应用数学和力学, 第 22 卷 第 11 期(2001 年 11 月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2001) 11_1217_04

一类反应扩散方程解的熄灭现象*

陈松林

(安徽工业大学 数理系, 安徽马鞍山市 243002)

(戴世强推荐)

摘要: 利用能量估计方法讨论了下述反应扩散方程的初边值问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta u-\lambda|u|^{\gamma-1}u-\beta u \qquad ((x,t)\in\Omega\times(0,+\infty)),$$

$$u(x,t)|_{\partial\Omega\times(0,+\infty)}=0,$$

$$u(x,0)=u_0(x)\in H_0^1(\Omega)\cap L^{1+\gamma}(\Omega) \qquad (x\in\Omega)$$

解的渐近性态, 分别给出解熄灭的充分条件和必要条件• 这里 $\lambda>0$, $\gamma>0$, $\beta>0$ 为常数, $\Omega\subset\mathbf{R}^N$ 为有界域• 文末给出说明文中方法处理高阶方程的例子•

关 键 词: 反应扩散方程; 熄灭; L^p 估计; Bernoulli 方程
中图分类号: O175.29 文献标识码: A

1 引言与引理

有关反应扩散方程初边值问题解的整体(局部)存在性渐近性质的讨论十分活跃[1~9]• 应用 $\partial u/\partial t=\Delta u-\lambda|u|^{\gamma-1}u$ 的初边值问题[2,3] 的有关结果, 文[4] 通过一个变换对方程 $\partial u/\partial t=\Delta u-\lambda|e^{\beta t}u|^{\gamma-1}u-\beta u$ 的第三边值问题, 给出类似于[3] 的解的熄灭现象的充要条件• 本文则讨论下述初边值问题

$$\partial u/\partial t=\Delta u-\lambda|u|^{\gamma-1}u-\beta u \qquad ((x,t)\in\Omega\times(0,+\infty)), \tag{1}$$

$$u(x,t)|_{\partial\Omega\times(0,+\infty)}=0, \tag{2}$$

$$u(x,0)=u_0(x)\in H_0^1(\Omega)\cap L^{1+\gamma}(\Omega), \tag{3}$$

其中 $\Omega\subset\mathbf{R}^N(N\geqslant 2)$ 为有界光滑区域, $\partial\Omega$ 为其边界, λ, β, γ 为正参数, 给出其解熄灭的充分条件和必要条件• 问题(1) ~ (3) 曾在趋药学研究中作为数学模型导出[8]•

为了主要结果的证明, 先给出两个引理:

引理 1 设 $y(t)\geqslant 0$ 满足下述不等式

$$\partial y/\partial t+Cy^{k/2}+2\beta y\leqslant 0 \qquad (k\in(1,2);\ t>0),\ y(0)>0$$

则有如下指数型衰减估计

$$y(t)\leqslant\Big[\Big(y(0)^{(2-k)/2}+C/(2\beta)\Big)e^{-(2-k)\beta t}-C/(2\beta)\Big]^{2/(2-k)} \qquad (t\in(0,T_0)),$$

---

* 收稿日期: 1999_12_14; 修订日期: 2001_03_20
基金项目: 安徽省高校中青年学科带头人培养基金资助项目; 教委科研项目基金资助项目(ggJL0166)
作者简介: 陈松林(1964—), 男, 副教授, 硕士, 主攻方向: 微分方程解的渐近理论, 已发表论文 20 余篇.

