

文章编号: 1000-0887(2001) 09-0919-08

四边简支正交各向异性波纹型夹心矩形 夹层板的固有频率

吴 晖, 俞焕然

(兰州大学 力学系, 兰州 730000)

(王银邦推荐)

摘要: 给出了一种把具有波纹型夹心的正交各向异性夹层板的控制方程组化为仅包含一个位移函数的单一方程的简单方法, 从而获得了在四边简支条件下其自由振动固有频率的精确解 同时还对两种具有重要实际意义的特殊情况进行了讨论

关键词: 矩形夹层板; 波纹型; 正交各向异性; 固有频率; 位移函数; 精确解

中图分类号: O342.6 文献标识码: A

引 言

夹层板已广泛用于航空航天和现代结构工程的许多领域 在过去的几十年里关于夹层结构的研究受到了研究人员的广泛关注, 一些相关的专著也已问世^[1~3] 文献[4~5]用有限元和有限条法研究了正交异性夹层板的弯曲和振动问题 然而, 由于涉及的控制方程的复杂性, 大多数现有的准确解主要是各向同性材料的夹层板壳 例如, 文献[3]曾给出了包含两个未知函数的各向同性夹层板的自由振动方程及四边简支矩形夹层板的精确解 本文给出了一种把具有波纹型夹心的正交各向异性夹层板的控制方程组化为仅包含一个位移函数的单一方程的简单方法, 从而获得了在四边简支条件下其自由振动固有频率的精确解 同时还对两种具有重要实际意义的特殊情况进行了讨论

1 基本方程

考虑一块由两层表层和波纹夹心所组成的正交各向异性板, 如图 1 所示 坐标平面 xy 与夹心中面一致 假定上下表层的材料性质和厚度相同

Reissner 最早建立了具有极薄表层和软夹芯的各向同性夹层板理论^[6~7], 正交各向异性夹层板的理论首先是由 Libove 和 Batdorf^[8] 提出的 其基本假定是:

- 1) 由于表层很薄, 故假定应力沿表层厚度是均匀分布的, 即假定表层处于薄膜应力状态
- 2) 假定夹心只提供横向剪力, 即在夹心中 $x = y = xy = 0$
- 3) 沿厚度方向无正应变

收稿日期: 2000.04.04; 修订日期: 2001.03.25

作者简介: 吴晖(1969), 男, 山西人, 讲师, 博士

俞焕然(1938), 男, 江苏人, 教授, 博导.

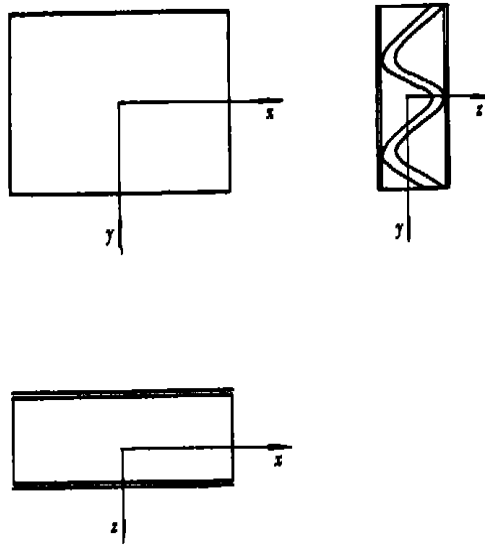


图 1 波纹夹心板示意图

这里材料既可以是各向同性也可以是正交各向异性 在正交各向异性的情形下, 我们假定材料主轴与 x 轴和 y 轴一致

在上述假定下, 正交各向异性夹层板的基本方程具有如下形式:

