

文章编号: 1000-0887(2001) 11-1163_09

海水入侵及防治工程的后效预测^{*}

袁益让, 梁 栋, 芮洪兴

(山东大学 数学研究所, 济南 250100)

(戴世强推荐)

摘要: 提出了海水入侵及防治工程的后效预测的数学模型, 处理三维问题的分裂迎风交替方向格式。对山东省莱州湾地区海水入侵进行数值模拟比较, 结果与实测结果完全吻合。对工程的后效预测合理。

关键词: 海水入侵; 后效预测; 数值模拟; 分裂算法; 迎风格式

中图分类号: O241.82 文献标识码: A

引 言

海水入侵是沿海地区社会经济发展, 引起自然水环境条件改变而导致的海水向沿海地区储水层的侵入。这种灾害主要表现为海水(卤水或古海水)在地下向内陆入侵。这种入侵具有隐蔽性强、动态变化多、潜在危害大、难以治理等特点。近年来在世界上许多国家如美国、荷兰、以色列、日本等国都有发生。七十年代以来, 我国北方沿海经济区, 尤其是环渤海经济区的山东、河北、辽宁等逐渐显露出来, 且越来越严重。特别是山东省沿海地区更为突出。引起工农业生产下降, 人们的生活条件特别是饮水条件越来越差, 迫切需要治理^[1~3]。

海水入侵及防治工程后效的数值模拟就是从水文、地质和地下渗流力学的基本原理出发, 用电子计算机定量地模拟海水入侵的发生、发展及 Cl^- 浓度的变化, 是进行治理和防治的基础。这一问题的数学模型是一组非线性耦合方程组, 具有强双曲及高度非线性特性。边界条件即包含了第一类边条件, 不渗透(或渗透)边条件, 又有自由潜水面边条件^[4~6]。且要考虑各项工程的影响。这些问题不论是数学上还是力学上都是相当困难的。

本文我们提出了求解海水入侵问题的迎风算子分裂算法。用此方法计算, 并对实测数据进行对比, 结果完全吻合, 对防治工程后效预测完全合理。

1 数学模型

1.1 Darcy 定律

海水与地下淡水在压力差作用下运移, 是一种地下多孔介质中流体的渗流过程, 满足 Dar-

* 收稿日期: 1999_06_05; 修订日期: 2001_03_20

基金项目: 国家重点基础研究发展规划项目资助(G1999032803); 国家自然科学基金资助课题(19871051, 19972039); 国家教育部博士点基金资助课题(96042202)

作者简介: 袁益让(1935—), 男, 江苏靖江市人, 教授, 博士生导师, 山东大学数学研究所副所长, 科学与工程计算实验室主任。

cy 定律

$$\mathbf{v} = - \frac{\mathbf{K}}{\mu} (\nabla p - \rho \mathbf{g} z) \quad (1)$$

式中 p 为压力, ρ 为密度, \mathbf{g} 为重力加速度, $z = (0, 0, z)$, z 为含水层深度函数, μ 为流体粘度, \mathbf{K} 为渗透率张量

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & 0 \\ 0 & 0 & K_{33} \end{bmatrix} \quad (2)$$

通常情况下压力函数 p 用参考水头 H 代替

$$H = \frac{p}{\rho_0 g} - z, \quad (3)$$

其中 ρ_0 为参考水(淡水)密度。

1.2 水头方程

研究流体的方法通常采用 Euler 方法, 不研究多孔介质中流体运移的微观过程, 而是研究宏观上表现出来的流体流动平均特性。忽略它的可压缩性, 采用 Huyakorn 的线性处理方法, 可得水头方程

$$S_s \frac{\partial H}{\partial t} - \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{K}} (\nabla H - \eta \mathbf{e}_3)) = - \phi \eta \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\rho}{\rho_0} q, \quad (4)$$

$$\tilde{\mathbf{K}} = \frac{\rho}{\mu} \mathbf{K}, \quad (5)$$

式中 S_s 为贮水率, ϕ 为介质孔隙度, ρ 为与最大 Cl^- 浓度对应的流体密度, $\eta = \varepsilon / C_s$, C_s 为 Cl^- 最大浓度, $\varepsilon = (\rho - \rho_0) / \rho_0$

