应用数学和力学, 第 22 卷 第 9 期(2001 年 9 月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2001) 09_0934_09

密封容器组合壳自由振动的精确解*

尚新春

(北京科技大学 数学力学系, 北京 100083)

(程昌钧推荐)

摘要: 给出了一类密封容器组合壳自由振动问题的精确解• 基于 Love 经典薄壳理论, 导出了具有任意经线形状的旋转壳体在轴对称振动时的基本方程• 组合壳结构中球壳与柱壳的连接条件是通过连接处的变形连续性和内力平衡关系得出的• 问题的数学模型被归结为常微分方程组在球壳和柱壳两个区间上的特征值问题• 振动模态函数是由 Legendre 和三角函数构造出来, 并且得到了精确的频率方程• 所有的计算都是在 Maple 程序下运行的• 无论是精确的符号运算还是具有所需有效数字精度的数值计算, 都表明该文所编译的 Maple 程序是简单而有效的• 固有频率的数值结果同文献中有限元法和其它数值方法的结果作了比较• 作为一个标准, 该文给出的精确解对于检验各种近似方法的精度是有价值的•

关 键 词: 组合壳; 密封容器; 自由振动; 精确解
中图分类号: O342 文献标识码: A

引 言

由旋转壳构成的组合结构在航天、化工、土木、机械和采矿等工程中有着广泛的应用• 不象单个壳体那样简单, 由于壳体方程数学上的复杂性和两个子结构之间连接条件在匹配上的困难, 已有的组合壳结构的解析解和数值解是相当有限的• 密封容器用于压力容器和贮藏罐是一类特殊而实用的组合壳• 它通常由一个柱壳在其两端用半球壳封闭而组成• 研究这类组合壳的动态行为是相当重要的, 只有少数文献涉及了这类组合壳自由振动问题• 例如, Tavakoli 和 Singh(1987) 基于 Love 壳理论用状态空间法和使用通用有限元软件 ANSYS 求出了固有频率值[1]• 之后, Ozakca 和 Hinton (1994) 采用 Mindlin_Reissner 有限元法得到问题的数值解[2]• 最近, Shang 和 Grannell(1997) 基于 Reissner_Naghdi 壳理论发展了广义传递矩阵方法并给出更为准确的结果[3]• 然而, 就作者所知至今仍然缺少问题的精确解析解• 当然, 一个精确解析解的获得总是带有挑战性的, 它会受到壳体形状和边界条件等方面的限制•

本文的目的是寻求一类组合壳结构(密封容器) 自由振动问题的精确解析解• 这类组合壳是由一个柱壳在其两端用半球壳封闭而组成• 理论分析是基于 Love 经典薄壳理论, 并且轴对称振动的基本方程是对于具有任意经线形状的旋转壳体导出的• 问题的数学模型被归结为常微分方程组在球壳和柱壳两个区间上的特征值问题• 对于球壳部分采用 Legendre 函数的阶作

* 收稿日期: 1999_10_14; 修订日期: 2001_04_08
基金项目: 教育部留学回国人员科研启动基金资助项目
作者简介: 尚新春(1958—) , 男, 山西山阴人, 教授, 博士. E_mail: Shangxc@ustb.edu.cn

为一个待定未知数。柱壳部分的解是由三角函数得到的，它满足柱壳对称和反对称振动模态的边界条件。球壳与柱壳连接处的连续条件可由变形连续性和内力平衡条件给出。精确的频率方程是通过连接条件导出的。为了精确符号运算和具有所需有效数字精度的数值计算的方便，所有的计算过程都是由简单的Maple程序完成的，并且通过一个固有频率的数值算例来说明。固有频率的数值结果与有限元方法和其它数值方法的结果作了比较。作为一个标准，本文给出的精确解对于检验各种近似方法的精度是有价值的。

1　壳体方程

旋转壳体的基本方程是基于经典的Love薄壳理论。在该理论中横向剪切、转动惯性力和法向变形等效应均被忽略[4]。

1.1　壳体几何和基本假设

对于一般的旋转壳，它的中面是由一条被称为经线的曲线绕对称轴旋转而生成。壳体中点的位置是由正交曲线坐标系 (s, θ, ζ) 标定。坐标 s 是壳体一端沿经线的弧长，θ 和 ζ 是纬向角度和到中面的法向距离。旋转壳中面的几何形状可由两个关于经线弧长 s 的函数来描述：

$$r = r(s),\ \phi = \phi(s) \quad (0 \leqslant s \leqslant l), \tag{1}$$

其中 r 是经线到对称轴的距离，ϕ 是经线的外法线与对称轴之间的夹角。l 代表壳体经线的总长度。经向和纬向坐标的Lame系数为 $A_s = R_s(s)$ 和 $A_\theta = r(s)$，其中 R_s 是壳体经向曲率半径。为了记号表示简单起见，引入将出现在壳体方程中的如下几何量：

$$k_s = \frac{1}{R_s} = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s},\ k_\theta = \frac{\sin\phi}{r},\ k_n = \frac{\cos\phi}{r}, \tag{2}$$

