应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2001) 10_1075_06

在部分区域上的奇摄动反应扩散方程初始边值问题解的渐近性态*

刘其林[1], 莫嘉琪[2]

(1. 南京大学 数学系, 南京 210093; 2. 湖州师范学院 数学系, 浙江 湖州 313000)

(江福汝推荐)

摘要: 讨论一类在部分区域上的奇摄动反应扩散方程初始边值问题· 利用算子理论, 得到了相应问题解的渐近性态·

关 键 词: 奇摄动; 反应扩散方程; 初始边值问题
中图分类号: O175.26 文献标识码: A

作者曾在文[1]~[7]中讨论了一类非线性方程奇摄动问题· 今提出一类在部分区域上的奇摄动问题· 考虑如下反应扩散方程的初始边值问题:

$$u_t - \lambda_\varepsilon(x)(\mu(u)u_x)_x + K_x(u) + f(x,t,u) = 0, \quad (t,x) \in (0,T) \times ((0,\alpha) \cup (\alpha,1)), \tag{1}$$

$$u(t,0) = 0, \tag{2}$$

$$u(t,1) = 0, \tag{3}$$

$$u(0,x) = 0, \tag{4}$$

其中 ε 为正的小参数, μ、K、f 关于其变元有二阶连续的偏导数, K 关于 u 为严格单调, $\mu(u) \geqslant \mu_0 > 0$, $f_u \geqslant c_0 > 0$, $\alpha \in (0,1)$ 为常数, 而

$$\lambda_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,\alpha], \\ \varepsilon, & x \in (\alpha,1) \cdot \end{cases}$$

今用算子理论来讨论问题(1)~(4)的解·

设 L 为 $u(t,x) \in C([0,T] \times [0,1]) \cap C^1((0,T) \times (0,1))$, 并使得 $u(x,t)|_{t\in[0,T],x\in[0,\alpha]} \in C^2((0,T) \times (0,\alpha))$, $u(x,t)|_{t\in[0,T],x\in[\alpha,1]} \in C^2((0,T) \times (\alpha,1))$ 的函数空间· 在 L 上对给定的 $\varepsilon > 0$ 定义算子 M:

---

* 收稿日期: 2000_09_25; 修订日期: 2001_04_24
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10071048)
作者简介: 刘其林(1964—), 男, 江苏如皋人, 博士;
莫嘉琪(1937—), 男, 浙江德清人, 教授.

$$\mathrm{M}u(t,x)=\begin{cases} u(t,0), & x=0,\\ u_t-\lambda_\varepsilon(x)((\mu(u)u_x)_x+K_x(u)+f(x,t,u)), & \\ \qquad (t,x)\in(0,T)\times((0,\alpha)\cup(\alpha,1)), & \\ u(t,1), & x=1,\\ u(0,x), & t=0. \end{cases}$$

因此,我们要研究在 $\boldsymbol{L}$ 中满足 $\mathrm{M}u=0$ 的解. 关于初始边值问题 $\mathrm{M}u=0$ 的解存在唯一性,莫嘉琪已在另文中讨论. 现着重研究问题解的渐近性态[8].

设 $\beta(s)=\int_0^s\mu(u)\mathrm{d}u$. 因为 $\mu(u)>0$, 显然 $\beta(s)$ 为单调增加的函数. 再设 $\eta(x)\in C^\infty[\alpha,1]$, 使得 $\eta(x)\geqslant0$, $\eta'(x)\leqslant0$, $\eta(\alpha)=1$, $\eta(1)=0$. 设 $u_\varepsilon(t,x)\in\boldsymbol{L}$ 为问题 $\mathrm{M}_\varepsilon u=0$ 的解. 将 $\mathrm{M}_\varepsilon u_\varepsilon$ 与 $\eta\beta(u_\varepsilon)$ 在 $L^2(\alpha,1)$ 空间意义下作内积, 有:

$$(\mathrm{M}u_\varepsilon,\eta\beta(u_\varepsilon)_x)=0.$$

由此可得:

$$((u_\varepsilon)_t,\eta\beta(u_\varepsilon))+(K_u(u_\varepsilon)(u_\varepsilon)_x(\beta(u_\varepsilon))_x,\eta)=$$
$$-\frac{\varepsilon}{2}[(\beta(u_\varepsilon))_x(\alpha)]^2-\frac{\varepsilon}{2}\int_\alpha^1[(\beta(u_\varepsilon))_x]^2\eta'(x)\mathrm{d}x-$$
$$\int_\alpha^1[K_x(u_\varepsilon)+f(t,x,u_\varepsilon)](\beta(u_\varepsilon))_x\eta\mathrm{d}x. \tag{5}$$