1.3 Cl^- 浓度方程

混溶于流体中的 Cl^- , 在多孔介质的运移过程中, 会发生对流、扩散、机械弥散等现象, 由 Fick 定律, 质量守恒定律可得浓度方程为

$$\phi \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot (\phi \mathbf{D} \nabla c) - \mathbf{u} \cdot \nabla c + q(c^* - c), \quad (6)$$

式中 c 为 Cl^- 浓度, q 为外界源汇项, c^* 为源汇项 Cl^- 浓度, $\mathbf{D} = \mathbf{D}(H)$ 为扩散矩阵,

$$\mathbf{D} = d_m \mathbf{I} + d_l |\mathbf{u}| \mathbf{E} + d_t |\mathbf{u}| (\mathbf{I} - \mathbf{E}), \quad (7)$$

$$\mathbf{E} = \left[\frac{u_i u_j}{|\mathbf{u}|} \right] \quad (8)$$

1.4 初边值条件

上述方程加上适当的初边值条件构成封闭系统。初始条件为

$$\begin{aligned} H(x, y, z, 0) &= H_0(x, y, z), \\ c(x, y, z, 0) &= c_0(x, y, z) \end{aligned} \quad ((x, y, z) \in \Omega), \quad (9)$$

边条件分为三类。已知 Cl^- 浓度及水头可给出第一类边条件

$$\begin{aligned} H(x, y, z, t) &= H_1(x, y, z, t), \\ c(x, y, z, t) &= c_1(x, y, z) \end{aligned} \quad ((x, y, z) \in \Gamma_1), \quad (10)$$

对不渗透边界可给出第二类边条件

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{D} \nabla c \cdot \mathbf{n} = 0 \quad ((x, y, z) \in \Gamma_2), \quad (11)$$

其中 \mathbf{n} 为边界上的单位外法向。对潜水面(自由面)给出为一类 Stefan 边条件

$$\begin{cases} H = -z & ((x, y, z) \in \Gamma_3), \\ \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \nabla(H + z) = 0 & ((x, y, z) \in \Gamma_3), \\ \phi D \nabla c \cdot \mathbf{n} = (1 - \mu_0)(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}(c - c') & ((x, y, z) \in \Gamma_3), \end{cases} \quad (12)$$

其中 \mathbf{w} 为单位时间单位面积的入渗矢量, c' 为入渗流体的 Cl^- 浓度。

2 数值模拟方法

为了使数值模拟适合评价大范围三维问题的需要, 我们提出了一类分裂迎风交替方向格式^[7]:

2.1 水头方程算子分裂法

我们对区域 Ω 进行等距剖分, $h_x = x_i - x_{i-1}, i = 1, 2, \dots, N_x, h_y = y_j - y_{j-1}, j = 1, 2, \dots, N_y, h_z = z_k - z_{k-1}, k = 1, 2, \dots, N_z$, 时间步长为 $\Delta t, t^n = n \Delta t$, 记 H_{ijk}^n 为 $H(x_i, y_j, z_k, t^n)$ 的差分, C_{ijk}^n 为 $c(x_i, y_j, z_k, t^n)$ 的差分, 为方便起见, 改写水头方程为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[K^1(c) \frac{\partial H}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[K^2(c) \frac{\partial H}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[K^3(c) \frac{\partial H}{\partial z} \right] = s_s \frac{\partial H}{\partial t} + f \left[c, \frac{\partial c}{\partial t} \right], \quad (13)$$

其中 $f \left[c, \frac{\partial c}{\partial t} \right] = \phi(c) \eta \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (K^3(c) \eta c) - \frac{\rho}{\rho_0} q$

设第 n 时间层的 $c^n, \partial c^n / \partial t, H^n$ 已知, 求第 $(n+1)$ 时间层的值 H^{n+1} 时, 用差商代替微商, $(H^{n+1} - H^n) / \Delta t \approx \partial H / \partial t$, 可将(13) 改写为