1 内力与广义应变的关系

$$M_x = - D_1 \left\{ \frac{x}{x} + 2 \frac{y}{y} \right\}, \tag{1}$$

$$M_y = - D_2 \left\{ \frac{y}{y} + 1 \frac{x}{x} \right\}, \tag{2}$$

$$M_{xy} = - D_k \left\{ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right\}, \tag{3}$$

$$Q_x = C_1 \left\{ \frac{w}{x} - x \right\}, \tag{4}$$

$$Q_y = C_2 \left\{ \frac{w}{y} - y \right\}, \tag{5}$$

式中 w 为横向挠度, x, y 分别代表变形前垂直于中面 oxy 的直线段在 xz 平面及 yz 平面内的转角 D_1, D_2 和 D_k 为夹层板的弯曲刚度, C_1 和 C_2 是夹心的剪切刚度, 且

$$D_1 = D_2 = D_k$$

2 运动方程

由于我们关心的只是夹层板的自由弯曲振动, 故面内惯性力可忽略不计, 由此可得运动方程如下:

$$\frac{M_x}{x} + \frac{M_{xy}}{y} - Q_x = 0, \tag{6}$$

$$\frac{M_{xy}}{x} + \frac{M_y}{y} - Q_y = 0, \tag{7}$$

$$\frac{Q_x}{x} + \frac{Q_y}{y} - \frac{2w}{t^2} = 0, \tag{8}$$

式中 $\rho = h c + 2t f$, c, f 分别表示夹心及表层的材料密度 h 为夹心厚度, t 为表面厚度

对于如图 1 所示的具有波纹夹心的夹层板, 夹心在 xz 平面内的剪切刚度通常很大可近似假定为无限大^[3], 即假设

$$C_1 = C_2 = C, \quad x = \frac{w}{x} \tag{9}$$

在上述假定下并记 $y = \frac{w}{y}$, $C_2 = C$, 刚内力与广义应变间的关系简化为如下方程:

$$M_x = - D_1 \left[\frac{2w}{x^2} + 2 \frac{w}{y} \right], \tag{10}$$

$$M_y = - D_2 \left[\frac{2w}{y^2} + 2 \frac{w}{x} \right], \tag{11}$$

$$M_{xy} = - D_k \left[\frac{2w}{x} \frac{w}{y} + \frac{w}{x} \right], \tag{12}$$

$$Q_y = C \left[\frac{w}{y} - \frac{w}{x} \right], \tag{13}$$

横向剪力 Q_x 不能再由式(4) 决定而须由运动方程组的第一式决定, 即式(6), 于是我们有

$$Q_x = - D_1 \frac{3w}{x^3} - D_k \frac{3w}{x} \frac{w}{y^2} - (D_2 + D_k) \frac{2w}{x} \frac{w}{y} \tag{14}$$

将式(10) ~ (14) 代入运动方程组的最后两式, 即式(7) 和(8), 我们就得到了如下所示的具有波纹夹心的夹层板的控制方程组:

$$D_k \frac{2w}{x^2} + D_2 \frac{2w}{y^2} + (D_2 + D_k) \frac{3w}{x^2} \frac{w}{y} + C \left[\frac{w}{y} - \frac{w}{x} \right] = 0, \tag{15}$$

$$D_1 \frac{4w}{x^4} + D_k \frac{4w}{x^2} \frac{w}{y^2} + (D_2 + D_k) \frac{3w}{x^2} \frac{w}{y} - C \left[\frac{2w}{y^2} - \frac{w}{y} \right] = - \frac{2w}{t^2} \tag{16}$$

在上面的控制方程组中含有两个广义位移 w 和 $\frac{w}{x}$ 我们将引进位移函数 u 使得 w 和 $\frac{w}{x}$ 皆可由 u 表出, 且控制方程组(15) 和(16) 将简化为仅含有位移函数 u 的单一方程