今在 Sobolev 空间 $W^{1,2}((0,T)\times(0,\alpha))$ 上定义一个线性算子 L:

$$\mathrm{L}u=\begin{cases} u(t,0), & x=0,\\ u_t-(\mu(u_\varepsilon)u_x)_x, & x\in(0,\alpha),\\ u(t,\alpha), & x=\alpha,\\ u(0,x), & t=0. \end{cases}$$

设 $u\in W^{1,2}((0,T)\times(0,\alpha))$ 为 $\mathrm{L}u=0$ 的解. 不难看出, $\|u\|_{W^{1,2}((0,T)\times(0,\alpha))}$ 和 $|u_x(t,\alpha)|$ 均为关于 ε 为一致有界的.

令 $R(t,x)=u_\varepsilon(t,x)-u(t,x)\in W_0^{1,2}((0,T)\times(0,\alpha))$. 这时在 $(t,x)\in(0,T)\times(0,\alpha)$ 上有:

$$R_t-(\mu(u_\varepsilon)R_x)_x+K_x(u_\varepsilon)R_x=-f(t,x,u_\varepsilon)-K_x(u_\varepsilon)u_x.$$

设函数 $\eta(x)\in C_0^\infty(0,\alpha)$, 其中 $C_0^\infty(0,\alpha)$ 为 $C^\infty(0,\alpha)$ 上的紧支空间. 再对上述两端分别与 $R(t,x)$ 和 $\eta\mu(u_\varepsilon)R_x(u_\varepsilon)$ 在 $x\in(0,\alpha)$ 上作内积. 可得:

$$(R_t,R)-((\mu(u_\varepsilon)R_x)_x,R)+(K_x(u_\varepsilon)R_x,R)=(F,R),$$
$$(R_t,\eta\mu(u_\varepsilon)R_x)-((\mu(u_\varepsilon)R_x)_x,\eta\mu(u_\varepsilon)R_x)+(K_x(u_\varepsilon)R_x,\eta\mu(u_\varepsilon)R_x)=$$
$$(F,\eta\mu(u_\varepsilon)R_x),$$

其中 $F=-f(t,x,u_\varepsilon)+K_x(u_\varepsilon)u_x$.

由上述两式, 可以分别得到:

$$(R_t,R)+(\mu(u_\varepsilon)R_x,R_x)-\frac{1}{2}((K_u(u_\varepsilon))_xR,R)=(F,R),$$

$$(R_t,\eta\mu(u_\varepsilon)R_x)-\frac{1}{2}[\mu(u_\varepsilon(\alpha))R_x(\alpha)]^2+\frac{1}{2}(\mu(u_\varepsilon)R_x,\eta'\mu(u_\varepsilon)R_x)+$$
$$(K_u(u_\varepsilon)R_x,\eta\mu(u_\varepsilon)R_x)=(F,\eta\mu(u_\varepsilon)R_x).$$

因为 F 在 $L^2((0,T)\times(0,\alpha))$ 中关于 ε 为一致有界, 故由上述两式可知 $\|R\|_{W^{1,2}((0,T)\times(0,\alpha))}$ 与 $|R_x(t,\alpha)|$ 关于 ε 一致有界• 所以我们有:

$$\|u_\varepsilon\|_{W^{1,2}((0,T)\times(0,\alpha))}\leqslant C_1,\quad |(u_\varepsilon(t,\alpha))_x|\leqslant C_2, \tag{6}$$

其中 C_1, C_2 为与 ε 无关的常数•

考虑到(6), 又因 $\|(u_\varepsilon)_x\|_{L^1((0,T)\times(0,1))}$ 关于 ε 一致有界[9,10], 故由(5) 存在与 ε 无关的常数 C_3, 使得:

$$\int_\alpha^1 |[K_u(u_\varepsilon)(u_\varepsilon)_x][\beta_x(u_\varepsilon(t,x))]\eta(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant C_3•$$