这里 k_s 和 k_θ 是中面的两个主曲率。

在轴对称和无扭转振动的情形下，所有未知变量与纬向坐标 θ 无关，且纬向位移 $u_\theta \equiv 0$。采用的基本假定是将沿 s 和 ζ 方向的位移近似为如下形式：

$$u_s(s, \zeta, t) = u(s, t) + \zeta\psi(s, t),\ u_\zeta(s, \zeta, t) = w(s, t), \tag{3}$$

式中 t 是时间，u 和 w 分别是中面的经向和法向位移，并且 ψ 是法线的转角。另外，横向剪切应力被假设为零，于是法向转角 ψ 有表达式

$$\psi = k_s u + \frac{\partial w}{\partial s}. \tag{4}$$

1.2　本构关系

在本文所考虑的情形下，本构关系简化为

$$\left.\begin{aligned} &N_s = K\left[\left(\frac{\partial u}{\partial s} + k_s w\right) + \nu(k_n u + k_\theta w)\right],\ N_\theta = K\left[\nu\left(\frac{\partial u}{\partial s} + k_s w\right) + \nu(k_n u + k_\theta w)\right], \\ &M_s = D\left(\frac{\partial\psi}{\partial s} + \nu k_n\psi\right),\ M_\theta = D\left(\nu\frac{\partial\psi}{\partial s} + k_n\psi\right), \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

其中 N_s 和 N_θ 薄膜力，M_s 和 M_θ 是弯矩。$K = Eh(1-\nu^2)$ 是拉伸刚度，$D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ 是弯曲刚度。E，ν 和 h 分别是弹性模量，泊松比和壳体厚度。

1.3　运动方程

自由振动的运动方程成为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial N_s}{\partial s}+k_n(N_s-N_\theta)+k_sQ_s=\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\\&\frac{\partial Q_s}{\partial s}+k_nQ_s-(k_sN_s+k_\theta N_\theta)=\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},\\&\frac{\partial M_s}{\partial s}+k_n(M_s-M_\theta)-Q_s=0,\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

其中 Q_s 是横向剪力, ρ为壳体的质量密度•

1.4 无量刚化位移的基本方程

引入无量刚化变量

$$x=\frac{s}{R},\ \varepsilon=\frac{1}{12}\left(\frac{h}{R}\right)^2,[k_1(x),k_2(x),k_3(x)]=R[k_s,k_\theta,k_n],\ \lambda=\frac{\rho}{E}\omega^2R^2(1-\nu^2),$$

$$[U(x),V(x),W(x),N_1(x),N_2(x),M_1(x),M_2(x),Q(x)]=$$

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\left[\frac{u_s}{R},\ \phi,\frac{w}{R},\frac{N_s}{R},\frac{N_\theta}{R},\frac{M_sR}{D},\frac{M_\theta R}{D},\frac{Q_s}{K}\right],\tag{7}$$

其中 R 是壳体的特征长度, 例如可取它为经线到对称轴之间的最大距离 $R=\max[r(s),0\leqslant s\leqslant l]$• λ表示无量刚化的频率参数, ε是描述壳体相对厚度的微小几何参数•

将(5) 代入(6) 并利用(7) 得到无量刚化位移的基本方程为

$$\begin{bmatrix}\mathrm{L}+\lambda & \varepsilon k_1\mathrm{L} & c_1\frac{d}{dx}+c_2\\ -k_1 & 1 & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\\ -\left(c_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+c_3\right) & \varepsilon\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+k_3\right)\mathrm{L} & \lambda-c_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U\\V\\W\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},\tag{8}$$

式中微分算子和系数

$$\mathrm{L}=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+k_3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-(k_3^2+\nu k_1k_2),\ c_1=\frac{\mathrm{d}k_1}{\mathrm{d}x}+k_3(k_1-k_2),$$

$$c_2=k_1+\nu k_2,\ c_3=k_3(\nu k_1+k_2),\ c_4=k_1^2+2\nu k_1k_2+k_2^2•$$

由(5)~(7) 无量刚化的薄膜力、弯矩和剪力有如下有表达式:

$$\left.\begin{aligned}&N_1=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+\nu k_3\right)U+(k_1+\nu k_2)W,\ N_2=\left(\nu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+k_3\right)U+(\nu k_1+k_2)W,\\&M_1=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+\nu k_3\right)V,\ M_2=\left(\nu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+k_3\right)V,\ Q=\varepsilon\mathrm{L}V•\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