$$y(t)\equiv 0 \qquad (t\in(T_0,+\infty))\cdot$$

证明　考虑 Bernoulli 方程

$$\mathrm{d}y/\mathrm{d}t+Cy^{k/2}+2\beta y=0 \qquad (t>0),$$

$$y(0)>0,\ y(t)\geqslant 0,$$

按照标准的方法,通过解此方程和应用比较定理,不难给出上述估计•

引理 2[2]　设 $\lambda>0$, $\gamma\geqslant 1$, 则存在常数 C, T', 使

$$\mathrm{d}y/\mathrm{d}s+(\gamma-1)(1-\beta\rho^{\gamma-1})y\geqslant -2(\gamma+1)E_0>0,$$

$$y(0)>0$$

的解满足 $y(s)>C$, $s\in(T',+\infty)$• 上面的 $E_0<0$, 和 $\rho>0$ 由(11) 式选定•

定义　若存在 $T_0\in(0,+\infty)$, 对问题(1) ~ (3) 的解 $u(x,t)$ 成立

$$u(x,t)\equiv 0 \quad \text{a.e.} \quad (x,t)\in\Omega\times[T_0,+\infty),$$

则称解 $u(x,t)$ 在有限时间 $T\equiv\inf T_0$ 内熄灭•

2 主要结果

定理 1　设 $\lambda>0$, $\gamma\in(0,1)$, $\|u_0\|>0$, 则问题(1) ~ (3) 的解 $u(x,t)$ 将熄灭, 并有

$$\|u\|\leqslant\left[\left(\|u_0\|_2^{(2-k)/2}+C/(2\beta)\right)\mathrm{e}^{(2-k)\beta t}-C/(2\beta)\right]^{2/(2-k)} \qquad (t\in[0,T_0)), \tag{4}$$

$$\|u\|=0, \qquad (t\in[T_0,+\infty)),$$

其中 C, T_0 均为与 $u(x,t)$ 无关的常数, $\|\cdot\|$ 表示 L^2 范数, $\|\cdot\|_p$ 今后用于表示 L^p 范数, $k=[\partial N(1-\gamma)+4(1+\gamma)]/[N(1-\gamma)+4]$

证明　用 $u(x,t)$ 乘方程(1) 的两边后关于 x 在 Ω 上积分得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|^2+\|\nabla u\|^2+\lambda\|u\|_{1+\gamma}^{1+\gamma}+\beta\|u\|^2=0\cdot \tag{5}$$

由 Gagliardo_Nirenberg 不等式[1, 5]有

$$\|u\|\leqslant C\|u\|_{\gamma+1}^{1-\theta}\cdot\|\nabla u\|^{\theta}, \tag{6}$$

其中 $\theta=N(1-\gamma)/[N(1-\gamma)+2(1+\gamma)]$, C 为某常数• 由于 $\gamma\in(0,1)$, 易知 $\theta\in(0,1)$, 若取 $k=[2N(1-\gamma)+4(1+\gamma)]/[N(1-\gamma)+4]$ 对(6) 式两边 k 次方后应用 Hölder 不等式[6]有

$$\|u\|^k\leqslant C_\varepsilon\|u\|_{\gamma+1}^{\gamma+1}+\varepsilon\|\nabla u\|^2, \tag{7}$$

其中任意 $\varepsilon>0$, C_ε 为与 ε 有关的正常数•

由于 $\gamma\in(0,1)$, 由 k 的表达式知 $k\in(1,2)$• 选取合适的 $\varepsilon>0$, 使得存在 $C>0$, 将(7) 代入(5) 式后有:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|^2\leqslant -C\|u\|^k-2\beta\|u\|^2\cdot$$

在引理 1 中令 $y=\|u\|^2\geqslant 0$, $y(0)=\|u_0\|^2$ 即得(4) 式•

定理 2　设 $\lambda>0$, $\gamma\geqslant 1$, $\|u_0\|>0$, 则问题(1) ~ (3) 的解不会熄, 且有估计式

$$\|u\|\geqslant C\exp(-\rho^{1-\gamma}t) \qquad (t\in(T_1,+\infty)),$$

其中 C, ρ, T_1 均为不依赖于 $u(x,t)$ 的正常数•

证明　若 $\gamma=1$, (1) ~ (3) 成为线性问题, 其解不会熄灭, 下面设 $\gamma>1$•

类似于[2], 作变换

$$v(x,s)=\rho e^{s}u(x,\rho^{\gamma-1}s),$$
$$s=\rho^{1-\gamma}t,$$

其中 ρ 为待定常数, 此时(1) ~ (3) 变换为

$$\partial v/\partial s-\rho^{\gamma-1}\Delta v+\lambda e^{(1-\gamma)s}|v|^{\gamma-1}v-v+\beta\rho^{\gamma-1}v=0. \tag{8}$$