因此, 当 $K_u(u_\varepsilon)\geqslant 0$ 时, 存在与 ε 无关的常数 C_4, 有:

$$\int_\alpha^1 [K_u(u_\varepsilon)(u_\varepsilon(x))_x]^2\eta(x)\,\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\frac{C_4}{r_0}\int_\alpha^1 |[K_u(u_\varepsilon)(u_\varepsilon(x))_x][\beta_x(u_\varepsilon(t,x))]\eta(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{C_3C_4}{r_0}•$$

所以得到 $K_u(u_\varepsilon)(u_\varepsilon)_x$ 在 $L^2((0,T)\times(\alpha,r))$ 中关于 ε 一致有界, 即:

$$\|K_u(u_\varepsilon)(u_\varepsilon)_x\|_{L^2((0,T)\times(\alpha,r))}\leqslant C_5, \tag{7}$$

其中 $\alpha<r<1$, 而 $C_5=\left[C_3C_4/r_0\right]$•

由

$$(M_\varepsilon u_\varepsilon,\beta(u_\varepsilon)_x)=0$$

出发, 当 $K_u(u_\varepsilon)\leqslant 0$ 时, 用上述类似的方法估计, 可进一步得到 $K_u(u_\varepsilon)(u_\varepsilon)_x$ 在 $L^2((0,T)\times(\alpha,1))$ 中关于 ε 一致有界, 即:

$$\|K_u(u_\varepsilon)(u_\varepsilon)_x\|_{L^2((0,T)\times(\alpha,1))}\leqslant C_6, \tag{8}$$

其中 C_6 为与 ε 无关的常数•

设 $M_\varepsilon u$ 的退化算子 M_0 为:

$$M_0u=\begin{cases} u(t,0), & x=0,\\ u_t-(\mu(u)u_x)_x+K_x(u)+f(t,x,u), & x\in(0,\alpha),\\ u(t,\alpha^-)-u(t,\alpha^+), & \\ u_x(t,\alpha^-)-u_x(t,\alpha^+), & \\ u_t+K_x(u)+f(t,x,u), & x\in(\alpha,1),\\ u(0,x), & t=0• \end{cases}$$

现有如下定理:

定理 1 设 $K_u(u)\geqslant b_0>0$, 问题 $M_\varepsilon u=0$ 的解 $u_\varepsilon(t,x)$, 当 $\varepsilon\to0^+$ 时几乎处处收敛于 $M_0u=0$ 的解 $u_0(t,x)\in C((0,T)\times(0,1))$, $u_0(t,x)\in C^2((0,T)\times(0,\alpha))$, $K(u_0(t,x))\in C^1((0,T)\times(\alpha,1))$, 且 $(u_0(t,\alpha^-))_x=(u_0(t,\alpha^+))_x$•

证明 设 $c_0=\max\left\{|f(t,x,0)|/c_0\right\}$, 不难证明 $\phi(x)=-c_0$, $\psi(x)=c_0$ 为 $M_\varepsilon u=0$ 的一对上、下解• 故对任意的 ε, 有 $\|u_\varepsilon\|_{L^1((0,T)\times(0,1))}\leqslant c_0$• 于是, 存在一个函数 $u_0(t,x)\in L^2((0,T)\times(0,1))$, 并且在 $L^2((0,T)\times(0,1))$ 中当 $\varepsilon\to0^+$ 时 u_ε 弱收敛于 u_0• 又因关系式(7) 成立, 可知 $(u_\varepsilon)_x$ 在 $L^2((0,T)\times(0,\alpha))$ 中当 $\varepsilon\to0^+$ 时也相应地弱收敛于 $(u_0)_x$• 再利用 Rellich 定理, 可得 u_ε 在 $L^2((0,T)\times(0,\alpha))$ 及逐点的意义下收敛于 u_0•

同样, 我们可以证明, 存在一个函数 $g(t,x)\in W^{1,2}((0,T)\times(\alpha,r))$, 使得当 $K_u(u_\varepsilon)\geqslant b_0$

