应用数学和力学, 第 22 卷 第 10 期(2001 年 10 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2001) 10_1105_05

最大元与经济均衡*

刘心歌, 蔡海涛

(中南大学 科研所 应用数学与应用软件系, 长沙 410083)

(郭友中推荐)

摘要: 首先证明了若偏好对应受 Q_θ_控制, 则最大元一定存在• 然后证明了在局部凸拓扑向量空间中若抽象经济(或定性的博弈) 中的约束对应或偏好对应受 Q_θ_控制, 则均衡一定存在•

关 键 词: Q_θ_类; Q_θ_控制; 最大元; 均衡; 抽象经济

中图分类号: O174 文献标识码: A

引 言

George Xian Zhi Yuan 和 E. Tarafdar 在文献[1]中证明了当偏好对应受 μ_控制时, 则最大元一定存在, 即

定理 A 设 X 为局部凸 Hausdorff 拓扑向量空间的非空凸子集, D 为X 的非空紧子集• 若 $P: X \to 2^D$ 受 μ_控制(即 μ_{I_X}_控制), 则存在 $x \in \mathrm{co}D$ 使得$P(x) = \Phi$•

与 ϕ的μ_控制相对应, 本文首先引进对应 ϕ的Q_θ_控制等新概念来推广具有非反身性(即对所有 $x \in X, x \notin \phi(x)$) 和开凸值的下半连续对应• 为了建立新的最大元存在性定理, 在本文的第 1 节给出了关于受 Q_θ_控制对应的一个新的选择定理• 在第 2 节, 证明了一个关于抽象经济的均衡存在性定理•

定义 1 设 X 和 Y 为两个拓扑空间, 对应 $T: X \to 2^Y$, 则

1) T 在 $x \in X$ 上半连续(i. e., u. s. c.), 若对于 Y 中包含 $T(x)$ 的开集 U, 集合 $\{z \in X, T(z) \subset U\}$ 是x 在X 中的开邻域; 若T 在任意一点$x \in X$ 上半连续, 则称 T 在X 上上半连续•

2) T 在X 上下半连续(i. e., l. s. c. ,), 若对每个 Y中的开集V, 集合$\{x \in X, T(x) \cap V \neq \Phi\}$ 是X 中的开集• 显然, T 下半连续当且仅当对Y中每个闭集M, $\{x \in X, T(x) \subset M\}$ 为X 中的闭集•

3) T 称为拥有开的上部, 若对每个 $x \in X, T(x)$ 为 Y 中的开集•

定义 2 设 X 和 Y为两个拓扑空间, 对应 $T: X \to 2^Y$, 若存在 $x \in X$ 使得$T(x) = \Phi$, 则称 T 存在最大元•

定义 3 设 X 为拓扑空间, Y为向量空间E 的非空子集, 映射$\theta: X \to E$, 对应 $\Phi: X \to 2^Y$, 则

* 收稿日期: 2000_04_08; 修订日期: 2001_04_20
作者简介: 刘心歌(1969—) , 男, 湖南长沙人, 讲师, 博士.

1) Φ称为属于μ_θ类(或μ类), 若

(a) 对每个$x\in X$, $\theta(x)\notin\Phi(x)$;

(b) Φ上半连续(u. s. c.), 且Φ在Y中是闭凸值的;

2) Φ_x称为是Φ在x的μ_θ_控制, 若存在x在X中的开邻域$N(x)$和对应$\Phi_x: N(x)\to 2^Y$, 使得

(a) 对每个$z\in N(x)$, $\Phi(z)\subset\Phi_x(z)$, 且$\theta(z)\notin\Phi_x(z)$;

(b) Φ_x上半连续(u. s. c.), 且Φ_x在Y中闭凸值的;

3) Φ称为受μ_θ_控制, 若对每个使得$\Phi(x)\neq\Phi$的x, 在x处都存在有Φ的μ_θ_控制•

定义 4 设X为拓扑空间, Y为向量空间E的非空子集, 映射$\theta: X\to E$, 对应$\Phi: X\to 2^Y$, 则

1) Φ称为属于Q_θ_类(或Q类), 若

(a) 对每个$x\in X$, $\theta(x)\notin\mathrm{cl}\,\Phi(x)$;

(b) Φ下半连续(l. s. c.), 且Φ在Y中是开凸值的;

