应用数学和力学, 第 22 卷 第 9 期(2001 年 9 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2001) 09_0905_06

金融衍生产品的力学方法分析(Ⅱ) —— 期权市场价格基本方程*

云天铨

(华南理工大学 工程力学系, 广州 510641)

(我刊编委云天铨来稿)

摘要: 类似固体力学建立基本方程方法, 根据期权特点, 采用一些假设, 建立期权市场价格基本方程: $h\ddot{v}_0(t) = m_1 v_0^{-1}(t) - n_1 v_0(t) + F$, 式中 h, m_1, n_1, F 为常数• 主要假设有: 期权市场价格 $v_0(t)$ 的升降由市场供求决定; 影响 $v_0(t)$ 的因素如行使价, 期限, 波幅等用正或反比关系; 买和卖用相反规律• 文中给出不同情况下基本方程的解, 并和期货市价基本方程的解 $v_f(t)$ 相比较, 以及用隐函数存在定理证明 v_f 与 $v_0(t)$ 存在一一对应关系, 为研究期货价 v_f 对期权市价 $v_0(t)$ 的影响提供理论依据•

关 键 词: 期权; Black_Scholes 公式; 微分方程

中图分类号: F224.9; F830.9 文献标识码: A

1 期权的研究现状, 意义和方法

期权(option) 是一种选择权• 购买期权可以有两种选择: 行使或不行使期权• 买家购买期权用作防减风险(对冲) 或投机获利, 卖家卖出期权用于对冲或赚取期权费• 期权是现今金融界最活跃工具之一[1]• 期权种类繁多, 发展迅速• 按基础资产(或工具) 不同, 期权分外汇期权, 利率期权, 股票期权, 指数期权, 商品期权等, 按行使方式分为欧式期权(European style option) (只可在到期日当天行使期权), 美式期权(American style option) (可在到期日或之前行使期权), 非普遍期权(exotic option) (例如: 触发生效期权(knock_in option) ——现货价一到生效价时, 期权立即生效• 触发取消期权(knock_out option) ——现货价一到生效价时, 期权立即取消• 等等); 按对行情估计分为看涨(认购) 期权(call option) 和看跌(认沽) 期权(put option); 按交易场所区分为场内交易期权(exchange trade option) 和场外期权(OTC option), 前者的行使价, 有效期, 保证金由交易所定• 后者由银行与客户商定•

期权本身是一种零和游戏(zero_sum game)• 买家所得等于沽家损失• 期权同样可以先卖后买或先买后卖, 也有杠杆性(leverage)•

对期权的研究大致有如下内容: 期权定价的研究; 期权投资组合策略分析; 新的期权品种及系列的研究、开发等• 期权定价的研究以 Black_Scholes 期权定价公式(B_S 公式) 最有名• 公式制定人荣获 1997 年诺贝尔经济学奖, 而推广 B_S 模型的论文多达数千篇[2], 可见这方面的

* 收稿日期: 2000_08_30; 修订日期: 2001_04_08
作者简介: 云天铨(1936—), 男, 海南文昌人, 教授, 发表论文 90 多篇.

研究已是一热点• 关于期权投资组合策略分析, 一直是银行界, 大企业, 财团, 基金关注目标• 除了传统的预测走势方式之外, 近期还将新的科研进展引进分析• 例如英国伦敦化学银行 C. L. Dunis[3] 用人工神经网络技术(ANN) 预报外汇走势分析, 比传统方法更优• 至于期权新品种及系列研究、开发, 已相当广泛, 成为现代金融特色之一• 例如香港一些中小银行, 如中南银行, 近期推出"期权宝" 存款系列, 供市民投资选择• 可见期权对现代市民并不陌生•

本文研究普通欧式期权市场价格变化规律• 据 B_S 公式得出的定价还不是期权真正的市场价格• 期权市场价格(期权费) 是由期交所使用公开叫价制度叫出的买入价和卖出价来决定[4], 即由市场供求决定价格• 而且 B_S 公式中对影响因素波幅的估计, 不是由市场当前的资料, 而是由历史的波幅去估计[2], 因此 B_S 公式的期权定价还不能说是真正的市场价格• 本文用类似固体力学建立基本方程方法, 根据期权特点, 采用一些假设, 建立期权市场价格基本方程• 主要的假设有: 市场供求决定期权市场价格的升降; 影响因素如行使价, 期限, 波幅等用正或反比关系; 买和卖用相反的规律• 建立的基本方程是一阶非线性非齐次微分方程• 采用换元, 分离变量方法求得不同情况下基本方程的解•

