应用数学和力学, 第 22 卷 第 11 期(2001 年 11 月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2001) 11_1172_05

带慢变角参数摄动平面非 Hamilton 可积系统的混沌*

陈立群

(上海大学 力学系; 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

(刘曾荣推荐)

摘要: 将 Melinikov 方法推广到带慢变角参数摄动平面可积系统· 基于对未受摄动系统几何结构的分析, 建立了横截同宿条件· 借助常微分方程组解对参数的可微性定理, 得到系统的广义 Melnikov 函数, 其简单零点意味着系统可能出现混沌·

关 键 词: Melinikov 方法; 摄动可积系统; 横截同宿; 混沌
中图分类号: O322 文献标识码: A

引 言

研究混沌的 Melnikov 方法[1]已被推广到带慢变角参数的高维系统, 但仅局限于相应可积系统是 Hamilton 系统的情形[2]· 对于摄动平面可积非 Hamilton 系统, 仅对于周期[3,4]和准周期[5]摄动得到了存在混沌的条件· 本文将 Melnikov 方法推广到受小摄动带慢变角参数的一般平面可积系统, 而不限于 Hamilton 系统· 通过对相空间中几何结构的分析, 建立了横截同宿条件, 导出了广义 Melnkikov 函数, 其简单零点的存在给出系统出现混沌的条件· 混沌概念在当代科学中有丰富的含义[6], 本文沿袭[2]的作法将混沌等同于相应 Poincare 映射中的 Smale 马蹄及其高维推广·

1 几 何 结 构

考虑受摄动带慢变角参数的平面可积系统

$$\left.\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}} &= f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{I}) + \varepsilon g^x(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{I}, \theta, \mu, \varepsilon),\\ \dot{\boldsymbol{I}} &= \varepsilon g^I(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{I}, \theta, \mu, \varepsilon), \qquad ((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{I}, \theta) \in \mathbf{R}^2 \times T^m \times T^n),\\ \dot{\theta} &= \Omega(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{I}) + \varepsilon g^\theta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{I}, \theta, \mu, \varepsilon),\end{aligned}\right\} \tag{1$_\varepsilon$}$$

其中 $0 < \varepsilon \ll 1$, $\mu \in \mathbf{R}^l$ 为参数矢量, T 为单位圆周, 函数 f、g^x、g^I、g^θ 和 Ω 均为足够光滑的函数, g^x、g^I 和 g^θ 对 n 维角变量 θ 的每个分量均以 2π 为周期·

相应的未受摄动系统$(1)_0$的 $\boldsymbol{x}$ 分量

---

* 收稿日期: 2000_07_19; 修订日期: 2001_04_08
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10082003); 上海市科技发展基金资助项目(98JC14032); 上海市教委科技发展基金资助项目
作者简介: 陈立群(1963—), 男, 上海人, 教授, 博士生导师.

$$\dot{x} = f(x, I) \tag{2}$$

为可积系统，有随慢变角函数 $\boldsymbol{I}$ 变化的双曲鞍点 $\boldsymbol{x} = \gamma(\boldsymbol{I}) \in \mathbf{R}^2$，同宿轨道 $\alpha(t, \boldsymbol{I})$ 将 $\gamma(\boldsymbol{I})$ 与自身相连

$$\lim_{t\to+\infty}\alpha(t, \boldsymbol{I}) = \lim_{t\to-\infty}\alpha(t, \boldsymbol{I}) = \gamma(\boldsymbol{I}). \tag{3}$$

在相空间 $\mathbf{R}^2 \times T^m \times T^n$ 中，$(1)_0$ 有 $m+n$ 维双曲不变流形

$$M_0 = \left\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{I}, \theta) \in \mathbf{R}^2 \times T^m \times T^n \mid x = \gamma(\boldsymbol{I}), \boldsymbol{I} \in T^m, \theta \in T^n\right\}. \tag{4}$$

其稳定流形 $W^{\mathrm{s}}(M_0)$ 和不稳定流形 $W^{\mathrm{u}}(M_0)$ 构成 $1+m+n$ 维同宿流形

$$\begin{aligned}\Gamma &= W^{\mathrm{s}}(M_0) \cap W^{\mathrm{u}}(M_0) - M_0 \\ &= \left\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{I}, \theta) \in \mathbf{R}^2 \times T^m \times T^n \mid \boldsymbol{x} = \alpha(t, \boldsymbol{I}), \boldsymbol{I} \in T^m, \theta \in T^n\right\},\end{aligned} \tag{5}$$