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{\Delta t}{s_s} \frac{\partial}{\partial y} \left[K^2(c) \frac{\partial}{\partial y} \right] \right) \left(1 - \frac{\Delta t}{s_s} \frac{\partial}{\partial x} \left[K^1(c) \frac{\partial}{\partial x} \right] \right) \left(1 - \frac{\Delta t}{s_s} \frac{\partial}{\partial z} \left[K^3(c) \frac{\partial}{\partial z} \right] \right) H^{n+1} \\ & = H^n - \frac{\Delta t}{s_s} f \left[c^n, \frac{\partial c^n}{\partial t} \right], \end{aligned} \quad (14)$$

在此基础上经离散得分裂格式, 分三步:

1) 在 y 方向解方程求 $H_{ijk}^{n+1/3}, i = 1, 2, \dots, N_x, k = 1, 2, \dots, N_z$

$$\begin{aligned} & K_{j-1/2}^2 H_{j-1k}^{n+1/3} - (K_{j-1/2k}^2 + K_{j+1/2k}^2 + S_{ijk}^*) H_{ijk}^{n+1/3} + K_{j+1/2}^2 H_{j+1k}^{n+1/3} \\ & = d_{jk}^{(1)} \quad (j = 1, 2, \dots, N_y), \end{aligned} \quad (15)$$

这里 $d_{jk}^{(1)} = -S_{sjk} h_x h_y h_z H_{ijk}^n + \Delta f \left[c^*, \partial c^* / \partial t \right] h_x h_y h_z, c^*$ 可由 c^n, c^{n-1} 外插而得, $\partial c^* / \partial t$ 可取为 $\partial c^* / \partial t = (c^n - c^{n-1}) / \Delta t$

2) 在 x 方向解方程求 $H_{ijk}^{n+2/3} \quad (i = 1, 2, \dots, N_x, k = 1, 2, \dots, N_z)$

$$\begin{aligned} & K_{i-1/2j}^1 H_{i-1jk}^{n+2/3} - (K_{i-1/2jk}^1 + K_{i+1/2jk}^1 + S_{sjk}^*) H_{ijk}^{n+2/3} + \\ & K_{i+1/2j}^1 H_{i+1jk}^{n+2/3} = d_{ijk}^{(2)} \quad (i = 1, 2, \dots, N_x), \end{aligned} \quad (16)$$

其中 $S_{sjk}^* = S_{sjk} h_x h_y h_z$

3) 在 z 方向求 H_{ijk}^{n+1}

$$K_{jk-1/2}^3 H_{jk-1}^{n+1} - (K_{ijk-1/2}^3 + K_{ijk+1/2}^3 + S_{sjk}^*) H_{ijk}^{n+1} + K_{i+1/2jk}^3 H_{jk+1}^{n+1} = d_{ijk}^{(3)}, \quad (17)$$

其中 $d_{ijk}^{(2)} = -S_{sjk}^* H_{ijk}^{n+1/3}, d_{ijk}^{(3)} = -S_{sjk}^* H_{ijk}^{n+2/3}$

2.2 浓度方程加权迎风分裂算法

由于浓度方程的强对流特征, 我们采用加权差分格式来处理 $v_1 \partial c / \partial x_1, v_2 \partial c / \partial y, v_3 \partial c / \partial z$, 例如对 $v_1 \partial c / \partial x$ 用以下方式进行近似。取加权因子 $0 \leq \alpha \leq 1$ 。

$$v_1 \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x_i} = \begin{cases} v_1 \left[\alpha \frac{c_i - c_{i-1}}{\Delta x} + (1-\alpha) \frac{c_{i+1} - c_i}{2\Delta x} \right] & (v_1 > 0), \\ v_1 \left[\alpha \frac{c_{i+1} - c_i}{\Delta x} + (1-\alpha) \frac{c_{i+1} - c_i}{2\Delta x} \right] & (v_1 < 0). \end{cases} \quad (18)$$

