过多孔媒质的扩散及化学活性混合气体的自燃理论等许多方面有广泛的应用(参见文[1]及其文献索引)• 最近, 王俊禹(文[1])研究了如下边值问题

$$\begin{cases}(g(u'))' + a(t)f(u) = 0 & 0 < t < 1,\\ u(0) = 0,\ u(1) = 0,\end{cases} \tag{1}$$

这里, $g(v) := |v|^{p-2}v,\ p > 1$• 用锥拉押与锥压缩定理证明了上述问题有一个正解, 若

$$f_0 = 0,\ f_\infty = +\infty, \text{ 或 } f_0 = +\infty,\ f_\infty = 0,$$

这里 $f_0 := \lim\limits_{u \downarrow 0} \dfrac{f(u)}{u^{p-1}},\ f_\infty := \lim\limits_{u \uparrow +\infty} \dfrac{f(u)}{u^{p-1}}$•

马如云(文[2])证明了上述条件下如下梁方程正解的存在性•

$$\begin{cases}u^{(4)} + a(t)f(u) = 0,\\ u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0•\end{cases} \tag{2}$$

本文中我们在如下假设下

$$f_0 = f_\infty = +\infty, \text{ 或 } f_\infty = f_0 = 0$$

讨论了如下问题的可解性:

$$\begin{cases}(g(u''))'' + \lambda a(t)f(u) = 0 & 0 < t < 1,\\ u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0,\end{cases} \tag{3}$$

* 收稿日期: 1998_10_05; 修订日期: 2001_06_26
作者简介: 白占兵(1971—), 男, 甘肃高台人, 讲师, 硕士, 主要研究方向为非线性泛函分析与非线性微分方程.

这里，$g(v):=|v|^{p-2}v,\ p>1$。显然当 $p=2$ 时即为梁方程问题。

1　预备引理

引理 1[3]　令 B 是一 Banach 空间，$P\subset B$ 是 B 中的锥，假设 Ω_1、Ω_2 是 B 中的子集且 $0\in\Omega_1,\ \overline{\Omega}_1\subset\Omega_2$，令 $\mathrm{T}:P\cap(\overline{\Omega}_2\setminus\Omega_1)\to P$ 是全连续算子满足：

1) $\|\mathrm{T}u\|\leqslant\|u\|,\ u\in P\cap\partial\Omega_1$；且 $\|\mathrm{T}u\|\geqslant\|u\|,\ u\in P\cap\partial\Omega_2$，

或

2) $\|\mathrm{T}u\|\geqslant\|u\|,\ u\in P\cap\partial\Omega_1$；且 $\|\mathrm{T}u\|\leqslant\|u\|,\ u\in P\cap\partial\Omega_2$，

则 T 在 $P\cap(\overline{\Omega}_2\setminus\Omega_1)$ 内有一不动点。

为了应用引理 1，我们定义锥 P 为

$$P:=\left\{u\in C[0,1];\ u(0)=u(1)=0,\ u(t)\ \text{是非负凸函数}\right\}.$$

如下引理是我们所熟知的：

引理 2　令 $u\in P,\ \delta\in(0,1/2)$，则 $u(t)\geqslant\delta\|u\|,\ t\in[\delta,1-\delta]$。这里 $\|u\|=\sup\left\{|u(t)|,0\leqslant t\leqslant 1\right\}$。

2　主要结果

本文中我们总假定：

(H1) $f(u)$ 在 $[0,+\infty)$ 上非负连续；

(H2) $a(t)$ 在 $(0,1)$ 上非负连续且满足

$$\int_0^{1/2}\int_s^{1/2}G\left(\int_0^r\int_R^{1/2}a(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}R\right)\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s+\int_{1/2}^1\int_{1/2}^s G\left(\int_r^1\int_{1/2}^R a(t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}R\right)\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s<+\infty,$$

