应用数学和力学, 第 22 卷 第 11 期(2001 年 11 月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2001) 11_1187_06

广义 M_J 集的界与 J_集 Hausdorff 维数的估计*

刘向东[1], 焉德军[2], 朱伟勇[2], 王光兴[2]

(1. 鞍山钢铁学院 数理系, 鞍山 114001; 2 东北大学 信息科学与工程学院, 沈阳 110006)

(谢和平推荐)

摘要: 解析地给出了广义 M_J 集的界, 其中某些界在某种意义上是最佳的• 解决了应用逃逸时间等算法计算机构造其混沌分形图的首要问题, 并在此基础上通过线性逼近的方法给出了某些情况下 J_集 Hausdorff 维数的近似估计•

关 键 词: 广义 Mandelbrot 集; 广义 Julia 集; Hausdorff 维数
中图分类号: O189. 32; O211. 67 文献标识码: A

引 言

B. B. Mandelbrot1975 年提出“非规整几何”概念并建立起分形几何的理论• 现在, 分形几何已被认为是描述非线性问题的最好的一种语言与工具• 它的建立与发展, 使动力系统、自组织与耗散结构、湍流、分叉理论、神经元网络等一大批学科得到了发展• 分形理论作为非线性科学的理论基础正越来越多的受到人们的重视[1]• 逃逸时间算法是构造 Julia 和 Mandelbrot 分形集(简记为 J_集和 M_集) 经典、常用的方法[2], 但该方法应用时需首先确定分形集的界• 以往界的确定一般靠对特殊问题的估计与尝试, 缺少统一的解决方法, 而估计不好时会出现集合构造不全或未能展示细节等问题• 本文解析地给出广义 M_J 集的界, 其中某些界在某种意义上是最佳的• 不仅解决了应用该算法构造其混沌分形集的首要问题, 并在此基础上给出了某些情况下 J_集 Hausdorff 维数的近似估计•

1 $z^n + c$ M_J 集的界与维数

1.1 $z^n + c$ M_集的界

定义 1[3, 4] $f_{(n,c)}(z) = z^n + c\ (n \geqslant 2)$ 的充满的 J_集

$$F(f_{(n,c)}) \stackrel{\triangle}{=} \left\{ z \in \mathbf{C}: \left\{ f^k_{(n,c)}(z) \right\}_{k=1}^{\infty} \text{ 有界} \right\}, \tag{1}$$

J_集 $J(f_{(n,c)}) \stackrel{\triangle}{=} \partial F(f_{(n,c)})$, 其中 $\partial(\bullet)$ 代表集合的边界•

利用 Montel[3] 定理, 可以得到 M_集的常用等价定义:

* 收稿日期: 1999_04_26; 修订日期: 2001_03_20
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(69974008 0); 国家博士后基金资助项目
作者简介: 刘向东(1967—), 男, 山东人, 副教授, 博士, (Email: wyzhu@mail. neu. edu. cn).

定义 2[3, 4] $f_{(n,c)}(z)=z^n+c\ (n\geqslant 2)$ 的 M_集

$$M_n \overset{\triangle}{=} \left\{ c\in \mathbf{C}: f_{(n,c)}(z)\ \text{的 J\_集连通} \right\} = \left\{ c\in \mathbf{C}: \text{复序列} \left\{ f^k_{(n,c)}(0) \right\}_{k=1}^{\infty} \text{有界} \right\}. \tag{2}$$

定理 1 $f_{(n,c)}(z)=z^n+c\ (n\geqslant 2)$ 的 M_集

$$M_n \subseteq \left\{ c\in \mathbf{C}: |c| \leqslant \sqrt[n-1]{2} \right\}.$$

证明 $\left\{ f^k_{(n,c)}(0) \right\}_{k=1}^{\infty}$ 有界等价于实序列 $\left\{ |f^k_{(n,c)}(0)| \right\}_{k=1}^{\infty}$ 有界.