分别用 v 和 $\frac{\partial v}{\partial s}$ 乘(8) 式的两边后对 x 在 Ω 上积分得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\|v\|^2+\rho^{\gamma-1}\|\nabla v\|^2+\lambda e^{(1-\gamma)s}\|v\|_{\gamma+1}^{\gamma+1}-(1-\beta\rho^{\gamma-1})\|v\|^2=0, \tag{9}$$

和

$$\left\|\frac{\partial v}{\partial s}\right\|^2+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{1}{2}\rho^{\gamma-1}\|\nabla v\|^2+\frac{\lambda}{\gamma+1}e^{(1-\gamma)s}\|v\|_{\gamma+1}^{\gamma+1}-\frac{1-\beta\rho^{\gamma-1}}{2}\|v\|^2\right]=$$
$$-\frac{\lambda}{\gamma+1}(\gamma-1)e^{(1-\gamma)s}\|v\|_{\gamma+1}^{\gamma+1}\leqslant 0. \tag{10}$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}E(s)}{\mathrm{d}s}\equiv\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{1}{2}\rho^{\gamma-1}\|\nabla v\|^2+\frac{\lambda}{\gamma+1}e^{(1-\gamma)s}\|v\|_{\gamma+1}^{\gamma+1}-\frac{1-\beta\rho^{\gamma-1}}{2}\|v\|^2\right]\leqslant 0,$$

故有 $E(s)\leqslant E(0)\equiv E_0$,

这里 $E_0=\frac{1}{2}\rho^{\gamma-1}\|\nabla v(\cdot,0)\|^2+\frac{\lambda}{\gamma+1}e^{(1-\gamma)s}\|v(\cdot,0)\|_{\gamma+1}^{\gamma+1}-\frac{1-\beta\rho^{\gamma-1}}{2}\|v(\cdot,0)\|^2=$

$$\rho^{\gamma+1}\left[\frac{1}{2}\|\nabla u_0\|^2+\frac{\lambda}{\gamma+1}\|u_0\|_{\gamma+1}^{\gamma+1}\right]-\frac{1-\beta\rho^{\gamma-1}}{2}\rho^2\|u_0\|^2, \tag{11}$$

选取 ρ 充分小, 使 $E_0<0$, $1-\beta\rho^{\gamma-1}>0$, 于是有

$$-\lambda e^{(1-\gamma)s}\|v\|_{\gamma+1}^{\gamma+1}\geqslant-(\gamma+1)E_0+\frac{\rho^{\gamma-1}(\gamma+1)}{2}\|\nabla v\|^2-\frac{1-\beta\rho^{\gamma-1}}{2}(1+\gamma)\|v\|^2, \tag{12}$$

由(12), (9) 式得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\|v\|^2+(\gamma-1)(1-\beta\rho^{\gamma-1})\|v\|^2\geqslant-2(\gamma+1)E_0>0.$$

在引理2 中令 $y=\|v\|^2$, $y(0)=\|v(\cdot,0)\|^2=\|u_0\|^2>0$ 即知存在常数 $C>0$, 使得

$$\|v\|^2>C,$$

再由所做变换得证本定理.

3 举 例

L^p 积分模估计方法还可以应用到高阶方程、退化抛物型方程(组)[3,7] 等领域.