2) Φ_x称为是Φ在x的Q_θ_控制, 若存在x在X中的开邻域$N(x)$和对应$\Phi_x: N(x)\to 2^Y$, 使得

(a) 对每个$z\in N(x)$, $\Phi(z)\subset\Phi_x(z)$, 且$\theta(z)\notin\mathrm{cl}\,\Phi_x(z)$;

(b) Φ_x下半连续(l. s. c.), 且Φ_x在Y中是开凸值的;

3) Φ称为受Q_θ_控制, 若对每个使得$\Phi(x)\neq\Phi$的x, 在x处都存在有Φ的Q_θ_控制•

定义 5 设I是经济主体的集合, 对每个$i\in I$, X_i是主体i的非空选择集, $X=\prod_{i\in I}X_i$• 则$\Gamma=(X_i, A_i, B_i, P_i)_{i\in I}$称为一个抽象经济, 其中$X_i$是拓扑空间, 即主体$i$的选择集, A_i、B_i为主体i的约束对应, P_i是其偏好对应• 若存在$x^*\in X$, 使得对每个$i\in I$, $x_i^*=\pi_i(x^*)\in\mathrm{cl}B_i(x^*)$, 且$A_i(x^*)\cap P_i(x^*)=\Phi$, 则称$x^*$为抽象经济$(X_i, A_i, B_i, P_i)_{i\in I}$的一个均衡• 若在抽象经济$(X_i, A_i, B_i, P_i)_{i\in I}$中$A_i=B_i$, 则$(X_i, A_i, P_i)_{i\in I}$就为一个标准的抽象经济•

在一个抽象经济$(X_i, A_i, B_i, P_i)_{i\in I}$中, 记$A(x)=\prod_{i\in I}A_i(x)$, $B(x)=\prod_{i\in I}B_i(x)$, $P(x)=\prod_{i\in I}P_i(x)$, $A\cap P(x)=\prod_{i\in I}(A_i\cap P_i)(x)$, 有时$\mathrm{cl}_{X_i}B_i(x)$记为$\overline{B_i(x)}$•

1 最大元存在性定理

引理 1 设X和Y为两个拓扑空间, A为X的闭子集, 假设为应$F_1: X\to 2^Y$, $F_2: A\to 2^Y$均下半连续, 且对$\forall x\in A$均有$F_2(x)\subset F_1(x)$• 定义对应$F: X\to 2^Y$,

$$F(x)=\begin{cases}F_1(x) & \text{若 } x\notin A,\\ F_2(x) & \text{若 } x\in A,\end{cases}$$

则$F(x)$在X上下半连续•

定理 1 设X为正则仿紧的拓扑向量空间, Y为向量空间E的非空子集• 若$\theta: X\to E$, $P: X\to 2^Y\setminus\{\Phi\}$是受$Q_\theta$_控制的, 则存在对应$\varphi: X\to 2^Y$, 且$\varphi$属于$Q_\theta$_类使得对每个$x\in X$, $P(x)\subset\varphi(x)$•

证明 因P是受Q_θ_控制的, 若$x\in X$, 且$P(x)\neq\Phi$, 则存在x在X中的开邻域$N(x)$和对应$\varphi_x: N(x)\to 2^Y$使得

1) 对每个$z\in N(x)$, 有$P(z)\subset\varphi_x(z)$, $\theta(z)\notin\mathrm{cl}\,\varphi_x(z)$,

2) φ_x 下半连续, φ_x 在 Y 中是开凸值的。

由于 X 是仿紧的, 又 $X = \bigcup_{x\in X} N(x)$, 则 X 的开覆盖 $\{N(x)\}$ 存在有限加细 $\{N'(x)\}$。注意到 X 是正则的, 对每个 $x \in X$, 存在 x 在 X 中的开邻域 $G(x)$, 使得 $\mathrm{cl}_X G(x) \subset N'(x)$。记 $M_x = \mathrm{cl}_X G(x)$, 易知 $\varphi_x: M_x \to 2^Y$ 也下半连续。

对每个 $x \in X$, 定义集值对应 $\varphi'_x: X \to 2^Y$

$$\varphi'_x(z) = \begin{cases} \varphi_x(z) & \text{若 } z \in \mathrm{cl}_X G(x), \\ Y & \text{若 } z \notin \mathrm{cl}_X G(x), \end{cases}$$

