应用数学和力学, 第 22 卷 第 11 期( 2001 年 11 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2001) 11_1111_08

# 广义连续统场论中新的功能及功率能率原理

戴天民

( 辽宁大学 数学应用中心和数学系, 沈阳 110036)

( 我刊编委戴天民来稿)

摘要: 提出极性和非局部极性连续统场论中具有交叉项的新的功能及功率能率原理, 并据此和广义的Piola定理一次性地而且无需其它要求地推导出所有相应的运动方程和边界条件以及新的能量和能率均衡方程 同时, 建立起广义连续统力学中的新的能量和能率均衡原理 给出的新的功能及能率原理纠正了现有文献中所有有关不带交叉项的能量和能率原理的不完整性

关 键 词: 功能及功率能率原理; 广义的 Piola 定理; 能量和能率均衡方程; 广义连续统场论

中图分类号: 033 文献标识码: A

## 引 言

1999 年是 E. 和 F. Cosserat 的专著 Theorie des Corps Deformable [1] 发表 90 周年 它是广义连续统场论的开山之作, 而且至今仍然是一部具有指导意义的重要文献 然而这部专著却因理论超前而几乎被埋没了半个世纪 直到 1958 年 Ericksen 和 Truesdell[2] 及 Guenther[3] 的论文发表后, 广义连续统的各种理论才在世界各国发展起来 到目前为止, 已发表了大量的有关广义连续统场论的论文和许多优秀的专著, 例如, Kr ner[4], Edelen[5], Stojanovic[6], Eringen[7], Kunin[8], Nowacki[9], Cialetta 和 Iesan[10] 等的专著

在现有广义连续统场论的文献中的有关功能原理都是不带交叉项的, 它们都是不完整的 在微极连续统力学中有利用运动方程从功能原理推导能量均衡方程的( 例如[7]) , 在微态连续统力学中有使全局能量均衡定律服从在任意常值速度平移和角速度转动下的不变性要求来推导运动方程和能量方程的( 例如[11]) ; 但这两种方法并不一定是必要的 在文献中还有一些能量均衡方程, 但它们也都是不完整的 鉴于上述情况, 我们应当重视广义连续统场论中这些重要基础理论问题的再研究工作

本文的目的有三:

收稿日期: 2000_05_28; 修订日期: 2000_10_20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目( 19672023) ; 国家自然科学基金委员会( 10011130235) 德意志研究联合会( 51520001) 资助的国际合作项目; 辽宁省教委(A 类) 科研项目( 990111001)

作者简介: 戴天民( 1931 ) , 男, 满族, 辽宁开原人, 博士, 教授, 博士生导师, 已发表专著 12 部, 论文 50 余篇.

1) 建立广义连续统场论中具有交叉项的新的功能及功率能率原理;

2) 推广经典连续统力学的 Piola 定理到广义连续统场认中去, 并借助于这类广义 Piola 定理即可从新的功能及功率能率原理一次性的而且无需其它要求地推导出所有运动方程, 边界条件以及能量和能率均衡方程;

3) 论证维持现有运动方程组的条件下本文所提出的广义连续统场论中新的的能量和能率均衡方程的完整性

为简单起见, 我们假定质量和微惯性守恒定律成立, 并且略去质量和微惯性的非局部剩余 为方便起见, 在推导过程中使用分量记法, 而对最后结果则以适用于任意坐标系的不变性形式来表示 为便于比较, 除另作说明外, 本文采用 Eringen 在文献[7, 11]中用过的符号和记法

# 1 新的广义连续统场论的功率和能率原理

## 1 1 微极连续统

令 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{r}$ 以及 $\boldsymbol{p}^{(n)}$ 和 $\boldsymbol{c}^{(n)}$ 分别为虚速度和虚角速度以及虚应力和虚偶应力 另外, 令

$$\boldsymbol{v} = 0 \quad 或 \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v},$$
$$\boldsymbol{r} = 0 \quad 或 \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r} \quad (在\ a_R(率边界)上) \tag{1a}$$