由此及前面的分裂方法可得求解浓度方程的分裂加权迎风格式。式中

$$g(H, c) = - [q(c^* - c) + 2 \frac{\partial}{\partial x} (D^{12}(H) \frac{\partial c}{\partial y}) + 2 \frac{\partial}{\partial x} (D^{13}(H) \frac{\partial c}{\partial z}) + 2 \frac{\partial}{\partial y} (D^{23}(H) \frac{\partial c}{\partial z})].$$

1) 在 y 方向解方程求 $C_{ijk}^{n+1/3}$ 。

$$(D_{jk}^{22}(H^*) + r_{jk}^{(1)}) C_{ij-1k}^{n+1/3} - (2D_{jk}^{22}(H^*) + \beta_{jk} + r_{jk}^{(2)}) C_{ijk}^{n+1/3} + (D_{jk}^{22}(H^*) + r_{jk}^{(3)}) C_{ij+1k}^{n+1/3} = d_{ijk}^{(1)}. \quad (19)$$

其中 $d_{ijk}^{(1)} = -\beta_{jk} C_{ijk}^n + \Delta t g_{ijk}^{n+1/3}(H^*, C^*)$, 其它系数定义如下

当 $v_{jk}^{(2)} \geq 0$ 时

$$r_{jk}^{(1)} = \frac{1+\alpha}{2h_y} v_{jk}^{(2)}, \quad r_{jk}^{(2)} = \frac{\alpha}{h_y} v_{jk}^{(2)}, \quad r_{jk}^{(3)} = -v_{jk}^{(2)} \frac{1-\alpha}{2h_y}. \quad (20)$$

当 $v_{jk}^{(2)} < 0$ 时定义

$$r_{jk}^{(1)} = \frac{1-\alpha}{2h_y} v_{jk}^{(2)}, \quad r_{jk}^{(2)} = -\frac{\alpha}{h_y} v_{jk}^{(2)}, \quad r_{jk}^{(3)} = \frac{1+\alpha}{2h_y} v_{jk}^{(2)}. \quad (21)$$

2) 在 x 方向求解 $C^{n+2/3}$ 满足

$$(D_{jk}^{11}(H^*) + r_{jk}^{(1)}) C_{ij-1k}^{n+2/3} - (2D_{jk}^{11}(H^*) + \beta_{jk} + r_{jk}^{(2)}) C_{ijk}^{n+2/3} + (D_{jk}^{11}(H^*) + r_{jk}^{(3)}) C_{ij+1k}^{n+2/3} = d_{ijk}^{(2)}. \quad (22)$$

3) C^{n+1} 满足

$$(D_{jk}^{33}(H^*) + r_{jk}^{(1)}) C_{ijk-1}^{n+1} - (2D_{jk}^{33}(H^*) + \beta_{jk} + r_{jk}^{(2)}) C_{ijk}^{n+1} + (D_{jk}^{33}(H^*) + r_{jk}^{(3)}) C_{ijk+1}^{n+1} = d_{ijk}^{(3)}. \quad (23)$$

式中 $d_{ijk}^{(2)} = -\beta_{jk} C_{ijk}^{n+1/3}$, $d_{ijk}^{(3)} = -\beta_{jk} C_{ijk}^{n+2/3}$, (22), (23) 式中 $r_{jk}^{(1)}$, $r_{jk}^{(2)}$, $r_{jk}^{(3)}$ 的定义与(20), (21) 式类似。

2.3 求解过程

利用上面给出的格式, 每一时间层的求解要重复如下求解过程:

A) 从 C^n , H^n , 用 $(C^n - C^{n-1})/\Delta t$ 代替 $(\partial c/\partial t)^n$, 利用(15) ~ (17) 求水头, 记为 \tilde{H}^{n+1} ;

B) 从 \tilde{H}^{n+1} 求出 v^{n+1} ;

C) 从 C^n , \tilde{H}^{n+1} 利用方程(19) ~ (22) 求 Cl 浓度, 记求 \tilde{C}^{n+1} ;