2 位移函数的导出

式(15) 可以写成

$$L_1 \frac{w}{y} = L_2 \frac{w}{x}, \tag{17}$$

其中

$$L_1 = 1 + \left[\frac{D_1 + D_k}{C} \right] \frac{2w}{x^2} \tag{18}$$

$$L_2 = 1 - \frac{1}{C} \left[D_k \frac{2w}{x^2} + D_2 \frac{2w}{y^2} \right] \tag{19}$$

$$\text{令 } w = L_2 \frac{w}{x}, \tag{20}$$

于是由式(17) 可得

$$L_2 = L_1 \frac{w}{y} (L_2 \frac{w}{x}) = L_2 L_1 \frac{w}{y}, \tag{21}$$

由此我们有

$$= L_1 \frac{w}{y} \tag{22}$$

将关于 L_1 和 L_2 的表达式代入(20) 和(22), 可得

$$w = - \frac{1}{C} \left[D_k \frac{2w}{x^2} + D_2 \frac{2w}{y^2} \right], \tag{23}$$

$$= \frac{1}{y} + \left(\frac{D_1 \cdot 2 + D_k}{C} \right) \left(\frac{3}{x^2 y} \right) \tag{24}$$

由此, w 和 t 均由单一位移函数表出 显然, 对任意函数, 由式(23) 和(24) 给出的 w 和 t 将自动满足方程(15)

3 固有频率

将式(23) 和(24) 代入方程(16), 我们就得到了关于 t 的控制方程

$$D_1 \frac{4}{x^4} + 2(D_1 \cdot 2 + 2D_k) \frac{4}{x^2 y^2} + D_2 \frac{4}{y^4} - \frac{1}{C} \frac{2}{x^2} \left\{ D_1 D_k \frac{4}{x^4} + [D_1 D_2 - D_1 \cdot 2(D_1 \cdot 2 + 2D_k)] \frac{4}{x^2 y^2} + D_2 D_k \frac{4}{y^4} \right\} = - \frac{2}{t^2} \left[- \frac{1}{C} \left[D_k \frac{2}{x^2} + D_2 \frac{2}{y^2} \right] \right] \tag{25}$$

对于如图 2 所示的具有波纹夹心的四边简支矩形夹层板, 其边界条件为:

$$\text{当 } x = 0, a; w = 0, M_x = 0, \quad = 0, \tag{26}$$

$$\text{当 } y = 0, b; w = 0, M_y = 0 \tag{27}$$

利用式(10), (11), (23), (24), 边界条件(26) 和(27) 便化为:

$$\text{当 } x = 0, a; \quad = 0, \frac{2}{x^2} = 0, \frac{4}{x^4} = 0, \tag{28}$$

$$\text{当 } y = 0, b; \quad = 0, \frac{2}{y^2} = 0 \tag{29}$$

需要指出的是, 在 $x = \text{const}$ 的边界上有 3 个边界条件, 而在 $y = \text{const}$ 的边界上只有 2 个边界条件 其原因是在 $x = \text{const}$ 的边界上有 3 个广义位移, 即 $w, \frac{w}{x}$ 和 t , 而在 $y = \text{const}$ 的边界上只有两个广义位移, 即 w 和 t 另一方面, 这也可从关于 t 的控制方程看出; 即 t 对 x 的最高阶导数为 6 阶, 而对 y 的最高阶导数是 4 阶 显然, 满足边界条件(28) 和(29) 的控制方程(25) 的解具有如下形式

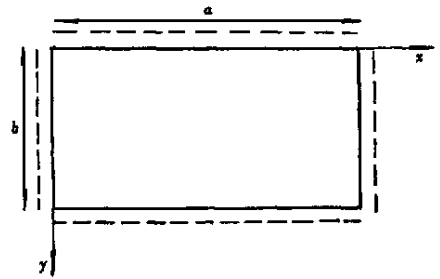


图 2 四边简支矩形波纹夹心板

$$= A_m t \sin \frac{m \cdot x}{a} \sin \frac{n \cdot y}{b} \sin t, \tag{30}$$

其中 ω 表示夹层板的固有频率

把式(30) 代入方程(25), 我们得到

$$2 = \left\{ \left[1 + \frac{D_k}{C} \left(\frac{m}{a} \right)^2 + \frac{D_2}{C} \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^{-1} \left\{ D_1 \left(\frac{m}{a} \right)^4 + 2(D_1 \cdot 2 + 2D_k) \left(\frac{m}{a} \right)^2 \left(\frac{n}{b} \right)^2 + D_2 \left(\frac{n}{b} \right)^4 + \frac{1}{C} \left(\frac{m}{a} \right)^2 \left[D_1 D_k \left(\frac{m}{a} \right)^4 + (D_1 D_2 - D_1 \cdot 2(D_1 \cdot 2 + 2D_k)) \left(\frac{m}{a} \right)^2 \left(\frac{n}{b} \right)^2 + D_2 D_k \left(\frac{n}{b} \right)^4 \right] \right\} \right. \tag{31}$$