以及

$$\boldsymbol{p}^{(n)} = 0 \quad 或 \quad \boldsymbol{n} \quad \boldsymbol{t} = \boldsymbol{p}^{(n)},$$
$$\boldsymbol{c}^{(n)} = 0 \quad 或 \quad \boldsymbol{n} \quad \boldsymbol{m} = \boldsymbol{c}^{(n)} \quad (在\ a_F(力边界)上) \tag{1b}$$

现在我们公设新的虚速度和虚角速度以及虚应力和虚偶应力原理如下:

$$\int_v (\quad)^p \mathrm{d}v = \int_v (\boldsymbol{f} - \boldsymbol{v}) \quad \boldsymbol{v}\mathrm{d}v + \int_{a_F} \boldsymbol{p}^{(n)} \quad \boldsymbol{v}\mathrm{d}a + \int_v [(1 - \quad) +$$
$$\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{f} - \boldsymbol{v})] \quad \boldsymbol{r}\mathrm{d}v + \int_{a_F} (\boldsymbol{c}^{(n)} + \boldsymbol{x} \quad \boldsymbol{p}^{(n)}) \quad \boldsymbol{r}\mathrm{d}a \tag{2a}$$

以及

$$\int_v (\quad)^c \mathrm{d}v = \int_v (\boldsymbol{f} - \boldsymbol{v}) \quad \boldsymbol{v}\mathrm{d}v + \int_{a_R} \boldsymbol{p}^{(n)} \quad \boldsymbol{v}\mathrm{d}a + \int_v [(1 - \quad)] +$$
$$\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{f} - \boldsymbol{v})] \quad \boldsymbol{r}\mathrm{d}v + \int_{a_R} (\boldsymbol{c}^{(n)} + \boldsymbol{x} \quad \boldsymbol{p}^{(n)}) \quad \boldsymbol{r}\mathrm{d}a, \tag{2b}$$

这里$(\quad)^p$ 和$(\quad)^c$ 表示势能率和余能率, 而$\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{v}$ 和 则分别为体力密度, 体力偶密度, 速度和自旋张量 把(2a) 和(2b) 组合起来, 则得下列具有交叉项的新的微极连续统的功率能率原理:

$$\int_v (\quad)\mathrm{d}v = \int_v (\boldsymbol{f} - \boldsymbol{v}) \quad \boldsymbol{v}\mathrm{d}v + \int_a \boldsymbol{p}^{(n)} \quad \boldsymbol{v}\mathrm{d}a + \int_v [(1 - \quad) +$$
$$\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{f} - \boldsymbol{v})] \quad \boldsymbol{r}\mathrm{d}v + \int_a (\boldsymbol{c}^{(n)} + \boldsymbol{x} \quad \boldsymbol{p}^{(n)}) \quad \boldsymbol{r}\mathrm{d}a, \tag{3}$$

这里等号右边的第 4 项和第 6 项是交叉项

考虑到

$$\int \boldsymbol{p}^{(n)} \boldsymbol{v}\mathrm{d}a + \int_a n_k(\boldsymbol{p}_k \quad \boldsymbol{v})\mathrm{d}a = \int_a n_k(t_{kl} v_l)\mathrm{d}a =$$

$$ {}_v(t_{kl}v_l)_{,k}\mathrm{d}v = {}_v(t_{kl,k}v_l + t_{kl}v_{l,k})\mathrm{d}v, \tag{4}$$

$$ {}_a(\boldsymbol{c}^{(n)} + \boldsymbol{x} \quad \boldsymbol{p}^{(n)}) \quad \boldsymbol{r}\,\mathrm{d}a = {}_v[(m_{kl} - t_{kn}x_m \ {}_{nml})r_l]_{,k}\mathrm{d}v = $$

$$ {}_v\Big\{[m_{kl,k} - (t_{mn} + t_{kn,k}x_m) \ {}_{nml}]r_l + $$

$$ (m_{kl} - t_{kn}x_m \ {}_{nml})r_{l,k}\Big\}\mathrm{d}v \tag{5}$$

并把(4)和(5)代入(3),则得

$$ {}_v(\quad)\mathrm{d}v = {}_v[\ (f_1 - v_l) + t_{kl,k}]v_l\mathrm{d}v + $$

$$ {}_v\Big\{[\ (l_l - \ {}_l) + m_{kl,k} + \ {}_{lmn}t_{mn}] + \ {}_{lmn}x_m[\ (f_n - v_n) + t_{kn,k}]\Big\}r_l\mathrm{d}v + $$

$$ {}_v[t_{kl}v_{l,k} + (m_{kl} - t_{kn}x_m \ {}_{mnl})r_{l,k}]\mathrm{d}v, \tag{6}$$