D) 用 $(\tilde{C}^{n+1} - C^n)/\Delta t$ 代替 $\frac{\partial c}{\partial t}$, 重复 A), B), C), 直到两次求得的浓度近似 $|\tilde{C}^{n+1} - \tilde{C}^{n+1}| <$

ε 为此, 这里 ε 为给定精度, 此时的 \tilde{C}^{n+1} , \tilde{H}^{n+1} 可作为 C^{n+1} , H^{n+1} 并求出 v^{n+1} 及潜水区域。

3 数值模拟结果与分析

考虑到抽水形成的复杂流场, 模型计算选择具有三维观测网的龙口市黄河营地区作为计算区。该区位于黄水河口左岸, 计算区域北界为渤海, 东界为黄水河岸边线, 长约 3 000m, 宽 700m, 区内除中部有一沙丘外, 地势平坦, 一般厚 17m~ 18m。含水层上部为中细砂, 下部为含砾卵石的粗砂, 中间夹一层或二、三层厚度不等的亚粘土、淤泥质亚粘土等。根据渗透性能把

该区分为三个地质区域。剖面图及平面图如图 1, 图 2 所示。各地质参数如表^[6]。

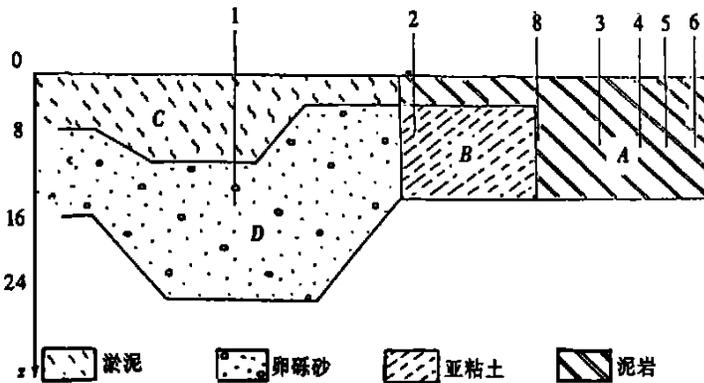


图 1 区域纵剖面示意图

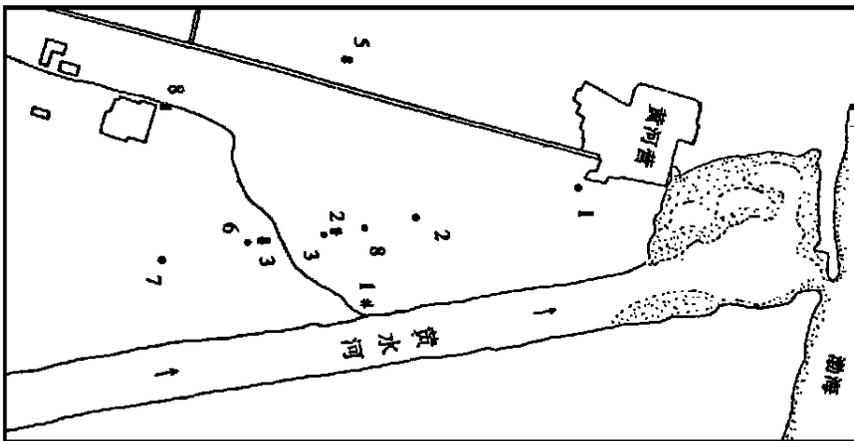


图 2 区域平面图

表 1 参数表

分区号		A	B	C	D
渗透系数 (m/d)	$K_{xx} = K_{yy}$	17	103	7	63
	K_{zz}	15	22	7	17
贮水率(m^{-1}) S_s		8.0×10^{-5}	1.2×10^{-4}	5.0×10^{-5}	1.0×10^{-4}
给水度 S_y		0.075	0.13	0.04	0.11
弥散度(m)	α_L	8.3	8.3	0.08	0.08
	α_T	0.001	0.001	0.0004	0.0004
降雨入渗系数		0.30	0.30	0.30	0.30