在 $C \rightarrow \infty$ 的极限情况下, 上式即退化为单层正交各向异性板的固有频率:

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \left[D_1 \left(\frac{m}{a} \right)^4 + 2(D_{12} + 2D_k) \left(\frac{m}{a} \right)^2 \left(\frac{n}{b} \right)^2 + D_2 \left(\frac{n}{b} \right)^4 \right] \quad (32)$$

下面我们将对两种在实际应用中较为重要的情形做进一步的讨论, 然后再回到一般情形

4 各向同性表层

对于由各向同性材料做成的表层, 我们有

$$D_1 = D_2 = D, \quad D_{12} = D_{21} = \nu D, \quad D_k = \frac{1}{2}(1 - \nu)D, \quad (33)$$

式(32)可化为

$$\omega^2 = \frac{D}{2} \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2 \quad (34)$$

将式(33)代入(31), 可得

$$\omega^2 = \frac{D}{2} \left\{ \frac{\left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2}{1 + \frac{\left(\frac{D}{C} \right) \left(\frac{n}{b} \right)^2}{\left[1 + \left(\frac{1-\nu}{2} \right) \left(\frac{D}{C} \right) \left(\frac{m}{a} \right)^2 \right]}} \right\} \quad (35)$$

比较式(35)和(34), 可以看出不等式

$$\omega_{mn}^2 < \omega_{mn}^2, \quad (36)$$

对任意的正整数 m 和 n 均成立

对任意确定的 n 值, 式(35)的右端项将随着 m 值的增加而增加, 由此, 最低阶频率必然对应于 $m = 1$ 于是我们就得到了如下所示的最低频率的表达式

$$\omega^2 = \frac{D}{2} \left\{ \frac{\left[\left(\frac{1}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2}{1 + \frac{\left(\frac{D}{C} \right) \left(\frac{n}{b} \right)^2}{\left[1 + \left(\frac{1-\nu}{2} \right) \left(\frac{D}{C} \right) \left(\frac{1}{a} \right)^2 \right]}} \right\} \quad (37)$$

在大多数实际情形下, 剪切刚度 C 的值是一个相对较小的量, 近似表达式

$$1 + \frac{D}{C} \left(\frac{1}{a} \right)^2 \approx 1 + \frac{D}{C} \left(\frac{1}{a} \right)^2 \quad (38)$$

具有足够的精度 将近似表达式应用于式(37), 我们得到

$$\frac{\omega^2 a^4}{D} = \frac{\left(1 + \frac{2D}{1-\nu} \right)^2}{1 + \left(\frac{2}{1-\nu} \right)^2 n^2}, \quad (39)$$

其中 $\alpha = \frac{a}{b}$

容易证明只要以下条件

$$\alpha > \sqrt{\frac{2}{1-\nu}} \quad (40)$$

成立, 则最低阶频率必对应于 $n = 1$ 的情形 由此, 利用近似表达式(38) 并假设 $\alpha > \sqrt{\frac{2}{1-\nu}}$, 则最低阶频率为

$$\omega_{11}^2 = \frac{D}{a} \left(\frac{a}{a} \right)^4 \left[\frac{(1 + \frac{2}{1 - M})^2}{1 + \left(\frac{2}{1 - M} \right)^2} \right] \tag{41}$$