这里 $= {}^p + {}^c$, $t_{kl}$, $m_{kl}$ 和 ${}_{lmn}$ 分别为能率密度,应力张量,偶应力张量和置换张量

类似Stojanovic在[12]中对有向连续统所作那样,把经典连续统力学中的Piola原理推广到微极连续统力学,则有下列微极连续统力学的广义Piola原理:

如果分别有

$$ v_l = \text{const} \qquad 和 \qquad r_l = 0 \tag{7a}$$

及

$$ r_l = \text{const} \qquad 和 \qquad v_l = 0, \tag{7b}$$

则新的功率能率原理(3)等价于动量及动量矩均衡定律 于是,借助于广义Piola原理即可从(6)很自然而且一次性地推导出下列微极连续统力学的动量,动量矩和能率均衡等方程:

$$ t_{kl,k} + \ (f_l - v) = 0, \tag{8a}$$

$$ m_{kl,k} + \ {}_{lmn}t_{mn} + \ (l_l - \ ) = 0, \tag{9b}$$

$$ = t_{kl}v_{l,k} + m^*_{kl}r_{l,k}; \tag{10a}$$

$$ (\quad)^p = t_{kl}\ v_{kl} + m^*_{kl}\ r_{l,k}, \tag{11a}$$

$$ (\quad)^c = v_{l,k}\ t_{kl} + r^*_{l,k}\ m^*_{l,k}, \tag{12a}$$

$$ m^*_{kl} = m_{kl} - t_{kn}x_m \ {}_{nml}; \tag{13a}$$

或

$$ \boldsymbol{t} + \ (\boldsymbol{f} - \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}, \tag{8b}$$

$$ \boldsymbol{m} + \ :\boldsymbol{t} + \ (1 - \ ) = \boldsymbol{0}, \tag{9b}$$

$$ = \boldsymbol{t}:(\ \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{m}^*:(\ \boldsymbol{r}); \tag{10b}$$

$$ (\quad)^p = \boldsymbol{t}:(\ \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{m}^*:(\ \boldsymbol{r}), \tag{11b}$$

$$ (\quad)^c = \ \boldsymbol{t}:(\ \boldsymbol{v}) + \ \boldsymbol{m}^*:(\ \boldsymbol{r}), \tag{12b}$$

$$ \boldsymbol{m}^* = \boldsymbol{m} - (\boldsymbol{tx}): \ = \boldsymbol{m} - (\boldsymbol{t} \quad \boldsymbol{x}) \tag{13b}$$

从(10)我们可得下列关系式:

$$ (\quad)/\ t_{kl} = v_{l,k}, \qquad (\quad)/\ m^*_{kl} = r_{l,k}; \tag{14a}$$

$$ (\quad)/\ v_{l,k} = t_{kl}, \qquad (\quad)/\ r_{l,k} = m^*_{kl}; \tag{15a}$$

或

$$ (\quad)/\ \boldsymbol{t} = \ \boldsymbol{v}, \qquad (\quad)/\ \boldsymbol{m}^* = \ \boldsymbol{r}; \tag{14b}$$

$$(\quad)/(\quad \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{t}, \qquad (\quad)/(\quad \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{m}^{*} \tag{15b}$$