> 0, 在 $L^2((0,T)\times(\alpha,r))$ 和逐点的意义下当 $\varepsilon\to 0^+$ 时收敛于 g, 其中 r 为 $(\alpha,1)$ 间的任一常数· 又因 K 为连续且关于 u 为严格单调增加的函数, 所以有反函数 $u_0 = K^{-1}(g)$, $u_0\in C([0,T]\times[x_0,r])$, 且 u_ε 在 (α,r) 中处处收敛于 u_0· 即

$$u_\varepsilon(t,x)\to u_0(t,x),\qquad (t,x)\in(0,T)\times(\alpha,r)\cdot \tag{9}$$

下面我们再来证明 u_0 为问题 $\mathrm{M}_0u = 0$ 的解·

显然, 由(9) 和 $\mathrm{M}_\varepsilon u_\varepsilon = 0$ 知, $u_0(x)$ 满足 $\mathrm{M}_0u = 0$ 的边界 $x = 0$ 条件和在界面 $x = \alpha$ 的连续条件·

现证明 u_0 在 $(t,x)\in((0,T)\times(0,\alpha))$ 上满足 $\mathrm{M}_0u = 0$·

事实上, 设 $\eta(x)\in C_0^\infty(0,\alpha)$, 将 $\mathrm{M}_\varepsilon u_\varepsilon = 0$ 在 $(t,x)\in(0,T)\times(0,\alpha)$ 上对应的关系式与 η 作内积:

$$((u_\varepsilon)_t,\eta) - ((\mu(u_\varepsilon)(u_\varepsilon)_x)_x,\eta) + (K_x(u_\varepsilon),\eta) + (f(t,x,u_\varepsilon),\eta) = 0,$$

即

$$((u_\varepsilon)_t,\eta) + (-\mu(u_\varepsilon)(u_\varepsilon)_x,\eta') + (K(u_\varepsilon),\eta') + (f(t,x,u_\varepsilon),\eta) = 0\cdot$$

取极限 $\varepsilon\to 0^+$, 便得到:

$$((u_0)_t,\eta) - (\mu(u_0)(u_0)_x,\eta') + (K(u_0),\eta') + (f(t,x,u_0),\eta) = 0\cdot$$

由此可得

$$((u_0)_t,\eta) - ((\mu(u_0)(u_0)_x)_x,\eta) + (K(u_0),\eta) + (f(t,x,u_0),\eta) = 0\cdot$$

又由 u_0 在 $[0,T]\times[0,\alpha]$ 上的连续性知, u_0 在 $[0,T]\times[0,\alpha]$ 上满足 $M_0u = 0$ 对应的方程·

同理可证 u_0 在 $[0,T]\times[\alpha,1]$ 上满足 $\mathrm{M}_0u = 0$ 对应的方程·

最后我们来证明 $u_0(t,x)$ 的导数在界面 $x = \alpha$ 上满足 $\mathrm{M}_0u = 0$ 相应的界面条件· 即

$$(u_0(t,\alpha^-))_x = (u_0(t,\alpha^+))_x\cdot \tag{10}$$

由 $\mathrm{M}_\varepsilon u_\varepsilon = 0$ 在 $(t,x)\in(0,T)\times(0,\alpha)$ 上所满足的方程及关系式(6), $\beta(u_\varepsilon)''$ 在 $L^2((0,T)\times(0,\alpha))$ 上是有界的· 所以当 $\varepsilon\to 0^+$ 时, 按 $L^2((0,T)\times(0,\alpha))$ 和逐点的意义下, $(\beta(u_\varepsilon))_x\to(\beta(u_0))_x$· 于是可得

$$(u_\varepsilon(t,\alpha))_x\to(u_0(t,\alpha^-))_x,\qquad \varepsilon\to 0^+\cdot$$

另一方面, 由关系式(7), u_ε 在 $L^2((0,T)\times(\alpha,r))$ 意义下关于 ε 一致有界, 其中 $r\in(\alpha,1)$ 为任意的常数·

不难证明, 当 $K_u(u)\geqslant b_0 > 0$, $[\beta(u_\varepsilon)']^4$ 在 $L^1((0,T)\times(\alpha,1))$ 上当 ε 为足够小时是有界的·