基础工具的价格影响着期权的市价• 本文的最后部份将期权市价基本方程的解 $v_0(t)$ 和期货市价基本方程的解 $v_f(t)$ 作比较, 并研究一般情形的期权市价解 $v_0(t)$ 的公式中给出 v_f 与 v_0 的一一对应性• 利用隐函数存在定理论证 v_f 与 v_0 之间的一一对应性, 为直观地表达二者关系而绘制 $v_f \sim v_0$ 图提供理论依据•

2 欧式期权市场价格的基本方程

我们以欧式看涨期权为例, 探讨期权市场价格的基本方程•

1. 期权市场价格的影响因素:

对于影响因素, 看法不尽相同, 但大体上较为一致• 例如: [1] 指出 5 方面(行使价; 期限; 波幅; 行使方式; 期货价)• [2] 指出: B_S 公式有 5 个函数, 1) 基础资产现货价 v, 2) 行使价 J, 3) 期限 T, 4) 年利率 r, 5) 基础资产收益波幅 σ• 其中 v, r 由市场获知, J 和 T 在合同中商定, 最后一个变量 σ 只好用基础资产的历史收益的数据来估计其波幅• 而[4] 认为影响期权市价因素: 1) 基础工具市价与期权行使价之差, 2) 期权的时间价值, 3) 波幅•

综合上述以及期权市场价格(期权费) 是由期交所用公开叫价制定, 本文作如下假设•

2. 假设

1. 期权市场价格 $v_0(t)$ 的升降由市场供求关系, 即买入量 A_p 和卖出量 A_s 之差, 来决定•

2. 买和卖采用相反规律; 对影响因素采用正或反比关系• 当某因素可能等于零时, 不宜用反比关系(分母为零), 改用负正比关系• 例如: 假定买入量 A_p 与价格 $v_0(t)$ 成正比, 与负的价格变化率 $-\dot{v}_0(t)$ 成正比; 假定卖出量 A_s 与价格 $v_0(t)$ 成反比, 与正的价格变化率 $\dot{v}_0(t)$ 成正比• 等等•

3. 买入量 A_p 与期满日基础工具市价 $v(T)$ 与期权行使价 J 之差 $(v(T)-J)$ 成正比; 而卖出量 A_s 则与负的 $(v(T)-J)$ 与正比• 这是因为 $v(T)$ 已计及波幅和期限因素•

根据上述假设, 以及作者在文[5~8]所用方法, 我们有:

$$A_p(t+\Delta t) = m_1 v_0^{-1}(t) - m_2\dot{v}_0(t) + m_3(v(T)-J)H(v(T)-J), \tag{1}$$

$$A_s(t+\Delta t) = n_1 v_0(t) + n_2\dot{v}_0(t) - n_3(v(T)-J)H(v(T)-J), \tag{2}$$

式中 A 代表量; v_0, $\dot{v}_0$ 分别代表期权市场及其变化率, t 代表时间, Δt 为时间增量; 下标字符 p, s, 分别代表买入和卖出; v 代表基础资产(或工具) 的市价(如股价, 股指等); T 代表期满日时刻; $J = J(t)$ 为期权的行使价; $H(x) = 1$, 当 $x \geqslant 0$; $H(x) = 0$, 当 $x < 0$. (1) 和(2) 式的左边分别为时刻 $t + \Delta t$ 的买入和卖出量, 它们只受等式右边诸因素在时刻 t 所影响. 即应用了[6]的"最近时原理".