当 $\varepsilon \neq 0$ 且充分小时，注意到 M_0 为紧的光滑流形，由不变流形的理论[7]，$(1)_\varepsilon$ 仍有 $m+n$ 维双曲不变流形

$$M_\varepsilon = \left\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{I}, \theta) \in \mathbf{R}^2 \times T^m \times T^n \mid \boldsymbol{x} = \gamma(\boldsymbol{I}) + O(\varepsilon), \boldsymbol{I} \in T^m, \theta = T^n\right\}, \tag{6}$$

且有 $1+m+n$ 维局部稳定流形 $W^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc}}(M_0)$ 和局部不稳定流形 $W^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc}}(M_0)$.

2　横截同宿条件

为建立 $W^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc}}(M_0)$ 与 $W^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc}}(M_0)$ 横截相交的条件，对任意 $P(\alpha(t, \boldsymbol{I})\boldsymbol{I}, \theta_0) \in \Gamma$ 定义矢量

$$\boldsymbol{r} = \Big(f^{\perp}(\alpha(t, \boldsymbol{I}), \boldsymbol{I}), \overbrace{0, \cdots, 0}^{m+n}\Big) = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} f(\alpha(t, \boldsymbol{I}), \boldsymbol{I}), \overbrace{0, \cdots, 0}^{m+n}\right) \tag{7}$$

和矢量组 $\left\{\boldsymbol{i}_1, \cdots, \boldsymbol{i}_m\right\}$ 张成的 $1+m$ 维线性空间 Π_P，这里 $\boldsymbol{i}_1, \cdots, \boldsymbol{i}_m$ 分别为 $\boldsymbol{I}_1, \cdots, \boldsymbol{I}_m$ 方向的单位矢量. 注意到 $1+m+n$ 维流形 $W^{\mathrm{s}}(M_0)$ 在其上任一点 P 处的切空间 $T_PW^{\mathrm{s}}(M_0)$ 是 $1+m+n$ 维线性空间，由 $\boldsymbol{r}$ 与 $(1)_0$ 定义的矢量场的正交性知由 $\boldsymbol{r}$ 张成的 1 维线性空间 N_P 使得

$$T_PW^{\mathrm{s}}(M_0) \oplus N_P = \mathbf{R}^{2+m+n}, \tag{8}$$

故 $W^{\mathrm{s}}(M_0)$ 与 N_P 横截相交. 由矢量空间的维数公式

$$\begin{aligned}\dim(T_PW^{\mathrm{s}}(M_0) \cap \Pi_P) &= \dim(T_PW^{\mathrm{s}}(M_0)) + \dim\Pi_P - \dim(T_PW^{\mathrm{s}}(M_0) \oplus \Pi_P) = \\ &(1+m+n) + (1+m) - (2+m+n) = m.\end{aligned} \tag{9}$$

即 $W^{\mathrm{s}}(M_0)$ 与 Π_P 横截相交于 m 维曲面 S^{s}_P，同理可知 $W^{\mathrm{u}}(M_0)$ 与 Π_P 横截相交于 m 维曲面 S^{u}_P. 注意到 $W^{\mathrm{s}}(M_0)$ 与 $W^{\mathrm{u}}(M_0)$ 在 Γ 上重合，故对任意 $P \in \Gamma$ 有 $S^{\mathrm{s}}_P = S^{\mathrm{u}}_P = \Gamma \cap \Pi_P$. 对于充分小 $\varepsilon \neq 0$，由 $W^{\mathrm{s}}(M_0)$ 和 $W^{\mathrm{u}}(M_0)$ 与 Π_P 相交的横截性知 $W^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc}}(M_0)$ 和 $W^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc}}(M_0)$ 仍分别与 Π_P 横截相交于 m 维集合 $S^{\mathrm{s}}_{P,\varepsilon}$ 和 $S^{\mathrm{u}}_{P,\varepsilon}$. 令 $P^{\mathrm{s}}_\varepsilon(\boldsymbol{x}^{\mathrm{s}}_\varepsilon, \boldsymbol{I}^{\mathrm{s}}_\varepsilon)$ 和 $P^{\mathrm{u}}_\varepsilon(\boldsymbol{x}^{\mathrm{u}}_\varepsilon, \boldsymbol{I}^{\mathrm{u}}_\varepsilon)$ 分别为 $S^{\mathrm{s}}_{P,\varepsilon}$ 和 $S^{\mathrm{u}}_{P,\varepsilon}$ 中的一点，由 M_ε 是双曲不变流形知可以选择 $P^{\mathrm{s}}_\varepsilon$ 和 $P^{\mathrm{u}}_\varepsilon$ 使得 $\boldsymbol{I}^{\mathrm{s}}_\varepsilon = \boldsymbol{I}^{\mathrm{u}}_\varepsilon$，对于任意 $P \in \Gamma$，当 $W^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc}}(M_0)$ 和 $W^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc}}(M_0)$ 的距离