对该区域我们取剖分步长 $h_x = 20$ m, $h_y = 30$ m, $h_z = 1$ m。计算结果与实测结果及前人的工作作了比较。表 2 为水头比较, 表 3 为 Cl^- 浓度比较, 其中计算值 A 为文献[6]计算结果, 计算值 B 为我们采用分裂迎风格式的结果。观测值与计算值水位对比曲线, 浓度对比曲线如

表 3

Cl⁻ 浓度观测值与计算值比较

井号	日期 Cl ⁻ 浓度	7月22日			8月22日			9月22日		
		观测值 mg/L	计算值 A mg/L	计算值 B mg/L	观测值 mg/L	计算值 A mg/L	计算值 B mg/L	观测值 mg/L	计算值 A mg/L	计算值 B mg/L
1-1		3574.1	3687.4	3666.7	3719.5	3795.8	3714.9	3528.5	3731.3	3766.1
2-3		618.7	664.6	618.0	624.4	724.6	668.3	535.5	744.0	717.9
2-2		2613.3	2514.6	3000.0	2639.4	2596.3	3021.5	2569.0	2589.9	3041.0
2-1		4419.5	4237.4	4000.0	4477.9	4325.2	4012.9	4295.6	4304.5	4021.3
8-3		429.7	362.0	540.0	431.2	385.8	554.6	407.9	403.6	567.4
8-2		1156.8	1021.0	1377.3	1175.9	1290.4	1448.7	1143.6	1358.3	1513.8
8-1		2517.2	2333.1	2764.0	2482.6	2489.7	2913.1	2496.5	2591.9	3045.3
4-3		90.3	94.3	91.3	83.6	88.4	90.9	85.1	81.1	90.7
4-2		97.2	100.1	100.0	104.5	95.2	100.5	106.7	94.1	100.8
4-1		94.2	106.1	99.0	92.3	100.6	98.4	93.4	102.8	97.9
5-3		90.3	86.2	86.6	84.3	82.9	87.0	86.5	82.5	87.2
5-2		76.9	93.1	97.8	85.4	92.8	97.9	82.3	95.7	97.9
5-1		78.8	87.5	93.4	79.8	89.7	93.8	82.3	93.2	94.1
6-3		74.9	77.1	83.0	76.7	82.0	82.9	75.3	80.8	82.9
6-2		107.6	93.4	100.0	113.2	100.0	99.6	114.4	102.8	99.2
6-1		107.6	100.6	103.5	109.0	105.4	103.4	113.0	107.3	103.2
7-2		86.5	92.2	87.5	87.1	90.2	77.8	87.9	90.2	71.1
7-1		121.1	105.5	110.0	120.2	99.5	97.0	124.1	104.6	88.1