当 $|c| > \sqrt[n-1]{2}$ 时,

$$|f^2_{(n,c)}(0)| = |c^n+c| > |c|(\sqrt[n-1]{2})^{n-1} - |c| = |c|.$$

若又有 $|w|>|c|$, 则

$$|f_{(n,c)}(w)| = |w^n+c| > |w|(\sqrt[n-1]{2})^{n-1} - |w| = |w|, \tag{3}$$

所以序列 $\left\{ |f^k_{(n,c)}(0)| \right\}_{k=1}^{\infty}$ 严格单调增. 若 $|f^k_{(n,c)}(0)| \to \alpha < +\infty\ (k\to +\infty)$, 则 $\mathbf{C}$ 平面圆周 $|z| = \alpha\ (\alpha > \sqrt[n-1]{2})$ 上存在点 z 满足 $|f_{(n,c)}(z)| = |z|$, 与(3) 式矛盾. 所以 $|f^k_{(n,c)}(0)| \to +\infty\ (k\to +\infty)$, 得到

$$M_n \subseteq \left\{ c\in C: |c| \leqslant \sqrt[n-1]{2} \right\}.$$

由于 n 为偶数时 $-\sqrt[n-1]{2}\in M_n$, 说明定理 1 给出的界是不可改进的.

1.2 z^n+c J_集的界与维数估计

定理 2 $f_{(n,c)}(z)=z^n+c\ (n\geqslant 2)$ 的连通型 J_集 $J(f_{(n,c)})$ 满足:

$$J(f_{(n,c)}) \subseteq \left\{ z\in \mathbf{C}: |z| \leqslant \sqrt[n-1]{2} \right\}.$$

证明 因为 $J(f_{(n,c)}) = \partial F(f_{(n,c)})$, 我们只需证明 $F(f_{(n,c)}) \subseteq \left\{ z\in \mathbf{C}: |z| \leqslant \sqrt[n-1]{2} \right\}$.

由定理1, $|c| \leqslant \sqrt[n-1]{2}$. 当 $|z| > \sqrt[n-1]{2}$ 时,

$$|f_{(n,c)}(z)| = |z^n+c| > |z|(\sqrt[n-1]{2})^{n-1} - \sqrt[n-1]{2} = 2|z| - \sqrt[n-1]{2} > |z|, \tag{4}$$

即序列 $\left\{ |f^k_{(n,c)}(z)| \right\}_{k=1}^{\infty}$ 严格单调增, 且它也不能有有限的极限, 所以 $|f^k_{(n,c)}(z)| \to +\infty\ (k\to +\infty)$, 得到

$$F(f_{(n,c)}) \subseteq \left\{ z\in \mathbf{C}: |z| \leqslant \sqrt[n-1]{2} \right\}.$$

一般地, z^2+c 的普通 J_集在圆 $\left\{ z\in \mathbf{C}: |z| \leqslant \frac{1+\sqrt{1+4|c|}}{2} \right\}$ 内.

引理 1 设 Γ 为复平面 $\mathbf{C}$ 上的回路,

a) 如果 $c\in \mathbf{C}$ 位于 Γ 内, 则 $f^{-1}_{(n,c)}(\Gamma)$ 是以 Γ 的内部的逆象为它的内部的回路.

b) 若 $c\in \mathbf{C}$ 在 Γ 上, 则 $f^{-1}_{(n,c)}(\Gamma)$ 为从一点引出 n 个回路的图形, 使得 Γ 的内部的逆象为 n 个回路的内部.

c) 若 $c\in \mathbf{C}$ 在 Γ 外, 则 $f^{-1}_{(n,c)}(\Gamma)$ 为 n 个不交的回路, 使得 Γ 的内部的逆象为 n 个回路的内部.

证明详略.