把(11b), (12b)和下列关系式

$$_{v}\boldsymbol{t}:(\quad\boldsymbol{v})\mathrm{d}v = \ _{a_F}\boldsymbol{n}\quad\boldsymbol{t}\quad\boldsymbol{v}\mathrm{d}a - \ _{v}(\quad\boldsymbol{t})\quad\boldsymbol{v}\mathrm{d}v, \tag{16a}$$

$$_{v}\boldsymbol{m}^{*}:(\quad\boldsymbol{v})\mathrm{d}v = \ _{a_F}\boldsymbol{n}\quad\boldsymbol{m}^{*}\quad\boldsymbol{r}\mathrm{d}a - \ _{v}(\quad\boldsymbol{m}^{*})\quad\boldsymbol{r}\mathrm{d}v, \tag{16b}$$

$$_{v}\boldsymbol{t}:(\quad\boldsymbol{v})\mathrm{d}v = \ _{a_D}(\boldsymbol{n}\quad\boldsymbol{t})\quad\boldsymbol{v}\mathrm{d}a - \ _{v}(\quad\boldsymbol{t})\quad\boldsymbol{v}\mathrm{d}v, \tag{17a}$$

$$_{v}\boldsymbol{m}^{*}:(\quad\boldsymbol{r})\mathrm{d}v = \ _{a_D}(\boldsymbol{n}\quad\boldsymbol{m}^{*})\quad\boldsymbol{r}\mathrm{d}a - \ _{v}(\quad\boldsymbol{m}^{*})\quad\boldsymbol{r}\mathrm{d}v, \tag{17b}$$

代入(2a)和(2b)即可得到下列应力和偶应力以及速度和角速度的边界条件如下:

$$\boldsymbol{n}\quad\boldsymbol{t} = \boldsymbol{p}^{(n)}, \ \boldsymbol{n}\quad\boldsymbol{m} = \boldsymbol{c}^{(n)} + \boldsymbol{x}\quad\boldsymbol{p}^{(n)} \qquad (\text{在 } a_F \text{ 上}), \tag{18a}$$

$$\boldsymbol{v} = \ \boldsymbol{v}, \ \boldsymbol{r} = \ \boldsymbol{r} \qquad (\text{在 } a_D \text{ 上}) \tag{18b}$$

显而易见, 运动方程(8)和(9)与Eringen的结果相同, 但能率均衡方程(10)则与他在[7]中的下列结果

$$= t_{kl}(v_{l,k} - \ _{klm}r_m) + m_{kl}r_{l,k} \tag{19a}$$

或

$$= \boldsymbol{t}:(\quad\boldsymbol{v} - \quad\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{m}:(\quad\boldsymbol{r}), \tag{19b}$$

存在着本质的差异 事实上, 上式可直接从下列不带交叉项的功率能率原理

$$_{v}\quad\mathrm{d}v = \ _{v}(\boldsymbol{f} - \ \boldsymbol{v})\quad\boldsymbol{v}\mathrm{d}v + \ _{a}\boldsymbol{p}^{(n)}\quad\boldsymbol{v}\mathrm{d}a + \ _{v}(1 - \quad)\quad\boldsymbol{r}\mathrm{d}v + \ _{a}\boldsymbol{c}^{(n)}\quad\boldsymbol{r}\mathrm{d}a, \tag{20}$$

并利用运动方程即可得到 而我们的能率均衡方程(10)是和运动方程(8), (9)一起从具有交叉项的新的功率能率原理并借助于广义Piola原理得到的 这便是为什么我们的(10)和Eringen的(19)之间出现差异, 而且在(19)中还会出现与角速度 $\boldsymbol{r}$ 相关的项 $-\ \boldsymbol{t}:(\quad\boldsymbol{r})$ 的原因 实际上, 能率并不与角速度相关, 而只与速度梯度和角速度梯度相关 下面就来证明这个事实

证明: 假如 也与 $\boldsymbol{r}$ 相关, 则可假定它具有下列形式:

$$= \quad(v_{l,k}, r_l, r_{l,k}) \tag{21}$$

令

$$_{kl} = (\quad)/\ v_{l,k}, \qquad _{l} = (\quad)/\ r_l, \qquad _{kl} = (\quad)/\ r_{l,k}, \tag{22}$$