则由引理 1 知 φ'_x 在 X 上也是下半连续的, 对每个 $z \in X$, 显然 $P(z) \subset \varphi'_x(z)$。再定义 $\varphi: X \to 2^Y$, 对每个 $z \in X$, $\varphi(z) = \bigcap_{x\in X} \varphi'_x(z)$。

i) 显然 φ 是凸值的, 且对每个 $z \in X$, $P(z) \subset \varphi(z)$。而 $\forall z \in X$, 则存在某个 $x \in X$, 且 $z \in G(x)$ 使得 $\varphi'_x(z) = \varphi_x(z)$, 故 $\varphi(z) \subset \varphi_x(z)$。又因 $\theta(z) \notin \mathrm{cl}\,\varphi_x(z)$, 从而 $\theta(z) \notin \mathrm{cl}\,\varphi(z)$, 因此对所有 $z \in X$, $\theta(z) \notin \mathrm{cl}\,\varphi(z)$。

ii) 再证 φ 是开值的。

由 $\{N'(x)\}$ 的局部有限性, 对于 X 中的每个 $z \in X$, 拥有邻域 $\mathrm{cl}_X G(z)$ 仅与 $\{N'(x)\}$ 中有限个邻域 $N'(x)$ 相交, 当 $z \in N'(x)$, $\varphi_x(z)$ 又是开集。实际上, $\varphi(z) = \bigcap_{x\in X} \varphi'_x(z)$ 仅是 Y 中有限个子集 $\varphi'_x(z)$ 的交集, 因为 z 至多包含在有限多个邻域 $N'(x)$ 中, 除了有限多个开集 $\varphi'_x(z)$ 外, 其余的 $\varphi'_x(z)$ 就是 Y 本身, 因此 φ 是开值的。

iii) 最后证 φ 是下半连续。

由 $\{N'(x)\}$ 的局部有限性和 X 的正则性, $\forall u \in X$, 存在 u 的闭邻域 M_u 使得 $\{x \in X, M_u \cap N'(x) \neq \Phi\}$ 是有限的, 不妨设为 $\{x(u,1), \cdots, x(u,n(u))\}$。对每个 $w \in M_u$, $\varphi(w) = \bigcap_{x\in X} \varphi'_x(w) = \bigcap_{i=1}^{n(u)} \varphi'_{x(u,i)}(w)$。对 $i = 1, 2, \cdots, n(u)$, 因每个 $\varphi'_{x(u,i)}$ 在 X 上下半连续, $\varphi'_{x(u,i)}$ 是开值的, 由下半连续的定义知 φ 在 M_u 上下半连续。因为 M_u 闭, 而当 $w \notin M_u$ 时, $\varphi(w) = Y$, 由引理 1, $\varphi: X \to 2^Y$ 也下半连续, 故 φ 属于 Q_θ_类。

定理 2 设 X 为 Hausdoff 局部凸拓扑向量空间 E 的非空仿紧凸子集, D 为 X 的可度量化的非空紧子集, $P: X \to 2^D$ 是受 Q_θ_控制的, 则存在 $x \in X$ 使得 $P(x) = \Phi$。

证明 反设定理的结论不成立, 即 $\forall x \in X$, $P(x) \neq \Phi$。

由于 X 是仿紧的 Hausdorff 拓扑向量子空间, 从而 X 是正则的。由定理 1 存在对应 $\varphi: X \to 2^D$ 属于 Q_θ_类, 使得对 $\forall x \in X$, $P(x) \subset \varphi(x)$。因为 φ 下半连续, 对于 X 中使得 $\varphi(x) \neq \Phi$ 的每个 x, 由 $\mathrm{cl}\,\varphi(x) = \mathrm{cl}_D[\varphi(x)]$ 所定义对应 $\mathrm{cl}\,\varphi: X \to 2^D$, 由[2] 中的性质 2.3 和性质 2.6 知 $\mathrm{cl}\,\varphi$ 是下半连续的, 且 $\mathrm{cl}\,\varphi(x)$ 非空完备。又因 D 是紧子集, 则 $\mathrm{co}D$ 仿紧。由 Michael[3] 中的定理 1.1, 则存在上半连续的非空集值对应 $H: \mathrm{co}D \to 2^D$ 使得 $\forall x \in \mathrm{co}D$, $H(x) \subset \mathrm{cl}\,\varphi(x)$。

对每个 $x \in \mathrm{co}D$, 令 $T(x) = \mathrm{cl}[\mathrm{co}H(x)]$, 由[4] 中的引理 1 和引理 2 知 $T: \mathrm{co}D \to 2^D$ 是非空闭凸值且上半连续的集值对应, 注意到 φ 是凸值的, 从而 $\mathrm{cl}\,\varphi$ 是闭凸值的, 又 $H(x) \subset \mathrm{cl}\,\varphi(x)$, 则 $T(x) \subset \mathrm{cl}\,\varphi(x)$。