定理 3 对模充分大的 c 和 $n\geqslant 2$,

$$J(f_{(n,c)}) \subseteq \left\{ z: |z| \leqslant \sqrt[n]{2c} \right\},$$

且全不连通. $J(f_{(n,c)})$ 满足

$$\dim_B J(f_{(n,c)}) = \dim_H J(f_{(n,c)}) \approx \frac{n}{n-1}\frac{\ln n}{\ln c}.$$

证明　不妨 $\left|\frac{c}{2}\right| > |\sqrt[n]{2c}| > \sqrt[n-1]{2}$. 若 $|z| > |\sqrt[n]{2c}|$, 与定理1、2 类似, $|f^k_{(n,c)}(z)| \to +\infty (k \to +\infty)$, 一定无界. 所以,

$$J(f_{(n,c)}) \subseteq \left\{z: |z| \leqslant |\sqrt[n]{2c}|\right\}.$$

这时, $c \notin \left\{z: |z| \leqslant |\sqrt[n]{2c}|\right\}$, 由引理 1, $f^{-1}_{(n,c)}$ 将圆盘 $\left\{z: |z| \leqslant |\sqrt[n]{2c}|\right\}$ 映射为 n 个不相交的部分, 所以 $J(f_{(n,c)})$ 全不连通. $f^{-1}_{(n,c)}$ 的 n 个分枝对 $J(f_{(n,c)})$ 是压缩的, $J(f_{(n,c)})$ 是这 n 个分枝定义的 n 个压缩变换构成的非线性 IFS 的吸引子.

对其中某一分枝及 $z_1, z_2 \in J(f_{(n,c)})$, 一定有 $z_1, z_2 \in \left\{z: |z| \leqslant |\sqrt[n]{2c}|\right\}$, 从而

$$|\sqrt[n]{z_1 - c} - \sqrt[n]{z_2 - c}| =$$

$$\frac{|z_1 - z_2|}{|\sqrt[n]{(z_1 - c)^{n-1}} - \sqrt[n]{(z_1 - c)^{n-2}(z_2 - c)} + \cdots + \sqrt[n]{(z_2 - c)^{n-1}}|},$$

由于 $|c|$ 远远大于 $|z_1|$、$|z_2|$,

$$\frac{|z_1 - z_2|}{\left|n\left(\frac{3c}{2}\right)^{(n-1)/n}\right|} < |\sqrt[n]{z_1 - c} - \sqrt[n]{z_2 - c}| < \frac{|z_1 - z_2|}{\left|n\left(\frac{c}{2}\right)^{(n-1)/n}\right|},$$

对 n 个不交的、由压缩比分别为 $\frac{1}{n}\left|\frac{2}{c}\right|^{(n-1)/n}$ 和 $\frac{1}{n}\left|\frac{2}{3c}\right|^{(n-1)/n}$ 的压缩映射构成的线性 IFS, 它们吸引子的 Hausdorff 维数与盒维数相等[5], 其 Hausdorff 维数 s_1 和 s_2 分别满足:

$$n\left(\frac{1}{n}\left|\frac{2}{c}\right|^{(n-1)/n}\right)^{s_1} = 1, \tag{5}$$

$$n\left(\frac{1}{n}\left|\frac{2}{3c}\right|^{(n-1)/n}\right)^{s_2} = 1. \tag{6}$$

求解(5)、(6)得

$$s_1 = \frac{\ln n}{\ln n + \frac{n-1}{n}(\ln c - \ln 2)} \approx \frac{n}{n-1}\frac{\ln n}{\ln c},$$

$$s_2 = \frac{\ln n}{\ln n + \frac{n-1}{n}(\ln c + \ln 3 - \ln 2)} \approx \frac{n}{n-1}\frac{\ln n}{\ln c},$$

所以, 对模充分大的 c, 有

$$\dim_B J(f_{(n,c)}) = \dim_H J(f_{(n,c)}) \approx \frac{n}{n-1}\frac{\ln n}{\ln c}.$$

引理 2　对模充分小的 c, $f_{(n,c)}(z) = z^n + c (n \geqslant 2)$ 靠近 0 的吸引不动点 z^* 满足 $|z^*| \leqslant 2|c|$.

证明　由临界点定理[3], $f^k_{(n,c)}(0) \to z^* (k \to +\infty)$.