这里 $G(w):=|w|^{1/(p-1)}\mathrm{sgn}(w)$ 是 $g(v)$ 的反函数。

则当 $\delta\in(0,1/2)$ 时函数

$$y(x):=\int_\delta^x\int_s^x G\left(\int_0^r\int_R^x a(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}R\right)\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s+\int_x^{1-\delta}\int_x^s G\left(\int_r^1\int_x^R a(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}R\right)\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s$$

在 $[\delta,1-\delta]$ 连续、正。

现在我们定义算子 $\Phi:P\to P$

$$W(t)=(\Phi u)(t):=\begin{cases}\displaystyle\int_0^t\int_s^\sigma G\left(\lambda\int_0^r\int_R^\sigma a(x)f(u(x))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}R\right)\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s & 0\leqslant t\leqslant\sigma,\\ \displaystyle\int_t^1\int_\sigma^s G\left(\lambda\int_r^1\int_\sigma^R a(x)f(u(x))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}R\right)\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s & \sigma\leqslant t\leqslant 1,\end{cases}$$

σ 是下述方程的解

$$\int_0^x\int_s^x G\left(\int_0^r\int_R^x a(y)f(u(y))\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}R\right)\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s=\int_x^1\int_x^s G\left(\int_r^1\int_x^R a(y)f(u(y))\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}R\right)\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s,$$

由单调性可知 $\sigma\in(0,1)$ 存在且唯一。

容易验证 $\Phi:P\to P$ 是全连续算子，$W(\sigma)$ 是 W 在 $[0,1]$ 上的最大值，因为

$$W'(\sigma)=0.$$

$$W''(t)=\begin{cases}-G\left(\int_0^t\int_R^\sigma \lambda a(r)f(u(r))\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}R\right)\leqslant 0 & 0<t\leqslant\sigma,\\ -G\left(\int_t^1\int_\sigma^R \lambda a(r)f(u(r))\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}R\right)\leqslant 0 & \sigma\leqslant t<1.\end{cases}$$

现在记

$$M=\min\left\{y(x);\ \delta\leqslant x\leqslant 1-\delta\right\},\quad N=G\left(\int_0^1\int_s^1 a(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s\right).$$

定理 1　设(H1)、(H2)成立，给定 $\lambda>0$，若存在两个不同的正常数 h、k 及 $\delta\in(0,1/2)$ 使得

$$(\mathrm{A1})\quad f(u)\leqslant\frac{1}{\lambda}\left(\frac{h}{N}\right)^{p-1}\qquad 0\leqslant u\leqslant h,$$

$$(\mathrm{A2})\quad f(u)\geqslant\frac{1}{\lambda}\left(\frac{2k}{M}\right)^{p-1}\qquad \delta k\leqslant u\leqslant k,$$

则边值问题(3)有一个正解 u 满足 $\|u\|$ 介于 h, k 之间.

证明　不失一般性，我们假设 $h<k$，考察如前定义的积分算子 Φ

$$W(t)=(\Phi u)(t):=\begin{cases}\int_0^t\int_s^\sigma G\left(\lambda\int_0^r\int_R^\sigma a(x)f(u(x))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}R\right)\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s & 0\leqslant t\leqslant\sigma,\\ \int_t^1\int_\sigma^s G\left(\lambda\int_r^1\int_\sigma^R a(x)f(u(x))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}R\right)\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s & \sigma\leqslant t\leqslant 1,\end{cases}$$

我们已知 Φ 的不动点即(3)的解. 现在为完成证明，分以下两步进行.

第一步，令 $\Omega_1=\left\{u\in P\mid \|u\|<h\right\}$，对 $u\in\partial\Omega_1$，由(A1)

$$\|\Phi u\|=\|W\|=W(\sigma)\leqslant G\left(\int_0^1\int_s^1\lambda a(r)f(u(r))\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s\right)\leqslant h=\|u\|$$

即，对 $u\in\partial\Omega_1$，$\|\Phi u\|\leqslant\|u\|$.