表 1 给出了各向同性表层情况下具有波纹型夹心的四边简支矩形夹层板的前三阶固有频率其中:

$$k_f = \frac{2}{D} \left(\frac{a}{a} \right)^4, \quad k_f = \frac{2}{D} \left(\frac{a}{a} \right)^4, \quad \frac{k_f}{k_f} = r \tag{42}$$

表 1 中括号内的数字为相应的波函数 (m, n)

表 1 = 0.3 时, 各向同性表层前三阶固有频率的系数

a/b	k_f	k_f	$r = k_f/k_f$
0.2	1 970 667(1, 1)	1 081 60(1, 1)	1 822
	0 923 451(1, 2)	1 345 60(1, 2)	0 686
	0 911 775(1, 3)	1 849 60(1, 3)	0 493
0.4	0 923 451(1, 1)	1 345 60(1, 1)	0 696
	0 950 869(1, 2)	2 689 60(1, 2)	0 354
	1 164 110(1, 3)	5 953 60(1, 3)	0 196
0.6	0 911 775(1, 1)	1 849 60(1, 1)	0 493
	1 164 110(1, 2)	5 953 60(1, 2)	0 196
	1 752 690(1, 3)	17 977 6(1, 3)	0 097
0.8	0 950 869(1, 1)	2 689 60(1, 1)	0 354
	1 1524 320(1, 2)	12 1673 6(1, 2)	0 120
	2 1617 700(1, 3)	45 1697 6(1, 3)	0 057
1.0	1 1037 040(1, 1)	4 1000 00(1, 1)	0 259
	2 1011 490(1, 2)	25 1000 0(1, 2)	0 080
	3 1743 320(1, 3)	100 1000(1, 3)	0 037
2.0	2 1011 149(1, 1)	25 1000 0(1, 1)	0 080
3.0	3 1743 320(1, 1)	100 1000(1, 1)	0 037

其中

$$1 + \frac{D}{C} \left(\frac{P}{a} \right)^2 \cup \frac{D}{C} \left(\frac{P}{a} \right)^2, \quad k_f = \frac{Q8^2 a^4}{DP^4} = \frac{(1 + \frac{B^2 R^2}{1 - M})^2}{\left(\frac{2}{1 - M} \right)^2 B^2 n^2}, \quad k_f = \frac{Q8^2 a^4}{DP^4} = (1 + B^2 n^2)^2$$

5 极限情形 $C \rightarrow 0$

在某些情形下, 剪切刚度 C 的值非常小, 可近似假定为零^[3], 在式(31)中令 $C \rightarrow 0$, 可得

$$\left(\frac{mP}{a} \right)^2 \left\{ D_1 D_k \left(\frac{mP}{a} \right)^4 + [D_1 D_2 - D_1 M_2 (D_1 M_2 + 2D_k)] \left(\frac{mP}{a} \right)^2 \left(\frac{nP}{b} \right)^2 + D_2 D_k \left(\frac{nP}{b} \right)^4 \right\} = Q8^2 \left[D_k \left(\frac{mP}{a} \right)^2 + D_2 \left(\frac{nP}{b} \right)^2 \right], \tag{43}$$

于是我们有

$$\frac{2}{D_1} \frac{a^4}{p^4} = \frac{m^4 + A_3 B^2 m^2 n^2 + \left(\frac{A_2}{A_1} \right) B^4 n^4}{1 + A_2 B^2 \left(\frac{n}{m} \right)^2}, \quad (44)$$

式中

$$A_1 = \frac{D_1}{D_k}, \quad A_2 = \frac{D_2}{D_k}, \quad (45)$$

$$A_3 = \frac{D_1 D_2 - D_1 M_2 (D_1 M_2 + 2D_k)}{D_1 D_k}, \quad (46)$$

显然 $A_2 - A_3 > 0$

从(44)中可以看出,最低阶频率对应于 $m = 1$,其表达式如下

$$\frac{Q_8^2}{D_1} \frac{a^4}{p^4} = \frac{1 + A_3 B^2 n^2 + \left(\frac{A_2}{A_1} \right) B^4 n^4}{1 + A_2 B^2 n^2} \quad \# \quad (47)$$