不妨 $|c| < \sqrt[n-1]{(1/2^n)}$, 则

$$|f^2_{(n,c)}(0)| = |c^n + c| \leqslant |c^n| + |c| = (|c|^{n-1} + 1)|c| < 2|c|,$$

而若 $|w| < 2|c|$, 则

$$|f_{(n,c)}(w)| = |w^n + c| \leqslant |w^n| + |c| \leqslant$$

$$2^n|c|^n + |c| \leqslant (2^n|c|^{n-1} + 1)|c| < 2|c|. \tag{7}$$

这样, $|f^k_{(n,c)}(0)| < 2|c|$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, 所以 $|z^*| \leqslant 2|c|$.

引理3 对模充分小的 c 和 $n \geqslant 2$, 若 $|z| \leqslant \sqrt[n-1]{1-10|c|}$, 则 z^n+c 靠近0的吸引不动点 z^* 吸引 z.

证明 对模充分小的 c, z^n+c 靠近0的吸引不动点 z^* 的吸引域 A 近似于开单位圆盘, 下面估计 A 的界.

当 $\frac{1}{2}<|z| \leqslant \sqrt[n-1]{1-10|c|}$ 时, 一定成立 $5|c| \leqslant |z|(1-|z|^{n-1})$. 再利用引理2,

$$|f_{(n,c)}(z)-z^*|=|z^n+c-z^*| \leqslant |z|^n+|c|+|z^*| \leqslant 3|c|+|z|^n \leqslant |z|-2|c| \leqslant |z-z^*|$$

所以 z 在 A 内. 由于 A 为包含 z^* 的开单连通区域, 所以对 $\forall z$ 有: $\left\{z: |z| \leqslant \sqrt[n-1]{1-10|c|}\right\} \subseteq A$.

定理4 对模充分小的 c 和 $n \geqslant 2$, $J(f_{(n,c)}) \subseteq \left\{z: \sqrt[n-1]{1-10|c|} \leqslant z \leqslant \sqrt[n-1]{2}\right\}$, 是拟圆. $J(f_{(n,c)})$ 满足

$$1 \leqslant \dim_H J(f_{(n,c)}) \leqslant \frac{\ln n}{\ln n+\frac{n-1}{n}\ln\left(\sqrt[n-1]{1-10|c|}-|c|\right)},$$

证明 不妨 $|c| \leqslant \sqrt[n-1]{2}$. 当 $|z|>\sqrt[n-1]{2}$ 时,

$$|f_{(n,c)}(z)|=|z^n+c|>|z|(\sqrt[n-1]{2})^{n-1}-\sqrt[n-1]{2}=2|z|-\sqrt[n-1]{2}>|z|.$$

即序列 $\left\{|f^k_{(n,c)}(z)|\right\}_{k=1}^{\infty}$ 严格单调增. 这一增大过程不可能有有限的极限, 所以 $|f^k_{(n,c)}(z)| \to +\infty (k \to +\infty)$, 得到

$$J(f_{(n,c)}) \subseteq \left\{z: \sqrt[n-1]{1-10|c|} \leqslant |z| \leqslant \sqrt[n-1]{2}\right\}.$$

这时, 圆盘 $\left\{z: |z| \leqslant \sqrt[n-1]{2}\right\}$ 和圆盘 $\left\{z: |z| \leqslant \sqrt[n-1]{1-10|c|}\right\}$ 中均含 c, 由引理1, $f^{-1}_{(n,c)}$ 将圆环 $\left\{z: \sqrt[n-1]{1-10|c|} \leqslant |z| \leqslant \sqrt[n-1]{2}\right\}$ 映射为 n 个刚刚相交的部分, 所以 $J(f_{(n,c)})$ 连通. $f^{-1}_{(n,c)}$ 的 n 个分枝对 $J(f_{(n,c)})$ 是压缩的, $J(f_{(n,c)})$ 是由 $f^{-1}_{(n,c)}$ 的 n 个分枝定义的 n 个压缩变换构成的刚触及的非线性 IFS 的吸引子.

不妨从 $|z|=1$ 开始. 曲线每次经 $f^{-1}_{(n,c)}$ 的 n 个分支作用之后, 仍然得到一个围绕 c 的闭曲线, 其极限为拟圆.