第二步，令 $\Omega_2=\left\{u\in P\mid\|u\|<k\right\}$，则对 $u\in\partial\Omega_2$ 有 $\delta k\leqslant u(t)\leqslant k$，$t\in[\delta,1-\delta]$，于是由条件(A2)

$$\begin{aligned}\|\Phi u\|=\|W\|\geqslant&\frac{1}{2}\Big[\int_0^\sigma\int_s^\sigma G\left(\lambda\int_0^r\int_R^\sigma a(x)f(u(x))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}R\right)\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s+\\&\int_\sigma^1\int_\sigma^s G\left(\lambda\int_r^1\int_\sigma^R a(x)f(u(x))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}R\right)\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s\Big]\geqslant\\&\frac{1}{2}\Big[\int_\delta^\sigma\int_s^\sigma G\left(\lambda\int_\delta^r\int_R^\sigma a(x)f(u(x))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}R\right)\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s+\\&\int_\sigma^{1-\delta}\int_\sigma^s G\left(\lambda\int_r^{1-\delta}\int_\sigma^R a(x)f(u(x))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}R\right)\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s\Big]\geqslant\\&\frac{1}{2}\frac{2k}{M}y(\sigma)\geqslant k=\|u\|\qquad 若\ \delta<\sigma<1-\delta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|W\|\geqslant&\int_0^{1-\delta}\int_s^{1-\delta}G\left(\lambda\int_0^r\int_R^{1-\delta}a(x)f(u(x))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}R\right)\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s\geqslant\\&\int_\delta^{1-\delta}\int_s^{1-\delta}G\left(\lambda\int_\delta^r\int_R^{1-\delta}a(x)f(u(x))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}R\right)\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s\geqslant 2k>k=\|u\|\end{aligned}$$

若 $\sigma\geqslant 1-\delta$,

$$\|W\|\geqslant\int_\delta^1\int_\delta^s G\left(\lambda\int_r^1\int_\delta^R a(x)f(u(x))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}R\right)\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s\geqslant$$

$$\int_{\delta}^{1-\delta}\int_{\delta}^{s} G\left(\lambda \int_{r}^{1-\delta}\int_{\delta}^{R} a(x) f(u(x))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}R\right)\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s \geqslant 2k > k = \|u\| \qquad \text{若 } \sigma \leqslant \delta,$$

此即, 当 $u \in \partial\Omega_2$ 时 $\|\Phi u\| \geqslant \|u\|$• 于是, 根据引理 1 的第一部分知定理成立•

推论 1 若(H1)、(H2) 成立, 且 $f_\infty = f_0 = +\infty$, 则存在 $\lambda^* > 0$, 使对任意的 $\lambda \in (0, \lambda^*)$ 问题(3) 有两个正解•

证明 令 $\lambda^* = \sup\limits_{h^* > 0}[1/B(h^*)]$, 这里 $B(h^*) := [h^*/N]^{1-p} \cdot \sup\limits_{0 \leqslant u \leqslant h^*} f(u)$, 对 $\lambda \in (0, \lambda^*)$, 存在 $h > 0$ 使得 $\lambda \leqslant 1/B(h)$ 即 $B(h)\lambda \leqslant 1$ 也即

$$f(u) \leqslant \frac{1}{\lambda}\left(\frac{h}{N}\right)^{p-1} \qquad 0 \leqslant u \leqslant h,$$

这满足定理 1 的假设(A1)•

另一方面, 因 $f_\infty = f_0 = +\infty$, 存在 $k_1, k_2 > 0$, $k_1 > h > k_2$ 使得

$$\frac{f(u)}{u^{p-1}} \geqslant \frac{1}{\lambda}\left(\frac{2}{M}\right)^{p-1} \qquad u \in [\delta k_1, k_1] \subseteq [\delta k_1, +\infty),$$

$$\frac{f(u)}{u^{p-1}} \geqslant \frac{1}{\lambda}\left(\frac{2}{M}\right)^{p-1} \qquad u \in [\delta k_2, k_2] \subseteq (0, k_2],$$