则

$$\begin{aligned}
&_{v}(\quad)\mathrm{d}v = Q_v(A_{kl}Dv_{l,k} + B_lDr_l + C_{kl}Dr_{l,k})\mathrm{d}v = \\
&R_a n_kA_{kl}Dv_l\mathrm{d}a - Q_v A_{kl,k}Dv_l\mathrm{d}v + Q_v B_lDr_l\mathrm{d}v + R_a n_kC_{kl}Dr_l\mathrm{d}a - Q_v C_{kl,k}D_l\mathrm{d}v = \\
&Q_v Q(f_l - \ v_l)Dv_l\mathrm{d}v + R_a n_kt_{kl}Dv_l\mathrm{d}a + Q_v Q[(l_l - \ R_l) + \\
&E_{mnl}x_m(f_n - \ v_n)]Dr_l\mathrm{d}v + R_a n_k(m_{kl} - \ t_{kn}x_mE_{nml})Dr_l\mathrm{d}a\#
\end{aligned} \tag{23}$$

于是我们得到

$$Q(f_l - \ v_l) + A_{kl,k} = 0, \tag{24a}$$

$$(l_l - R_l) + C_{kl,k} + E_{lmn}x_m Q(f_n - v_n) - B_l = 0; \tag{24b}$$

$$A_{kl} = t_{kl}, \tag{25a}$$

$$C_{kl} = m_{kl} - t_{kn}x_m E_{nml}\# \tag{25b}$$

把(25a)和(25b)代入(24a)和(24b),则有

$$Q(f_l - v_l) + t_{kl,k} = 0, \tag{26}$$

$$Q(l_l - R_l) + m_{kl,k} + E_{lmn}t_{mn} + E_{lmn}x_m[Q(f_n - v_n) + t_{kn,k}] - B_l = 0\# \tag{27}$$

考虑到运动方程,则必有 $B_l = 5(QE)/5r_l = 0$, 亦即,能率只能与速度梯度 $v_{l,k}$ 和角速度梯度 $r_{l,k}$ 相关,而与角速度 $r_l$ 无关# 证毕

### 112 微态连续统

我们现在公设具有交叉项的新的微态连续统的功率和能率原理如下:

$$Q_v(QE)\mathrm{d}v = Q_v Q(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{v})\#\boldsymbol{v}\mathrm{d}v + R_a \boldsymbol{p}^{(n)}\#\boldsymbol{v}\mathrm{d}a + Q_v\Big\{[Q(\boldsymbol{L} - 2): 8] + [\boldsymbol{x} @ Q(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{v})]\#\boldsymbol{r}\Big\}\mathrm{d}v + R_a[(\boldsymbol{c}^{(n)}: 8) + (\boldsymbol{x} @ \boldsymbol{p}^{(n)})\#\boldsymbol{r}]\mathrm{d}a\# \tag{28}$$

这里,把文献[11]中的体矩密度 $l_{ij}$, 自旋张量 $R_{ij}$, 回转张量 $r_{ij}$ 和应力矩张量 $t_{ijk}$ 相应地分别用 $L_{ij}$, $2_{ij}$, $8_{ij}$ 和 $T_{ijk}$ 代替,以便与微极连续统相对应的符号 $l_i$, $\boldsymbol{R}$, $r_i$ 和 $m_{ij}$ 加以区别#

把下列关系式

$$R_a \boldsymbol{p}^{(n)}\#\boldsymbol{v}\mathrm{d}a = Q_v t_{ij,i}v_j\mathrm{d}v + Q_v t_{ij}v_{j,i}\mathrm{d}v = Q_v(\ \#\boldsymbol{t})\#\boldsymbol{v}\mathrm{d}v + Q_v[\boldsymbol{t}:(\ \boldsymbol{v})]\mathrm{d}v, \tag{29}$$

$$R_c \boldsymbol{p}^{(n)}: 8\mathrm{d}a = R_a n_i T_{ijk}8_{jk})\mathrm{d}v = Q_v(t_{ijk}8_{jk})_{,i}\mathrm{d}v = Q_v(T_{ijk,i}8_{jk} + T_{ijk}8_{jk,i})\mathrm{d}v = Q_v[(\ \#\boldsymbol{T}) B\ 8 + \boldsymbol{T}\boldsymbol{s}(\ 8)]\mathrm{d}v, \tag{30}$$