由求供差决定价格升降的假设, 有

$$A_{\mathrm{p}}(t + \Delta t) - A_{\mathrm{s}}(t + \Delta t) = g \cdot \dot{v}_0(t + \Delta t), \tag{3}$$

式中 g 为因数, 使(3) 式两边量纲相同. $\dot{v}_0$ 为价格 v_0 的变化率, 定义为:

$$\dot{v}_0(t + \Delta t) \equiv [v_0(t + \Delta t) - v_0(t)] / \Delta t \qquad (\min \Delta t), \tag{4}$$

将(1), (2) 代入(3) 式, 为简化, 略去 $\dot{v}_0(t)$ 与 $\dot{v}_0(t + \Delta t)$ 的区别(对电脑而言, $\min \Delta t$ 很小), 得

$$h\dot{v}_0(t) = m_1 v_0^{-1}(t) - n_1 v_0(t) + F, \tag{5}$$

式中 $h = g + m_2 + n_2$; m_1, n_1, m_3, n_3 为常数,

$$F = (m_3 + n_3)(v(t) - J)H(v(J) - J), \tag{6}$$

也是常数. $(v(T) - J)$ 代表期满日基础工具市场价和期权行使价之差. 这个差值已反映了波幅$(v(t) - v(T))$ 的影响. 差越大, 买看涨期权越合算. 因而买入量越大, 相反卖出量越小. 当 $v(T) - J \leqslant 0$ 时, 期权不会被行使, 此时期权已无价值, 故令(6) 式的 $F = 0$. 由于在时刻 t 确定行使价$J = J(t)$ 时, 并不知道 $v(T)$ 的数值. 市场是通过期货价 $v_f(t)$ 去预则期满日基础工具的市价 $v(T)$, 亦即市场认为 $v_f(t) = v(T)$, 以此代入(6) 式, 得:

$$F = q(v_f(t) - J)H(v_f(t) - J), \tag{7}$$

式中 $q = m_3 + n_3$ 为常数, $v_f(t)$ 为时刻 t 的期货价, $v_f(t)$ 和 $J(t)$ 都由市场资料得出. 因此 F 为一已知常数.

(5) 式就是欧式看涨期权市价的基本方程, 式中 $(\dot{\ }) = \partial(\ )/\partial t$.

3 期权市价基本方程(5) 的解

(5) 式是一个一阶非线性非齐次微分方程. 令

$$y(t) = v_0^{-1}(t) = y, \tag{8}$$

则(5) 式化为第Ⅰ类Abel 方程:

$$\dot{y} = a_3 y^3 + a_2 y^2 + a_1 y, \tag{9}$$

式中 $$a_3 = - m_1/h,\ a_2 = - F/h,\ a_1 = n_1/h. \tag{10}$$

将(9) 式变量分离, 两边作不定积分, 得

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{a_3 y^3 + a_2 y^2 + a_1 y} = \int \mathrm{d}t + C, \tag{11}$$

式中不定常数 C 由初始条件确定. 不同情况下(11) 式会有不同的解.

1. 当 $a_2^2 - 4a_1 a_3 > 0$ (12)

此时(11) 式化为

$$\frac{1}{a_3}\int\left(\frac{B_1}{y} + \frac{B_2}{y - s_1} + \frac{B_3}{y - s_2}\right)\mathrm{d}y = t + C, \tag{13}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
&s_1=(-a_2+\sqrt{a_2^2-4a_1a_3})/(2a_3),\\
&s_2=(-a_2-\sqrt{a_2^2-4a_1a_3})/(2a_3),\\
&B_1=1/(s_1s_2)=a_1/a_3,\\
&B_2=B_1s_2/(s_1-s_3),\\
&B_3=-B_1s_1/(s_1-s_2),\\
&B_1+B_2+B_3\equiv 0\cdot
\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

(13) 式的解为:

$$\frac{1}{a_3}[B_1\ln y+B_2\ln(y-s_1)+B_3\ln(y-s_2)]=t+C,$$

或

$$(1-s_1v_0(t))^{B_2/B_1}(1-s_2v_0(t))^{B_3/B_1}=\exp[a_3(t+C)]\cdot\tag{15}$$

2. 当 $a_2^2-4a_1a_3=0$ (16)

此时 $s_1=s_2=s=-a_2/(2a_3)$, (11) 式化为

$$\frac{1}{a_3}\int\frac{\mathrm{d}y}{y(y-s)^2}=t+C\cdot\tag{17}$$

(17) 式的解为:

$$\frac{-1}{a_3}\left[\frac{1}{s(y-s)}+\frac{1}{s^2}\ln\frac{y-s}{y}\right]=t+C\cdot\tag{18}$$