从以上结果可以看出, 计算结果准确, 格式稳定可靠, 能够满足大范围问题数值模拟预测的需要。

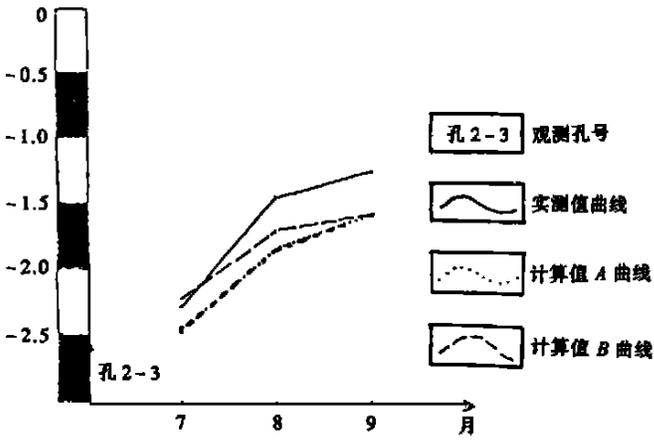


图 3 水位对比曲线图

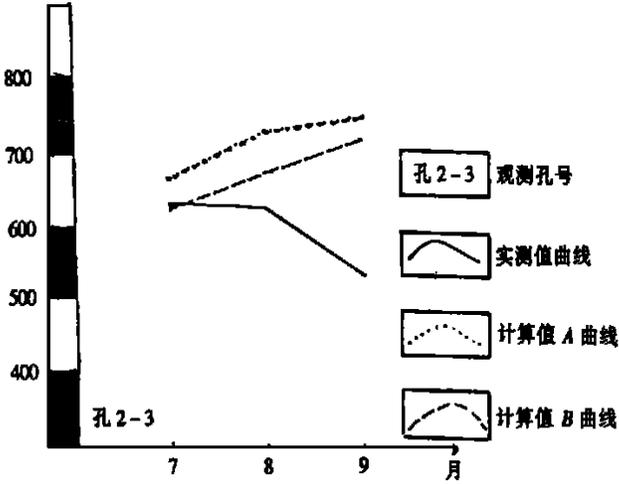


图 4 浓度对比曲线图

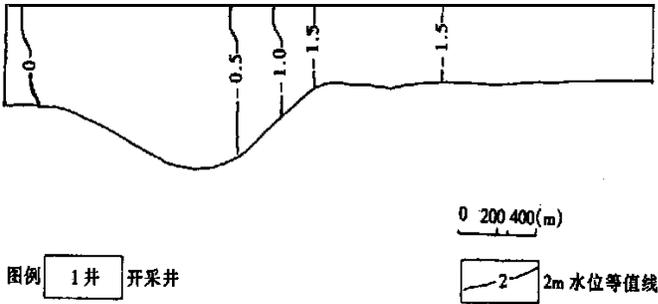


图 5 9月份水头计算值纵剖面图

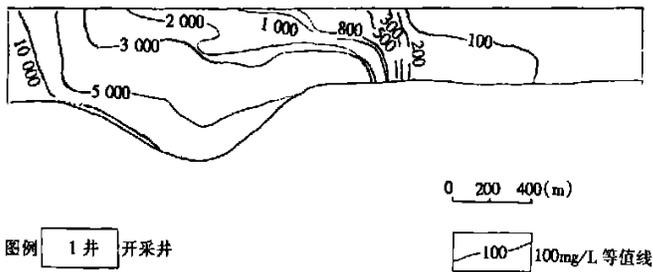


图6 9月份盐份浓度纵剖面等值线图

[参 考 文 献]

- [1] 赵德三. 山东沿海区域环境与灾害[M]. 北京: 科学出版社, 1991.
- [2] 中国灾害防御协会. 论沿海减灾与发展[M]. 北京: 地震出版社, 1991.
- [3] 赵德三. 山东省莱州湾地区海水侵染综合治理规划[M]. 青岛: 海洋出版社, 1994.
- [4] 雅. 贝尔. 地下水水力学[M]. 李竟生, 陈崇希译. 北京: 地质出版社, 1985.
- [5] 朱学愚, 谢春红. 地下水运移模型[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1988.
- [6] 薛禹群, 谢春红, 等. 海下入侵咸淡水界面运移规律研究[M]. 南京: 南京大学出版社, 1985.
- [7] 康立山, 陈毓屏. 数值解高维微分方程的分裂法[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 1991.
- [8] Huyakorn P S, Adherson P F, Mercer J W, et al. Saltwater intrusion in aquifers: development and testing of a three dimensional finite element model, *Water Resor Res*, 1987, **23**(2): 293—312.
- [9] 雅宁柯. 分数步长法[M]. 周宝熙, 林鹏译. 北京: 科学出版社, 1992.

Predicting the Consequences of Seawater Intrusion and Protection Projects

YUAN Yi_rang, LIANG Dong, RUI Hong_xing

(Institute of Mathematics, Shandong University, Jinan 250100, P R China)

Abstract: The simulation of this process and the effects of protection projects lays the foundation of its effective control and defence. The mathematical model of the problem and upwind splitting alternating direction method were presented. Using this method, the numerical simulation of seawater intrusion in Laizhou Bay Area of Shandong Province was finished. The numerical results turned out to be identical with the real measurements, so the prediction of the consequences of protection projects is reasonable.

Key words: seawater intrusion; predictive simulation; numerical simulation; splitting algorithm; upwind scheme