$$R_a \boldsymbol{p}^{(n)} @ \boldsymbol{x}\#\boldsymbol{r}\mathrm{d}a = R_a[(\boldsymbol{n}\#\boldsymbol{t}) @ \boldsymbol{x}]\#\boldsymbol{r}\mathrm{d}a = Q_v(t_{ij}x_m E_{jml}r_l)_{,i}\mathrm{d}v = Q_v\Big\{(t_{ji,i}x_m E_{jil} + t_{ij}E_{jil})r_l + t_{ij}x_m E_{jml}r_{l,i}\Big\}\mathrm{d}v = Q_v[(\boldsymbol{x}(\ \#\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{t}]: 8 + (\boldsymbol{tx})\boldsymbol{s}(\ 8)\Big\}\mathrm{d}v\# \tag{31}$$

代入(28),则得

$$Q_v(QE)\mathrm{d}v = Q_v Q[(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{v}) + \ \#\boldsymbol{t}]\#\boldsymbol{v}\mathrm{d}v + Q_v\Big\{[Q(\boldsymbol{L} - 2) + \ \#\boldsymbol{T} - \boldsymbol{t}] - \boldsymbol{x}[Q(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{v}) + \ \#\boldsymbol{t}]: 8\Big\}\mathrm{d}v + Q_v\Big\{\boldsymbol{t}\boldsymbol{B}(\ \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{T} - \boldsymbol{tx})\boldsymbol{s}\ 8\Big\}\mathrm{d}v\# \tag{32}$$

现在我们可以表述微态连续统力学的广义 Piola 定理如下:

如果分别有

$$\boldsymbol{v} = \mathrm{const} \quad 和 \quad 8 = \boldsymbol{0} \tag{33a}$$

及

$$8 = \mathrm{const} \quad 和 \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}, \tag{33b}$$

则微态连续统的功率能率原理(28)与动量及动量矩均衡定律等价#

于是动量方程可写成

$$Q(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{v}) + \ \#\boldsymbol{t} = \boldsymbol{0} \tag{34a}$$

或

$$(f_k - v_k) + t_{jk,j} = 0\# \tag{34b}$$

如文献[11]中所述, 由于 8 是2阶反称张量, 则对任意的 8 而言, (32) 右侧的第二个被积式不能保持, 除非

$$Q(\boldsymbol{L} - 2) + \# \boldsymbol{T} + \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} = S \tag{35a}$$

或

$$Q(L_{jk} - 2_{jk}) + T_{ijk,i} + t_{kj} = S_{kj}, \tag{35b}$$

这里 $\boldsymbol{S}$ 是个对称张量, Eringen 称之为应力平均张量# 从(32)我们得到下列能率均衡方程

$$Q\hat{E} = \boldsymbol{t}:( \boldsymbol{v}) + T^{*} {}_{s} ( 8) \tag{36a}$$

或

$$Q\hat{E} = t_{ij}v_{j,i} - T^{*}_{ijk} 8_{jk,i}, \tag{36b}$$

这里

$$\boldsymbol{T}^{*} = (\boldsymbol{T} - \boldsymbol{tx}) \quad 或 \quad T^{*}_{ijk} = T_{ijk} - t_{ij}x_{k}\# \tag{37}$$

显然, 从(36)可见, 能率只与速度向量梯度和回转张量梯度相关, 而与回转张量无关, 这与微极连续统的情况类似#

然而 Eringen 在文献[11]中推导出的能率均衡方程具有下列形式:

$$QE = t_{ij}v_{j,i} + (S_{ij} - t_{ij}) 8_{ij} + T_{ijk} 8_{jk,i}\# \tag{38}$$

此式与本文给出的(36)之间存在实质性差异的原因和我们在前面对微极连续统所作的说明是一样的#

### 113 非局部微极连续统

如果使用局部化过程, 则微极连续统的广义 Piola 原理也适用于非局部情形# 于是非局部微极连续统的动量, 动量矩和能率均衡方程可由(6)很自然地导出:

$$Q(f_l - v_l) + t_{kl,k} = - Q\!\!\!/ f_l, \tag{39}$$

$$Q(l_l - R) + m_{kl,k} + E_{lmn}t_{mn} = - Q(l_l - E_{lmn}x_m f_n) \tag{40}$$

$$\begin{aligned} QE = {} & t_{kl}v_{l,k} + (m_{kl} - t_{kn}x_m E_{nml}) r_{l,k} - Q\!\!\!/ f_l v_l - \\ & Q(l_l - E_{lmn}x_m f_n) r_l\# \end{aligned} \tag{41}$$