再由 $\mathrm{M}_\varepsilon u_\varepsilon = 0$ 在 $(t,x)\in(0,T)\times(\alpha,1)$ 上满足对应的方程的两边对 $\beta(u_\varepsilon)''$ 在 $L^2((0,T)\times(\alpha,1))$ 意义下作内积, 得:

$$((u_\varepsilon)_t,\beta(u_\varepsilon)'') + \varepsilon(\beta(u_\varepsilon)'',\beta(u_\varepsilon)'') = \frac{1}{2}\int_\alpha^1(K\circ\beta^{-1})'(\beta(u_\varepsilon))([\beta(u_\varepsilon)']^2)'\mathrm{d}x + \int_\alpha^1 f(t,x,u_\varepsilon)\beta(u_\varepsilon)''\mathrm{d}x\cdot$$

再进行分部积分, 不难得知 $\|\sqrt{\varepsilon}\beta(u_\varepsilon)''\|_{L^2((0,T)\times(\alpha,1))}$ 有界·

设 $\eta\in C^\infty(\alpha,1)$ 且 $\eta\geqslant 0$, $\eta'\leqslant 0$, $\eta(\alpha) = 1$, $\eta(1) = 0$, 再由 $\mathrm{M}_\varepsilon u_\varepsilon = 0$ 在 $L^2(\alpha,1)$ 上满足对应的方程的两边对 $\eta\beta(u_\varepsilon)''$ 作内积, 可得 $\|\sqrt{\eta}\beta(u_\varepsilon)''\|_{L^2((0,T)\times(\alpha,1))}$ 有界· 因此有 $(\beta(u_\varepsilon))_x(\alpha)\to(\beta(u_0))_x(\alpha^+)$· 由 β 的单调性知,

$$(u_\varepsilon(t,\alpha))_x \to (u_0(t,\alpha^+))_x,\qquad \varepsilon\to 0^+ .$$

于是关系式(10)成立. 定理1证毕.

设 $M_\varepsilon u$ 的退化算子 M_0 为:

$$M_0 u=\begin{cases} u(t,0), & x=0,\\ u_t-(\mu(u)u_x)_x+K_x(u)+f(t,x,u), & x\in(0,\alpha),\\ u(t,0^-)-u(t,0^+), & \\ u_t+K_x(u)+f(t,x,u), & x\in(\alpha,1),\\ u(t,1), & x\in 1,\\ u(0,x), & t=0. \end{cases}$$

现有如下定理:

定理2 设 $K_u(u)\leqslant 0$, 问题 $M_\varepsilon u=0$ 的解 $u_\varepsilon(t,x)$, 当 $\varepsilon\to 0^+$ 时几乎处处收敛于 $M_0u=0$ 的解 $u_0(t,x)\in C((0,T)\times(0,1))$, $u_0(x)\in C^2((0,T)\times(0,\alpha))$, $K(u_0(t,x))\in C^1((0,T)\times(\alpha,1))$, 且 $u_0(t,x)$ 为唯一.

证明 由定理1知, 当 $K_u(u)\leqslant 0$ 时, $(u_\varepsilon(t,x))_x$ 在 $L^2((0,T)\times(0,1))$ 中当 $\varepsilon\to 0^+$ 时也相应地弱收敛于 $(u_0)_x$. 同样, 我们可以证明, 存在一个函数 $g(t,x)\in W^{1,2}((0,T)\times(\alpha,1))$, 使得当 $\varepsilon\to 0^+$ 时 $K(u_\varepsilon)$ 在 $L^2((0,T)\times(\alpha,1))$ 和逐点的意义下收敛于 g. 又因 K 为连续且关于 u 为严格单调减少的函数, 所以有反函数 $u_0=K^{-1}(g)$, $u_0\in C([0,T]\times[\alpha,1])$, 且 u_ε 在 $(t,x)\in(0,T)\times(\alpha,1)$ 中处处收敛于 u_0. 即

$$u_\varepsilon(t,x)\to u_0(t,x)\qquad (t,x)\in((0,T)\times(\alpha,1)).$$

与定理1相同的方法并考虑到关系式(8), 我们仍然可以证明 u_0 为问题 $M_0u=0$ 的解, 包括满足在 $x=1$ 处相应的边界条件.