则 k_1, k_2 分别满足定理 1 的假设 (A1)• 由定理 1, 问题(3) 有两个正解•

推论 2 若(H1)、(H2) 成立且 $f_\infty = f_0 = 0$, 则存在 $\tilde{\lambda} > 0$, 使对任意的 $\lambda \in (\tilde{\lambda}, +\infty)$, 边值问题(3) 有两个正解•

证明 令 $\tilde{\lambda} = \inf\limits_{\tilde{k} > 0}[\tilde{k}^{(p-1)}/A(\tilde{k})]$, 其中 $A(\tilde{k}) := (2/M)^{1-p} \cdot \inf\limits_{\delta\tilde{k} \leqslant u \leqslant \tilde{k}} f(u)$, 因 $\lambda > \tilde{k}$ 所以存在 k 使得

$$\lambda > \frac{k^{p-1}}{A(k)},\ \text{即}\ f(u) > \frac{1}{\lambda}\left(\frac{2k}{M}\right)^{p-1} \qquad u \in [\delta k, k],$$

这满足定理 1 假设(A2)•

另一方面, 由 $f_\infty = f_0 = 0$, 结合 f 的连续性知存在 $h_1, h_2 > 0$, $h_1 < k < h_2$ 使得

$$\frac{f(u)}{h_1^{p-1}} \leqslant \frac{1}{\lambda} N^{1-p} \qquad u \in [0, h_1],$$

$$\frac{f(u)}{h_2^{p-1}} \leqslant \frac{1}{\lambda} N^{1-p} \qquad u \in [0, h_2],$$

(我们可以这样做是因为若令 $f^*(u) = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant u} f(t)$, 则 $f_\infty = 0 \Leftrightarrow f^*_\infty = 0$)
则 h_1、h_2 分别满足定理 1 的假设(A1), 由定理 1 即知此推论成立•

由推论 1, 2 的证明我们容易推得类似文[2] 的结论:

推论 3 假设(H1)、(H2) 成立, 若 $f_\infty = \infty$, $f_0 = 0$ 或 $f_\infty = 0$, $f_0 = \infty$ 则对任意的 $\lambda \in (0, +\infty)$, (3) 有一个正解•

最后我们指出, 对如下边值条件

$$u(0) = u'(1) = u''(0) = u'''(1) = 0$$

只要取锥 P_1 为

$$P_1 := \left\{u \in C[0, 1];\ u(0) = u'(1) = 0,\ u(t)\ \text{是非负凸函数}\right\},$$

则相应的存在性结果是容易得到的•

[参 考 文 献]

[1] WANG Jun_yu. The existence of positive solutions for the one_dimensional p_Laplacian[J]. Proc Amer Math Soc, 1997, **125**(8): 2275—2283.

[2] Ma R Y, Wang H Y. On the existence of positive solutions of fourth_order ordinary differential equations[J]. Applicable Analysis, 1995, **59**(1): 225—231.

[3] Krasnoselskii M A. Positive Solutions of Operator Equations[M]. Gronignen: Noordhoff, 1964.

[4] Lian W C, Wong F H, Yeh C C. On the existence of positive solutions of nonlinear second order differential equations[J]. Proc Amer Math Soc, 1996, **124**(4): 1117—1126.

Existence and Multiplicity of Positive Solutions for a Fourth_Order p_Laplace Equations

BAI Zhan_bing

(Department of Applied Mathematics, Petroleum University (East China), Dongying, Shandong 257061, P R China)

Abstract: The solvability of one_dimensional fourth_order p_Laplace equations of the type

$$\begin{cases} (g(u''))'' + \lambda a(t)f(u) = 0 & 0 < t < 1, \\ u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0, \end{cases}$$

where, $g(v) := |v|^{p-2}v$, $p > 1$ is investigated. With cone compression/extension theorem, some existence and multiplicity results of positive solution have been required according to different growth condition of nonlinear form f at zero and at infinity.

Key words: p_Laplacian; positive solution; cone