这里的(41)和 Eringen 的相应结果也存在着和微极连续统类似的差异# 另外要求非局部剩余对定义域的积分必须为零, 即

$$\int_{Q_v} f_l \,\mathrm{d}v = 0, \quad \int_v l_l \,\mathrm{d}v = 0\# \tag{42}$$

### 114 非局部微态连续统

如果进行局部化过程, 则微态连续统的广义 Piola 定理也可用于非局部情形# 于是非局部微态连续统的动量, 动量矩和能率的方程可从(32)很自然地导出:

$$Q(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{v}) + \# \boldsymbol{t} = - Q\boldsymbol{f}, \tag{43}$$

$$Q(\boldsymbol{L} - 2) + \# \boldsymbol{T} + \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{S} = - Q(\boldsymbol{L} - \boldsymbol{xf}), \tag{44}$$

$$QE = \boldsymbol{t}:( \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{T} - \boldsymbol{tx})_{s} \; 8 - Q\boldsymbol{f} \# \boldsymbol{v} - Q(\boldsymbol{L} - \boldsymbol{xf}): 8\# \tag{45}$$

另外要求

$$\int_{Q_v} \boldsymbol{f} \,\mathrm{d}v = \boldsymbol{0}, \quad \int_{Q_v} \boldsymbol{L} \,\mathrm{d}v = \boldsymbol{0}\# \tag{46}$$

## 2 广义连续统场论的新的功能原理

广义连续统场论中的新的功能原理可由新的功率能率原理的相应情况中的 $\boldsymbol{v}(\mathrm{D}\boldsymbol{v})$ 和

$(\boldsymbol{r}(D\boldsymbol{r})$ 分别用 $\boldsymbol{u}(D\boldsymbol{u})$ 和 $U(DU)$ 代替而得到# 例如, 新的虚位移和虚角位移原理以及虚应力和虚偶应力原理可由(2a) 和(2b) 写成下列形式:

$$Q_v Q(E)^p \mathrm{d}v = Q_v Q(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{v}) \# D\boldsymbol{u}\mathrm{d}v + R_{a_F} \boldsymbol{p}^{(n)} \# D\boldsymbol{u}\mathrm{d}a + Q_v Q[(1- R) +$$

$$\boldsymbol{x} @ (\boldsymbol{f} - \boldsymbol{v})] \# DU\mathrm{d}v + R_{a_F}(\boldsymbol{c}^{(n)} + \boldsymbol{x} @ \boldsymbol{p}^{(n)}) \# DU\mathrm{d}a \qquad (47a)$$

以及

$$Q_v Q(E)^c \mathrm{d}v = Q_v QD(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{v}) \# \boldsymbol{u}\mathrm{d}v + R_{a_D} D\boldsymbol{p}^{(n)} \# \boldsymbol{u}\mathrm{d}a + Q_v QD[(1- R) +$$

$$\boldsymbol{x} @ (\boldsymbol{f} - \boldsymbol{v})] \# U\mathrm{d}v + R_{a_D} D(\boldsymbol{c}^{(n)} + \boldsymbol{x} @ \boldsymbol{P}^{(n)}) \# U\mathrm{d}a\# \qquad (47b)$$

把(47a) 和(47b) 组合起来, 即可得到广义连续统的具有交叉项的新的功能原理如下:

$$Q_v Q E \mathrm{d}v = Q_v Q(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{v}) \# \boldsymbol{u}\mathrm{d}v + R_a \boldsymbol{p}^{(n)} \# \boldsymbol{u}\mathrm{d}a + Q_v Q[(1- R) + \boldsymbol{x} @ (\boldsymbol{f} - \boldsymbol{v})] \# U\mathrm{d}v +$$

$$R_a(\boldsymbol{c}^{(n)} + \boldsymbol{x} @ \boldsymbol{p}^{(n)}) \# U\mathrm{d}a, \qquad (48)$$