下面我们来证明 u_0 的唯一性.

设问题 $M_0u=0$ 有两个解 u_1,u_2. 在 $L^2(\alpha,1)$ 上将对应的关系式 $M_0u_1-M_0u_2=0$ 的两边关于 $sg^+_\delta(K(u_1)-K(u_2))$ 作内积, 并取 $\delta\to 0^+$, 可得:

$$\begin{aligned}&(((u_1)_t-(u_2)_t),sg^+_\delta(K(u_1)-K(u_2)))+\\ &\quad[K(u_1(\alpha))-K(u_2(\alpha))]sg^+(K(u_1(\alpha))-K(u_2(\alpha)))-\\ &\quad((f(t,x,u_1)-f(t,x,u_2)),sg^+(K(u_1)-K(u_2))=0.\end{aligned}$$

所以

$$\int_\alpha^1[f(t,x,u_1)-f(t,x,u_2)]^+\,\mathrm{d}x\leqslant 0.$$

由此可得 $u_1\leqslant u_2$, $(t,x)\in([0,T]\times[\alpha,1])$. 同理有: $u_2\leqslant u_1$, $(t,x)\in[0,T]\times[\alpha,1]$.

再定义一个逆单调算子 T:

$$Tu=\begin{cases} u(t,0), & x=0,\\ u_t-u_{xx}+(K\circ\beta^{-1})(u)u_x+f(t,x,\beta^{-1}(u)), & (t,x)\in((0,T)\times(0,\alpha)),\\ u(t,\alpha)-\beta(u_1(\alpha)), & x=\alpha,\\ u(0,x), & t=0. \end{cases}$$

因为 $T\beta(u_1)=T\beta(u_2)$, 再由 β 的单调性, 得到 $u_1=u_2$, $(t,x)\in[0,T]\times[0,\alpha]$. 定理证毕.

[参 考 文 献]

[1] 刘其林. 一类非线性奇摄动边值问题解的渐近展开[J]. 高校应用数学学报, 1993, **8**(3): 231—238.

[2] 莫嘉琪, 刘其林. 具有非局部边界条件的奇摄动反应扩散问题[J]. 数学研究与评论, 1997, **17**(3): 451—454.

[3] MO Jia_qi. A class of singularly perturbed reaction diffusion integral differential system[J]. Acta Math Appl Sinica, 1999, **15**(1): 19—23.

[4] MO Jia_qi. A class of singularly perturbed boundary value problems for nonlinear differential systems [J]. Systems Sci Math Sci, 1999, **12**(1): 56—58.

[5] MO Jia_qi. A class of singularly perturbed problems with nonlinear reaction diffusion equation[J]. 数学进展, 1998, **27**(1): 53—58.

[6] MO Jia_qi. A singularly perturbed nonlinear boundary value problem[J]. J Math Anal Appl, 1993, **178**(1): 289—293.

[7] MO Jia_qi. Singular perturbation for a class of nonlinear reaction diffusion systems[J]. Science in China, Ser A, 1989, **32**(11): 1306—1315.

[8] de Jager E M, JIANG Fu_ru. The Theory of Singular Perturbation [M]. Amsterdam: North_Holland Publishing Co, 1996.

[9] Aguilar G, Lisbona F. Singular perturbation on a subdomain[J]. J Math Anal Appl, 1997, **210**(1): 292—307.

[10] Sacks P E. The initial and boundary value problem for a class of degenerate parabolic equations[J]. Comm Partial Differential Equations, 1983, **8**(7): 693—733.

The Asymptotic Behavior of Solution for the Singularly Perturbed Initial Boundary Value Problems of the Reaction Diffusion Equations in a Part of Domain

LIU Qi_lin[1], MO Jia_qi[2]

(1. Department of Mathematics, Nanjing University, Nanjing 210093, P R China;
2. Department of Mathematics, Huzhou Teachers College, Huzhou, Zhejiang 313000, P R China)

Abstract: A class of singularly perturbed initial boundary value problems for the reaction diffusion equations in a part of domain are considered. Using the operator theory the asymptotic behavior of solution for the problems is studied.

Key words: singular perturbation; reaction diffusion equation; initial boundary value problem