3. 当 $a_2=0$, 即 $F=0$

此时(5) 式为:

$$h\dot{v}_0(t)=m_1v_0^{-1}(t)-n_1v_0(t)\cdot\tag{19}$$

这是一个非线性齐次微分方程, 解法如下· 令

$$v_0^2(t)=B_4+B_5\exp(B_6t),\tag{20}$$

式中 B_4, B_5, B_6 为待定常数· (20) 式两边求导, 并代入(19) 及(20) 式, 得

$$B_4=m_1/n_1,\quad B_6=-2n_1/h\cdot\tag{21}$$

剩下的常数 B_5 由问题的(初始) 条件

$$v_0(T)=0\tag{22}$$

定出· (22) 式表示期满日的期权市价为零· 这是明显的事实· 到了期满日, 期权已失去存在价值, 没人会买· 将(20), (21) 代入(22) 式, 得

$$B_5=-B_4\exp(-B_6T),\tag{23}$$

于是(20) 式的解为:

$$v_0^2(t)=\frac{m_1}{n_1}[1-\exp(2n_1T/h)]\exp(-2n_1t/h)\cdot\tag{24}$$

(24) 满足(19) 式, 即它是(19) 式的解·

至此已求出所有可解情况的(5) 式的解· 至于(15) 和(18) 式的常数 C 也是由条件(22) 定出, 为

$$C=-T\cdot\tag{25}$$

4 基本方程(5) 的解的讨论

1. 期权市价 $v_0(t)$ 和期货价 $v_f(t)$ 解的比较与联系

在[8]中,作者得到指数期货价格 $v_f(t)$ 的基本方程:

$$k\dot{v}_f(t) = c_1 v_f^{-1}(t) - d_1 v_f(t), \tag{26}$$

式中 $k = g\cdot[c_2 + d_2 + (c_3 + d_3)\Delta A_0(t - \Delta t)]$, c_1, d_1 均为常数. 这个方程与本文基于方程(5)的对应的齐次方程(19)是同一类型, 其解[8]为:

$$v_f^2(t) = \frac{c_1}{d_1} + \left[v_f^2(0) - \frac{c_1}{d_1}\right]\exp\left[-\frac{2d_1 t}{k}\right]. \tag{27}$$

解(27)式与(19)式的解(20)同型. 不同的是问题的(初始)条件不同, 期货的条件不是(22)式而是

$$v_f(T) = v(T) \neq 0. \tag{28}$$

(28)式表示期满日的期货价 $v_f(T)$ 并不等于零而是等于现货价 $v(T)$. (以香港恒生指数为例, 一般情形, 恒生指数期货(HSIF)价 $v_f(t)$ 与现货价 $v(t)$ 走势大致相同, 二者不等情形通常少于 1%[9]). 以 $v_f(T) = v(T)$ 代入(27)式, 得 $v_f^2(0)$, 再代入(27)式, 得

$$v_f^2(t) = \frac{c_1}{d_1} + \left[v^2(T) - \frac{c_1}{d_1}\right]\cdot\exp\left[\frac{2d_1 T}{k}\right]\exp\left[-\frac{2d_1 t}{k}\right] \tag{29}$$

解(29)式和解(24)式同型, 区别在于前者有 $v^2(T) \neq 0$ 一项.

基础工具价格(如 $v_f(t)$, $v(t)$)影响期权市价 $v_0(t)$, 这已在基本方程(5)中的 F 项显示. 反过来, 期权价格 $v_0(t)$ 并未见影响 $v_f(t)$. 也就是研究期货走势时不必考虑期权的影响, 但研究期权市价 $v_0(t)$ 时必需考虑基础工具价格的影响.

给出一个 v_f, 在解(15)和(18)式中是否对应唯一的 $v_0(t)$? 下面来考虑这一问题.

2. v_f 与 $v_0 = v_0(t)$ 的一一对应性

以基础工具价(v_f 或 v)为横坐标, 期权价 v_0 为纵坐标绘制曲线表示二者联系较直观且流行(如[2]的图.6.3, [1]的§1.5的期权价值图). 但要画出这一曲线, 仅当 v_f 与 v_0 一一对应才行. 从代数方程角度去论证(15)或(18)式对给出一 v_f 有唯一的实的 v_0 对应比较困难. 本文用隐函数存在定理[11]去论证其一一对应性. 以(15)式为例, 记(15)式为

$$G(v_f, v_0) = 0. \tag{30}$$

函数 $G(v_f, v_0)$ 是初等函数, 在 $a \leqslant v_f \leqslant b$, $0 < v_0 < \infty$ 上处处连续, 且处处有关于 v_0 的偏导数 G'_{v_0}.