由于对应 $T: \mathrm{co}D \to 2^D$ 是上半连续且非空闭凸值的, 利用[5] 中的 Himmelberg 不动点定理, 则存在 $x^* \in D$, 使得 $x^* \in T(x^*)$。但对每个 $x \in X$, 都有 $T(x) \subset \mathrm{cl}\,\varphi(x)$, 则 $x^* \in \mathrm{cl}\,\varphi(x^*)$, 这与 φ 属于 Q_θ_类矛盾, 故定理结论成立。

2　均　　衡

在这一部分,我们将证明在局部凸拓扑向量空间中当抽象经济中的约束对应与偏好对应的交受 Q_θ _控制,不论经济主体集是可数集还是不可数集,均衡一定存在•

WU Xian 在[6]中证明了如下下半连续型的不动点定理•

引理 2　设 I 为指标集,对每个 $i\in I$, X_i 为局部凸 Hausdorff 拓扑向量空间 E_i 的非空凸子集• D_i 为 X_i 的可度量化的非空紧子集• $S_i, T_i: X=\prod_{i\in I}X_i\to 2^{D_i}$ 为两个集值对应,并满足下列条件:

(i) 对每个 $x\in X$, $\overline{\mathrm{co}}S_i(x)\subset T_i(x)$, 且 $S_i(x)\neq\Phi$;

(ii) S_i 下半连续;

则存在 $x=\prod_{i\in I}x_i\in D=\prod_{i\in I}D_i$, 使得对每个 $i\in I$, 都有 $x_i\in T_i(x)$•

定理 3　设 $\Gamma=(X_i, A_i, B_i, P_i)_{i\in I}$ 为一个抽象经济, I 为任意的主体集(可数或不可数),使得对每个 $i\in I$,

1) X_i 为局部凸 Hausdorff 拓扑向量空间 E_i 的非空凸子集• $X=\prod_{i\in I}X_i$ 是仿紧的, D_i 为 X_i 的可度量化的非空紧子集;

2) A_i, B_i, P_i 都是从 $X\to 2^{D_i}$ 的对应,对每个 $x\in X$, $A_i(x)$ 非空; B_i 下半连续且 $B_i(x)$ 是闭凸集, $\mathrm{cl}B_i(x)\subset D_i$:

3) 集合 $E^i=\{x\in X, A_i(x)\cap P_i(x)\neq\Phi\}$ 在 X 闭;

4) 对应 $A_i\cap P_i: X\to 2^{D_i}$ 是受 Q_θ _控制的;

则在抽象经济 Γ 中存在一个均衡,即存在 $x^*\in X$, 使得对每个 $i\in I$, 都有 $x_i^*=\pi_i(x^*)\in\mathrm{cl}B_i(x^*)$, 且 $A_i(x^*)\cap P_i(x^*)=\Phi$•

证明　首先注意到若对所有 $i\in I$, $E^i=\Phi$, 由于 B_i 下半连续,显然 $\mathrm{cl}B_i$ 下半连续,又 $\mathrm{cl}B_i(x)$ 是闭凸集•　令 $S_i(x)=B_i(x)$, $T_i(x)=\mathrm{cl}B_i(x)$, 利用引理 2, 则定理结论成立•

设 $I_0=\{i\in I, E^i\neq\Phi\}$, 不失一般性,不妨设 $I_0\neq\Phi$•

情形 1　对每个 $i\in I_0$, 由条件(4)和定理 1, 存在对应 $\varphi_i: X\to 2^{D_i}$, φ_i 下半连续且是开凸值的,对每个 $x\in X$, $A_i(x)\cap P_i(x)\subset\varphi_i(x)$•　同时,因为 E^i 在 X 中闭, φ_i 是 $A_i\cap P_i$ 在 E^i 上的 Q_θ _控制, $B_i: X\to 2^{D_i}$ 下半连续且 B_i 是凸值的,所以 $\varphi_i\cap B_i$ 也下半连续,且是非空凸值的•　定义对应 $\phi_i: X\to 2^{D_i}$

$$\phi_i(x)=\begin{cases}B_i(x) & \text{若 } x\notin E^i,\\ (\varphi_i\cap B_i)(x) & \text{若 } x\in E^i,\end{cases}$$