$$d(P, \varepsilon) = |P^{\mathrm{s}}_\varepsilon P^{\mathrm{u}}_\varepsilon| = |\boldsymbol{x}^{\mathrm{s}}_\varepsilon - \boldsymbol{x}^{\mathrm{u}}_\varepsilon|, \tag{10}$$

在简单零点时，$W^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc}}(M_0)$ 和 $W^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc}}(M_0)$ 横截相交.

3　广义 Melnikov 函数

由 $P^{\mathrm{s}}_\varepsilon$ 和 $P^{\mathrm{u}}_\varepsilon$ 选择知 $d(P, \varepsilon)$ 在 $\boldsymbol{i}_1, \cdots, \boldsymbol{i}_m$ 方向的分量均为零，故 $d(P, \varepsilon)$ 仅取决于在 $\boldsymbol{r}$ 方向的有向分量

$$d(P,\varepsilon)=d(t_0,\boldsymbol{I},\theta_0,\mu,\varepsilon)=\frac{\langle \boldsymbol{r},P_\varepsilon^sP_\varepsilon^u\rangle}{|\boldsymbol{r}|}=\frac{\langle f^\perp(\alpha(t,\boldsymbol{I}),\boldsymbol{I}),\boldsymbol{x}_\varepsilon^s-\boldsymbol{x}_\varepsilon^s\rangle}{|f(\alpha(t_0,\boldsymbol{I}),\boldsymbol{I})|}. \tag{11}$$

Melnikov 方法的实质是给出式(11)一个1阶近似表达式,使之零点便于判断. 为此将 d 在 $\varepsilon=0$ 展开为 ε 的Taylor级数

$$d(t_0,\boldsymbol{I},\theta_0,\mu,\varepsilon)=d(t_0,\boldsymbol{I},\theta_0,\mu,0)+\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varepsilon}d(t_0,\boldsymbol{I},\theta_0,\mu,0)+O(\varepsilon^2), \tag{12}$$

其中

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}d(t_0,\boldsymbol{I},\theta_0,\mu,0)=\frac{\left\langle f^\perp(\alpha(t,\boldsymbol{I}),\boldsymbol{I}),\left.\frac{\partial\boldsymbol{x}_\varepsilon^s}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}-\left.\frac{\partial\boldsymbol{x}_\varepsilon^u}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\right\rangle}{|f(\alpha(t_0,\boldsymbol{I}),\boldsymbol{I})|}. \tag{13}$$

为进一步简化,令

$$\Delta^s(t)=\left\langle f^\perp(\alpha(t,\boldsymbol{I}),\boldsymbol{I}),\left.\frac{\partial\boldsymbol{x}_\varepsilon^s}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\right\rangle. \tag{14}$$

由微分方程组解对参数的可微性定理[8]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left.\frac{\partial\boldsymbol{x}_\varepsilon^s}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\right)=D_xf\cdot\left.\frac{\partial\boldsymbol{x}_\varepsilon^s}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}+D_If\cdot\left.\frac{\partial\boldsymbol{I}_\varepsilon^s}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}+g^x,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left.\frac{\partial\boldsymbol{I}_\varepsilon^s}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\right)=g^I, \tag{15}$$