这里等号右边的第 4 项和第 6 项是交叉项# 从这个新的功能原理并借助于广义 Piola 定理即可自然地推导出广义连续统的所有运动方程和边界条件以及能量均衡方程#

## 3 结 束 语

1) 我们认为本文前言中提出的目的已经达到, 并且认为这里给出的结果是新的, 而且对于广义连续统场论的研究工作是重要的# 由本文建立起来的具有交叉项的功能原理以及功率能率原理之所以是新的, 就是因为从它们可以一次性地而且无需其它要求地推导出广义连续统的所有运动方程, 边界条件和能量均衡方程以及能率均衡方程# 反过来说, 就是说广义连续性统场论中现有的所有不带交叉项的有关功能和功率能率原理都不可能是完整的#

2) 我们愿指出, 本文提出的(2a) 和(47a) 及(2b) 和(471b) 分别是建立广义连续统中新的新势能型和势能率型及余能型和余能率型变分原理的基础, 而新的功能及功率能率原理则可用来建立新的全能型及全能率型变分原理#

3) 本文的方法可易于推广到广义热力连续统的相应情形中去#

致谢 对作者在德国卡塞尔大学力学所合作期间, P. Hanpt 教授热情友好接待表示衷心感谢#

## [参 考 文 献]

[1] Cosserat E F. Theorie des Corps Deformable[M]. Paris: Hermann, 1909.

[2] Ericksen J L, Truesdell C. Exact theory of stress and strain in rods and shells [J]. Arch Rational Mech Anal, 1958, **2**: 298.

[3] Guenther W, Zur statik and kinematik des cosseratschen kontinuums [J]. Abh Braunschw Wiss Ges, 1958, **10**: 195.

[4] Kroener E. Mechanics of Generalized Continua[M]. Berlin, Heidelberg, New York: Springer_Verlag, 1967.

[5] Edelen, D G B. Nonlocal Variations and Local Invariance of Fields[M]. New York: Elsevier,

1969.

[6] Stojanovic R. Mechanics of Polar Continuum [M]. Udine: Int Center Mech Sci, 1969.

[7] Eringen A C. Continuum Physics[M]. Vol. IV, New York: Academic Press, 1976.

[8] Kunin I A. Elastic Media with Microstructure[M]. Berlin, Heidlberg, New York: Springer_Verlag, 1982.

[9] Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity[M]. Oxford: Pergamon Press, 1986.

[10] Ciarletta M, Iesan D. Non_classical Elastic Solids[M]. Pitman Research Notes **293, Boston, London, Melbourne: Longman Scientific & Technical,** 1993.

[11] Eringen A C. Balance laws of micromorphic continua revisited [J]. Int J Engng Sci, 1992, **30**(6): 805) 810.

[12] Stojanovic R. On the principle of virtual work in the theory of oriented elastic media[J]. Z Angew Math Mech, 1973, **53:** 79) 82.

# New Principles of Work and Energy as well as Power and Energy Rate for Continuum Field Theories

DAI Tian_min

(Center for the Application of Mathematics and Department of Mathematics, Liaoning University, Shenyang 110036, P R China)

Abstract: New principles of work and energy as well as power and energy rate with cross terms for polar and nonlocal polar continuum field theories were presented and from them all corresponding equations of motion and boundary conditions as well as complete equations of energy and energy rate with the help of generalized Piola. s theorems were naturally derived in all and without any additional requirement. Finally, some new balance laws of energy and energy rate for generalized continuum mechanics were established. The new principles of work and energy as well as power and energy rate with cross terms presented in this paper are believed to be new and they have corrected the incompleteness of all existing corresponding principles and laws without cross terms in literatures of generalized continuum field theories.

Key words: principles of work and energy; power and energy rate; generalized Piola. s theorem; equations of energy and energy rate; generalized continua