因 E^i 是闭的,由引理 1 知 $\phi_i(x)$ 下半连续,且 $\phi_i(x)$ 是非空凸值的•

情形 2　对 $i\in I\setminus I_0$, 定义 $\phi_i: X\to 2^{D_i}$, 即 $\forall x\in X$, $\phi_i(x)=B_i(x)$, $\phi_i(x)$ 下半连续,且 ϕ_i 是非空凸值的•

令 $S_i(x)=\phi_i(x)$, $T_i(x)=\mathrm{cl}\phi_i(x)$, 由引理 2 则存在 $x^*=\prod_{i\in I}x_i^*\in D=\prod_{i\in I}D_i$, 使得 $x_i^*=\pi_i(x^*)\in\mathrm{cl}\phi_i(x^*)$•

若存在某个 $i\in I_0$ 使得 $x^*\in E^i$, $x_i^*=\pi_i(x^*)\in\mathrm{cl}\phi_i(x^*)$, 由 $\phi_i(x)$ 的定义,则 $x_i^*=$

$\pi_i(x^*) \in \mathrm{cl}((\varphi_i \cap B_i)(x^*)) \subset \mathrm{cl}(\varphi_i(x^*))$, 这与 φ_i 是$A_i \cap P_i$ 在E^i 上的Q_θ_控制矛盾• 因此, 对所有 $i \in I_0$, $x^* \notin E^i$, 即对所有 $i \in I_0$, $A_i(x^*) \cap P_i(x^*) = \Phi$• 再由 $\phi_i(x)$ 的定义, 对所有 $i \in I_0$, 则有 $x_i^* = \pi_i(x^*) \in \mathrm{cl}B_i(x^*)$, 且 $A_i(x^*) \cap P_i(x^*) = \Phi$• 定理证毕•

由定理3, 在定性的博弈中有下列均衡存在定理•

定理4 设 $\Gamma = (X_i, P_i)_{i\in I}$ 为一个定性的博弈, I 为选手集(可数或不可数), 对于每个 $i \in I$, 若

1) X_i 为局部凸Hausdorff 拓扑向量空间 E_i 的可度量化的非空紧凸集;

2) 集合 $E^i = \{x \in X, P_i(x) \neq \Phi\}$ 在X 中闭;

3) 对应 $P_i: X \to 2^{X_i}$ 受Q_θ_控制;

则在 Γ 中存在最大元, 即存在 $x^* \in X$ 使得对每个$i \in I$, $P_i(x^*) = \Phi$•

证明 Hausdorff 空间的子空间仍是 Hausdorff 空间, 紧的 Hausdorff 空间又是正则的• 对每个 $x \in X$, 令$A_i(x) = B_i(x) = X_i$, 则抽象经济 $= (X_i, A_i, B_i, P_i)_{i\in I}$ 满足定理3的所有假设, 从而定理4 的结论成立•

[参 考 文 献]

[1] George Xian Zhi Yuan, Tarafdar E. Maximal elements and equilibrium of generalized games for majorized and condensing correspondences[J]. Internat J Math Math Sci, 1999, **22**(2): 179—189.

[2] Michael E. Continuous selection Ⅰ [J]. Ann Math, 1956, **36**(2): 361—382.

[3] Michael E. A theorem on semi_continuous set_valued functions[J]. Duke Math J, 1959, **26**(3): 647—651.

[4] Rim D I, Kim W K. A fixed point theorem and existence of equilibrium for abstract economies[J]. Bull Austral Math Soc, 1992, **45**(2): 385—494.

[5] Himmelberg C J. Fixed points of compact multi_functions[J]. J Math Anal Appl, 1972, **38**: 205—207.

[6] WU Xian. A new fixed point theorem and its application[J]. Proc Amer Math Soc, 1997, **28**(6): 1779—1783.

Maximal Elements and Equilibrium of Abstract Economy

LIU Xin_ge, CAI Hai_tao

(Science Research Institute, Department of Applied Mathematics and Applied Software, Central South University, Changsha 410083, P R China)

Abstract: An existence theorem of maximal elements for a new type of preference correspondences which are Q_θ_majorized is given. Then some existence theorems of equilibrium for abstract economy and qualitative game in which the constraint or preference correspondences are Q_θ_majorized are obtained in locally convex topological vector spaces.

Key words: Q_θ_ class; Q_θ_majorized; maximal element; equilibrium; abstract economy