其中导映射 D_xf、D_If 及函数 g^x 和 g^I 的变元均取

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{I},\theta,\mu,\varepsilon)=\left(\alpha(t+t_0,\boldsymbol{I}),\boldsymbol{I},\int^t\Omega(\alpha(s,\boldsymbol{I}),\boldsymbol{I})\mathrm{d}s+\theta_0,\mu,0\right), \tag{16}$$

将式(14)对 t 求导并将式(15)和(2)代入,得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta^s(t)=\left\langle D_xf^\perp,\left.\frac{\partial\boldsymbol{x}_\varepsilon^s}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\right\rangle+\left\langle f^\perp,D_xf\cdot\left.\frac{\partial\boldsymbol{x}_\varepsilon^s}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\right\rangle+\left\langle f^\perp,D_If\cdot\left.\frac{\partial\boldsymbol{I}_\varepsilon^s}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}+g^x\right\rangle. \tag{17}$$

利用 $\boldsymbol{f}^\perp$ 和 $\Delta^s(t)$ 的定义及内积的性质,经直接计算,得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta^s(t)=\mathrm{tr}(D_xf)\,\Delta^s(t)+\left\langle f^\perp,D_If\cdot\left.\frac{\partial\boldsymbol{I}_\varepsilon^s}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}+g^x\right\rangle. \tag{18}$$

式(18)是关于 $\Delta^s(t)$ 的1阶线性常微分方程,从0到 R 积分得到

$$\Delta^s(R)-\Delta^s(0)=\int_0^R\left\langle f^\perp,D_If\cdot\left.\frac{\partial\boldsymbol{I}_\varepsilon^s}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}+g^x\right\rangle\exp\left(-\int^{t+t_0}\mathrm{tr}(D_xf)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t. \tag{19}$$

由于 $\gamma(\boldsymbol{I})$ 是双曲鞍点,$f^\perp(\gamma(\boldsymbol{I}),\boldsymbol{I})=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}f(\gamma(\boldsymbol{I}),\boldsymbol{I})=0$. 注意到式(3)及 $f^\perp$ 的连续性和 $\left.\frac{\partial\boldsymbol{x}_\varepsilon^s}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$ 的有界性,有

$$\lim_{R\to+\infty}\Delta^s(R)=\lim_{t\to+\infty}\left\langle f^\perp(\alpha(t,\boldsymbol{I}),\boldsymbol{I}),\left.\frac{\partial\boldsymbol{x}_\varepsilon^s}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\right\rangle=0. \tag{20}$$

在式(19)中令 $R\to+\infty$,并以式(14)、(15)和(20)代入,得到

$$\left\langle f^\perp(\alpha(t_0,\boldsymbol{I}),\boldsymbol{I}),-\left.\frac{\partial\boldsymbol{x}_\varepsilon^s}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\right\rangle=\int_0^{+\infty}\left\langle f^\perp,D_If\cdot\int^{t+t_0}g^I\mathrm{d}s+g^x\right\rangle\exp\left(-\int^{t+t_0}\mathrm{tr}(D_xf)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t. \tag{21}$$

同理

$$\left\langle f^\perp(\alpha(t_0,\boldsymbol{I}),\boldsymbol{I}),-\left.\frac{\partial\boldsymbol{x}_\varepsilon^u}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\right\rangle=\int_{+\infty}^0\left\langle f^\perp,D_If\cdot\int^{t+t_0}g^I\mathrm{d}s+\right.$$

$$g^x\rangle\exp\left(-\int^{t+t_0}\mathrm{tr}(D_x f)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t. \tag{22}$$

定义广义 Melnikov 函数

$$M(\boldsymbol{I},\theta_0,\mu)=\int_{-\infty}^{+\infty}\langle f^{\perp},Df\cdot\int g^{I}\mathrm{d}s+g^{x}\rangle\exp\left(-\int^{t}\mathrm{tr}(D_x f)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t, \tag{23}$$

其中有关变元取值

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{I},\theta,\mu,\varepsilon)=\left(\alpha(t,\boldsymbol{I}),\boldsymbol{I},\int^{t}\Omega(\alpha(s,\boldsymbol{I}),\boldsymbol{I})\mathrm{d}s+\theta_0,\mu,0\right). \tag{24}$$