例 考虑高阶方程的初边值问题

$$\partial u/\partial t+\Delta^2 u+\lambda|u|^{\gamma-1}u+\beta u=0 \qquad ((x,t)\in\Omega\times(0,+\infty)),$$
$$\partial^i u/\partial\nu^i|_{\partial\Omega\times(0,+\infty)}=0 \qquad (i=0,1),$$
$$u(x,0)=u_0(x) \qquad (x\in\Omega),$$

这里 $\lambda>0$, $\gamma\in(0,1)$, $\partial/\partial\nu$ 表示 $\partial\Omega$ 上的单位外法向导数. 仿定理1 的作法, 成立下面的能量等式

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|^2+\|\Delta u\|^2+\lambda\|u\|_{\gamma+1}^{\gamma+1}+\beta\|u\|^2=0.$$

根据 Gagliardo_Nirenberg 不等式和 Hölder 不等式, 按定理1 的证明过程可有估计

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|^2\leqslant-C\|u\|^{k_1(1-\theta/2)}-2\beta\|u\|^2,$$

其中 k_1, θ 分别由Gagliardo_Nirenberg不等式和H└lder不等式给出, 由引理1及定理1得形如(4)的估计

$$\|u\| \leqslant \left[\left(\|u_0\|^{(2-h)/2} + C/2\beta\right) e^{(h-2)\beta t} - \frac{C}{2\beta}\right]^{2/2-h} \qquad (t \in [0, T_0)),$$

$$\|u\| \equiv 0 \qquad (t \in [T_0, +\infty)),$$

其中 $h = k_1(1-\theta/2)$, 且有 $1 < h < 2$•

[参 考 文 献]

[1] Ladyzenska O A, Solonnikav V A, Vral' tseva N N. Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type[M]. Providence R I: Amer Math Soc, 1968.

[2] 顾永耕. 抛物型方程的解熄灭(extinction)的充要条件[J]. 数学学报, 1994, **37**(1): 73—79.

[3] Tsutsumi M. On solution of some doubly nonlinear degenerate parabolic equations with absorption [J]. J Math Anal Appl, 1988, **132**(1): 187—212.

[4] 蔡日增. 一类半线性抛物型方程的解熄灭现象[J]. 南京大学学报数学半年刊, 1995, **12**(1): 116—120.

[5] Vladimir G M. Solbolev Spaces[M]. Berlin, Herdelberg, New York, Tokyo: Spring_Verlag, 1995.

[6] 吉耳巴格 D, 塔丁格 N S. 二阶椭圆型偏微分方程[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1981.

[7] Friedman A. Partial Differential Equations of Parabolic Type[M]. Fla: Krieger Malabar, 1983.

[8] Lin C S, Ni W M, Takagi I. Large amplitude stationary solutions to a chemotaxis system[J]. J Diff Eqns, 1988, **72**(1): 1—27.

[9] 陈松林. 一个反应扩散方程解的熄灭行为[J]. 数学研究与评论, 1998, **18**(3): 583—586.

The Extinction Behavior of the Solutions for a Class of Reaction_Diffusion Equations

CHEN Song_lin

(Department of Mathematics Physics, Aahui University of Technology, Ma'anshan, Anhui 243002, P R China)

Abstract: The methods of L^p estimation are used to discuss the extinction phenomena of the solutions to the following reaction_diffusion equations with initial_boudnary values

$$\partial u/\partial t = \Delta u - \lambda |u|^{\gamma-1}u - \beta u \qquad ((x,t) \in \Omega \times (0, +\infty)),$$

$$u(x,t)|_{\partial\Omega\times(0,+\infty)} = 0,$$

$$u(x,0) = u_0(x) \in H_0^1(\Omega) \cap L^{1+\gamma}(\Omega) \qquad (x \in \Omega),$$

A sufficient and a necessary condition about the extinction of the solutions is given. Here $\lambda > 0$, $\gamma > 0$, $\beta > 0$ are constants, $\Omega \in \mathbf{R}^N$ is bounded with smooth boundary $\partial\Omega$. At last, it is simulated with a higher order equation by using the present methods.

Key words: reaction_diffusion equation; extinction; L^p estimation; Bernoulli equation