$$G'_{v_0}(v_f, v_0) = -s_1(B_2/B_1)(1 - s_1 v_0)^{B_2/B_2 - 1}(1 - s_2 v_0)^{B_2/B_1} - s_2(B_3/B_1)(1 - s_2 v_0)^{B_3/B_1 - 1}(1 - s_1 v_0)^{B_2/B_1}, \tag{31}$$

选择 v_f 的区间[a, b]的大小(影响 s_1, s_2, B_1, B_2 等), 总可使(31)式的 G'_{v_0} 位于区间[m, M]内, 即存在有 m 和 M, 使

$$0 < m \leqslant G'_{v_0} \leqslant M < \infty. \tag{32}$$

根据隐函数存在定理[11], $G(v_f, v_0) = 0$ 在闭区间[a, b]上有唯一的连续解 $v_0 = \Phi(v_f)$.

(证完)

最后要指出: 基本方程(5)的系数 h, m_1, n_1, q, g, 可以从最近的市场资料中找足够数据列出(例如按(15)式)5个方程解出. 详细可参照作者在[10]中确定系数的例子. 这些系数是由最近当前的资料确定, 对短期而言, 可视为常数. 因此依据这些系数所作的预测, 如果准确, 充其量也是短期可行.

[参 考 文 献]

[1] 吴兆辉. 外汇期权买卖[M]. 香港: 商务印书馆, 1995.

[2] 张光平. 霸菱破产与金融衍生产品[M]. 新加坡: 八方文化企业公司, 1996, 75, 76.

[3] Dunis C L. The economic value of neural network systems for exchange rate forecasting[J]. Neural Network World, 1996, (1): 43—55.

[4] 钱可通. 进攻期货市场[M]. 香港: 香港出版集团有限公司, 1996, 323, 108.

[5] 云天铨. 计算股市的基本方程、理论和原理(Ⅰ)——基本方程[J]. 应用数学和力学, 1999, **20**(2): 145—152.

[6] 云天铨. 计算股市的基本方程、理论和原理(Ⅱ)——基本原理[J]. 应用数学和力学, 1999, **20**(7): 675—681.

[7] 云天铨. 计算股市的基本方程、理论和原理(Ⅲ)——基本理论[J]. 应用数学和力学, 2000, **21**(8): 777—782.

[8] 云天铨. 金融衍生产品的力学方法分析(Ⅰ)——期指价格基本方程[J]. 应用数学和力学, (创刊廿周年), 2001, **22**(1): 104—110.

[9] 郭宇权. 香港金融衍生市场——分析认股证, 恒指期货及期权投资策略[M]. 香港: 明报出版社, 1998.

[10] 云天铨. 常规情形的股价短期预测[J]. 华南理工大学学报, 1997, **25**(5): 47—51.

[11] 夏道行, 吴卓人, 严绍宗等. 实变函数论与泛函分析(下册)[M]. 北京: 人民教育出版社, 1979, 78—79.

Analysis of Financial Derivatives by Mechanical Method (Ⅱ)—Basic Equation of Market Price of Option

YUN Tian_quan

(Department of Mechanics, South China University of Technology, Guangzhou 510641, P R China)

Abstract: The basic equation of market price of option is formulated by taking assumptions based on the characteristics of option and similar method for formulating basic equations in solid mechanics: $h\dot{v}_0(t) = m_1 v_0^{-1}(t) - n_1 v_0(t) + F$, where h, m_1, n_1, F are constants. The main assumptions are: the ups and downs of market price $v_0(t)$ are determined by supply and demand of the market; the factors, such as the strike price, tenor, volatility, etc. that affect on $v_0(t)$ are demonstrated by using proportion or inverse proportion relation; opposite rules are used for purchasing and selling respectively. The solutions of the basic equation under various conditions are found and are compared with the solution $v_f(t)$ of the basic equation of market price of futures. Furthermore the one_one correspondence between v_f and $v_0(t)$ is proved by implicit function theorem, which forms the theoretic base for study of v_f affecting the market price of option $v_0(t)$.

Key words: option; Black_Scholes formula; differential equation