由式(21)、(22)和(23)借助换元部分,得到

$$\langle f^{\perp}(\alpha(t_0,\boldsymbol{I}),\boldsymbol{I}),\frac{\partial\boldsymbol{x}^{u}_{\varepsilon}}{\partial\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}-\frac{\partial\boldsymbol{x}^{s}_{\varepsilon}}{\partial\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}\rangle=M(\boldsymbol{I},\theta_0,\mu), \tag{25}$$

注意到 $\varepsilon=0$ 时 $W^s(M_0)$ 与 $W^u(M_0)$ 重合,故 $d(t_0,\boldsymbol{I},\theta_0,\mu,0)=0$,将式(25)和(13)代入式(12),得到

$$d(t_0,\boldsymbol{I},\theta_0,\mu,\varepsilon)=\varepsilon\frac{M(\boldsymbol{I},\theta_0,\mu)}{|f(\alpha(t_0,\boldsymbol{I}),\boldsymbol{I})|}+O(\varepsilon^2), \tag{26}$$

因而广义 Melnikov 函数是 $d(t_0,\boldsymbol{I},\theta_0,\mu,\varepsilon)$ 的1阶近似. 对于充分小的 ε,当且仅当 $M(\boldsymbol{I},\theta_0,\mu)$ 有简单零点时,$d(t_0,\boldsymbol{I},\theta_0,\mu,\varepsilon)$ 有简单零点,亦即 $d(P,\varepsilon)$ 有简单零点.

4 结　论

将研究混沌的Melnikov 方法推广到受小摄动带慢变角参数的平面可积系统. 对这类系统,计算式(23)给出对应于连结未受摄动平面可积系统双曲鞍点的同宿轨道的广义 Melnikov 函数,当广义 Melnikov 函数存在简单零点时,受摄动系统的稳定流形和不稳定流形横截相交,系统出现混沌.

当系统(2)是 Hamilton 可积系统时,注意到 $\mathrm{tr}\boldsymbol{D}_x\boldsymbol{f}=0$,本文结果与[2]中的结果一致.

虽然本文仅讨论了未受扰动系统有同宿轨道的情形,但对于具有异宿轨道构成异宿环的情形Melnikov 方法仍适用,只需计算对应于异宿轨道的广义 Melnikov 函数(23),其简单零点的存在表明系统将出现混沌.

[参　考　文　献]

[1] 刘曾荣. 混沌研究中Melnikov的方法[A]. 见:郭仲衡编. 近代数学和力学[C]. 北京:北京大学出版社,1987,269—290.

[2] Wiggins S. Global Bifurcations and Chaos[M]. Berlin: Springer_Verlag, 1988.

[3] Holmes P J. Averaging and chaotic motions in forced oscillations[J]. SIAM J Appl Math, 1980, **38**(1): 65—80; 1980, **40**(1): 167—168.

[4] 蒋继发,刘曾荣. 非 Hamilton 系统的次谐分叉和马蹄[J]. 应用数学学报,1987, **10**(4): 504—508.

[5] 陈立群,刘延柱. 准周期摄动平面非 Hamilton 可积系统中的混沌[J]. 上海交通大学学报,1996, **30**(11): 28—31.

[6] 陈立群. 科学中混沌概念的演化[J]. 自然杂志,1991, **14**(7): 619—624.

[7] Wiggins S. Normally Hyperbolic Invariant Manifolds in Dynamical Systems[M]. Berlin: Springer_Verlag, 1994.

[8] Hale J. Ordinary Differential Equations[M]. London: Robert E Krieger, 1980.

Chaos in Perturbed Planan Non_Hamiltonian Integrable Systems with Slowly_Varying Angle Parameters

CHEN Li_qun
(Department of Mechanics, Shanghai University; Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai 200072, P R China)

Abstract: The Melnikov method was extended to perturbed planan non_Hamiltonian integrable systems with slowly_varying angle parameters. Based on the analysis of the geometric structure of unperturbed systems, the condition of transversely homoclinic intersection was established. The generalized Melnikov function of the perturbed system was presented by applying the theorem on the differentiability of ordinary differential equation solutions with respect to parameters. Chaos may occur in the system if the generalized Melnikov function has simple zeros.

Key words: Melnikov method; perturbed integrable system; transversely homoclinic; chaos