对其中某一分枝及 $z_1, z_2 \in J(f_{(n,c)})$, 一定有 $z_1, z_2 \in \left\{z: \sqrt[n-1]{1-10|c|} \leqslant |z| \leqslant \sqrt[n-1]{2}\right\}$, 从而

$$|\sqrt[n]{z_1-c}-\sqrt[n]{z_2-c}|=\frac{|z_1-z_2|}{\left|\sqrt[n]{(z_1-c)^{n-1}}+\sqrt[n]{(z_1-c)^{n-2}(z_2-c)}+\cdots+\sqrt[n]{(z_2-c)^{n-1}}\right|},$$

由于 $|c|$ 远远小于 $|z_1|$、$|z_2|$,

$$|\sqrt[n]{z_1-c}-\sqrt[n]{z_2-c}| \leqslant \frac{|z_1-z_2|}{\left|n\left(\sqrt[n-1]{1-10|c|}-|c|\right)^{(n-1)/n}\right|},$$

所以 $\dim_H J(f_{(n,c)})<s$, 其中 s 满足:

$$n\left(\frac{1}{n}\left|\frac{1}{\sqrt[n-1]{1-10|c|}-|c|}\right|^{(n-1)/n}\right)^s=1. \tag{8}$$

求解(8)得

$$s=\frac{\ln n}{\ln n+\frac{n-1}{n}\ln\left(\sqrt[n-1]{1-10|c|}-|c|\right)}.$$

由于$|c|$充分小时$J(f_{(n,c)})$是拟圆, 其Hausdorff维数一定大于等于1, 所以有

$$1 \leqslant \dim_H J(f_{(n,c)}) \leqslant \frac{\ln n}{\ln n + \frac{n-1}{n}\ln\left(\sqrt[n-1]{1-10|c|}-|c|\right)}$$

2 $z^3+az+b(a\neq 0)$ M_J集的界

2.1 $z^3+az+b(a\neq 0)$ M_集的界

定义3[5] $f_{[a,b]}(z)=z^3+az+b(a\neq 0)$的充满的J_集

$$F_{[a,b]} \triangleq \left\{ z\in \mathbf{C}: \left\{ f^k_{[a,b]}(z) \right\}_{k=1}^{\infty} \text{有界} \right\}. \tag{9}$$

J_集$J(f_{[a,b]}) \triangleq \partial F(f_{[a,b]})$.

定义4[5] $f_{[a,b]}(z)=z^3+az+b(a\neq 0)$的M_集

$$M_{[a,b]} \triangleq \left\{ (a,b): a,b\in \mathbf{C}, \text{且} f_{[a,b]}(z) \text{的J\_集连通} \right\} =$$
$$\left\{ (a,b): a,b\in \mathbf{C}, \left\{ f^k_{[a,b]}\left(\sqrt{\frac{-a}{3}}\right) \right\}_{k=1}^{\infty} \text{与} \left\{ f^k_{[a,b]}\left(-\sqrt{\frac{-a}{3}}\right) \right\}_{k=1}^{\infty} \text{都有界} \right\}$$

引理4 $x,y\in \mathbf{C}$, $\max\left\{ |x+y|, |x-y| \right\} \geqslant \sqrt{|x^2|+|y^2|}$.

证明详略.

定理5 $f_{[a,b]}(z)=z^3+az+b(a\neq 0)$的M_集$M_{[a,b]}$在四维空间中有界.