同样可以证明,假设以下条件

$$B > \frac{1}{A_2} \left[\sqrt{1 + A_1 (A_2 - A_3)} - 1 \right] \quad (48)$$

成立,那么最低阶频率必对应于 $n = \#$ 对于由各向同性材料构成的表层,条件(48)化为条件(40)#

6 一般情形

对式(31)进行整理后可得

$$\frac{Q_8^2}{D_1} \frac{a^4}{p^4} = \frac{1 + \frac{D_k}{C} \left(\frac{mP}{a} \right)^2}{1 + \frac{D_k}{C} \left(\frac{mP}{a} \right)^2 + \frac{D_2}{C} \left(\frac{nP}{b} \right)^2} \otimes \left\{ m^4 + \frac{2D_1 M_2 + 2D_k}{D_1} B^2 m^2 n^2 + \frac{D_2}{D_1} B^4 n^4 + \left[1 + \frac{C}{D_k} \left(\frac{a}{mP} \right)^2 \right]^{-1} \left[\frac{D_1 D_2 - (D_1 M_2 + 2D_k)^2}{D_1 D_k} \right] (B^2 m^2 n^2) \right\}, \quad (49)$$

由此,假设

$$D_1 D_2 - (D_1 M_2 + 2D_k)^2 > 0 \quad \# \quad (50)$$

那么,对任意固定的 n 值, δ 将随着 m 的增加而增加# 因而,当条件(50)成立时,最低阶频率必对应于 $m = 1$ # 当该条件不成立时,则最低阶频率须通过试算确定#

7 结 论

通过将具有波纹型夹心的夹层板控制方程组化为仅包含一个位移函数的单一方程,得到了正交各向异性情况下四边简支的具有波纹型夹心的矩形夹层板的固有频率的精确解,并对两种具有重要实际意义的特殊情形做了进一步的讨论# 本文这种将所有广义位移通过单一位移函数表出的处理方法也可用于各向异性夹层板的弯曲和稳定问题#

[参 考 文 献]

- [1] Plantema F J. Sandwich Construction, the Bending and Buckling of Sandwich Beams Plates and Shells[M]. New York: John Wiley, 1966.
- [2] Allen H G. Analysis and Design of Structural Sandwich Panels[M]. New York: Pergamon Press, 1969.
- [3] 中国科学院力学研究所. 夹层板壳的弯曲、稳定和振动[M]. 北京:中国科学出版社, 1977.
- [4] Khatua T P, Cheung Y K. Triangular element for multi-layer sandwich plates[J]. ASCE, 1972, 98 (EM5): 1225) 1238.
- [5] Cheung Y K. Finite Strip Method in Structural Analysis[M]. New York: Pergamon Press, 1976.
- [6] Reissner E. On bending of elastic plates[J]. Quarterly Applied Math, 1947, 5(1): 23) 28.
- [7] Reissner E. Finite deflections of sandwich plates[J]. Journal of Applied Science, 1948, 15(7): 18) 26.
- [8] Libove C, Batdorf S. A General Small-Deflection Theory for Flat Sandwich Plates[R]. NACA R899, 1948.

N a t u r a l F r e q u e n c y f o r R e c t a n g u l a r O r t h o t r o p i c
C o r r u g a t e d _ C o r e S a n d w i c h P l a t e s w i t h
A l l E d g e s S i m p l y _ S u p p o r t e d

WU Hui, YU Huan_ran

(Department of Mechanics, Lanzhou University, Lanzhou 730000, P R China)

Abstract: A simple approach to reduce the governing equations for orthotropic corrugated_core sandwich plates to a single equation containing only one displacement function is presented, and the exact solution of the natural frequencies for rectangular corrugated_core sandwich plates with all edges simply_supported is obtained. Furthermore, two special cases of practical interests are discussed in details.

Key words: rectangular sandwich plates; corrugated_core; orthotropic; natural frequency; displacement functional; exact solution