证明 若$|b|\geqslant \sqrt{|a|+2}$, 由引理4, $f_{[a,b]}\left(\sqrt{\frac{-a}{3}}\right)$与$f_{[a,b]}\left(-\sqrt{\frac{-a}{3}}\right)$中至少有一个模大于$\sqrt{\frac{4|a^3|}{27}+|b^2|} \geqslant \sqrt{\frac{4|a^3|}{27}+|a|+2}$, 记其为$w$, $|w|>|b|$.

$$|f_{[a,b]}(w)| = |w^3+aw+b| \geqslant |w^3|-|aw|-|b| \geqslant$$
$$|w|(|w^2|-|a|)-|b| > |w|\left(\frac{4|a^3|}{27}+2\right)-|w| > |w|$$

即$\left\{ |f^k_{[a,b]}(w)| \right\}_{k=1}^{\infty}$严格单调增, 且不可能有限极限, 所以$|f^k_{[a,b]}(w)| \to +\infty (k\to +\infty)$, 得

$$M_{[a,b]} \subseteq \left\{ (a,b): a,b\in \mathbf{C}, \text{且} |b| < \sqrt{|a|+2} \right\}. \tag{10}$$

当$|b|<\sqrt{|a|+2}$时, 又若$|a|>6$, 则$\left|\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{-a}{3}}\right| > \left|\sqrt{\frac{-a}{3}}\right| + \sqrt{|a|+2}$, 所以$f_{[a,b]}\left(\sqrt{\frac{-a}{3}}\right)$与$f_{[a,b]}\left(-\sqrt{\frac{-a}{3}}\right)$中至少一个模大于$\left|\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{-a}{3}}\right|$. 仍记其为$w$, 则

$$|f_{[a,b]}(w)| = |w^3+aw+b| \geqslant |w^3|-|aw|-|b| > |w|(|w|^2-|a|)-$$
$$\sqrt{|a|+2} > |w|\left(\frac{4|a|^3}{27}-3\right)-|w| > |w|$$

所以$\left\{ |f^k_{[a,b]}(w)| \right\}_{k=1}^{\infty}$严格单调增, 且不可能有限极限, $|f^k_{[a,b]}(w)| \to +\infty (k\to +\infty)$, 得到

$$M_{[a,b]} = \left\{ (a,b): |a| \leqslant 6, |b| \leqslant 2\sqrt{2} \right\}.$$

2.2 $z^3+az+b(a\neq 0)$ J_集的界

定理6 $z^3+az+b(a\neq 0)$的连通型J_集$J(f_{[a,b]})$满足:

$$J(f_{[a,b]}) \subseteq \left\{ z\in \mathbf{C}: |z| \leqslant 3 \right\}.$$

证明详略.

3 结　语

本文给出了 z^n+c 和 $z^3+az+b(a\neq 0)$ 的M_J 集界, 其中某些界在某种程度上是最佳的; 为应用逃逸时间算法构造其混沌分形图提供了一般化的方法, 并在此基础上通过线性逼近的方法给出了某些情况下 J_集 Hausdorff 维数的近似估计•

[参 考 文 献]

[1] Barnsley M F. Fractal Everywhere[M]. Boston: Academic Press Professional, 1993.

[2] Peitgen, Heinz_Otto, Richter P H. The Beauty of Fractals[M]. Berlin: Springer_Verlag, 1986.

[3] Bodil Branner. The mandelbrot set[A]. In: Robert L. Devaney, Linda Keen, Eds. Chaos and Fractal, The Mathematics Behind the Computer Graphics, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics[C]. Vol. 39. Rhode Island: American Mathematical Society Providence, 1988, 75—106.

[4] 任福尧. 复解析动力学系统[M]. 上海: 复旦大学出版社, 1997.

[5] Falconer K J. Fractal Geometry Mathematical Foundation and Applications[M]. London: John Wiley and Sone, 1990.

The Bounds of the General M and J Sets and the Estimations for the Hausdorff' s Dimension of the General J Set

LIU Xiang_dong[1], YAN De_jun[2], ZHU Wei_yong[2]

(1. Department of Mathematics &Physics, Anshan Institute of Iron &Steel Technology, Anshan 114001, P R China;

2. School of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110006, P R China)

Abstract: The bounds of the general M and J sets were analytically offered. Some of the bounds were optimal in certain meaning. It not only solved the primary problem of the construction of fractal sets by escape time algorithm, and followed from the conclusion, but also offered two estimations of some special Julia set' s Hausdorff' s dimension by approximate linearization method.

Key words: general Mandelbrot set; general Julia set; Hausdorff' s dimension