2 问题的提法

现在我们将注意力转到一类特殊的组合壳结构的自由振动问题上去• 考虑一个密封容器, 它由一个柱壳在其两端用半球壳封闭而组成• 假设这个组合壳的自由振动是轴对称、无扭转和简谐的• 记半球壳和柱壳的半径为 R, 柱壳的长度一半为 l_c• 由于这个组合壳具有某些对称性, 故问题的求解区间是$\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}+x_c\right)$• 这里 $x_c=\frac{l_c}{R}$ 是为了描述柱壳相对长度而引入的一个几何参数•

在球壳的顶点 $x=0$ 处, 边界条件为

$$U(0)=V(0)=W'(0)=0•\tag{10}$$

在柱壳的中点 $x=\pi/2+x_c$ 处, 对称或反对称变形模态的条件是

情形 I　对称模态

$$U\left(\frac{\pi}{2}+x_c\right)=V\left(\frac{\pi}{2}+x_c\right)=W'\left(\frac{\pi}{2}+x_c\right)=0. \tag{11a}$$

情形 II　反对称模态

$$U'\left(\frac{\pi}{2}+x_c\right)=V'\left(\frac{\pi}{2}+x_c\right)=W\left(\frac{\pi}{2}+x_c\right)=0. \tag{11b}$$

此外, 在半球壳与柱壳连接处 $x=\pi/2$ 的连接条件为

$$U\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=U\left(\frac{\pi}{2}+0\right),\ V\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=V\left(\frac{\pi}{2}+0\right),\ W\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=W\left(\frac{\pi}{2}+0\right), \tag{12a}$$

$$N_1\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=N_1\left(\frac{\pi}{2}+0\right),\ M_1\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=M_1\left(\frac{\pi}{2}+0\right),\ Q\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=Q\left(\frac{\pi}{2}+0\right). \tag{12b}$$

事实上, 壳体变形的连续性要求位移 U, W 和转角 V 必须是连续的, 这一点给出(12a). 而薄膜为 N_1, 弯矩 M_1 和剪力 Q 的平衡关系式导出(12b).

问题在数学上被结归为整个区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}+x_c\right]$ 求解频率参数 λ 和振动模态函数 $U(x)$, $V(x)$ 和 $W(x)$, 使它们在球壳区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 和柱壳区间 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}+x_c\right]$ 分别满足方程(8). 同时它们还需要满足边界条件(10) 和(11a) 和(11b) 以及连接条件(12a, b).

3 球 壳 的 解

对于球壳部分有几何关系 $\phi(s)=\frac{s}{R}$, $r(s)=R\sin\phi(s)$. 由它导出 $x=\phi$ 和

$$k_1\equiv 1,\ k_2\equiv 1,\ k_3=\cot x\qquad \left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right). \tag{13}$$

于是, 基本方程(8) 成为

$$\left.\begin{aligned}&[L_1+(1-\nu)+\lambda]U+\varepsilon[L_1+(1-\nu)]V+(1+\nu)\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x}=0,\\&-U+V+\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x}=0,\\&-(1+\nu)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+\cot x\right)U+\varepsilon\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+\cot x\right)\cdot\\&[L_1+(1-\nu)]V+[\lambda-2(1+\nu)]W=0\end{aligned}\right\}. \tag{14}$$

式中算子 $L_1=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+\cot x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{\sin^2 x}$.

表达式(9) 简化为

$$\left.\begin{aligned}&N_1=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+\nu\cot x\right)U+(1+\nu)W,\ N_2=\left(\nu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+\cot x\right)U+(1+\nu)W,\\&M_1=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+\nu\cot x\right)V,\ M_2=\left(\nu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+\cot x\right)V,\ Q=\varepsilon[L_1+(1-\nu)]V.\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

为了求解方程(4.2), 假设解具有如下形式:

$$\left.\begin{aligned}&U=\xi_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_\mu(\cos x),\ V=\xi_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_\mu(\cos x),\\&W=\xi_3P_\mu(\cos x)\quad\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)\cdot\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

这里,Legendre 函数的阶 μ 和常数 $\xi_j(j=1,2,3)$ 均为待定的未知数• Legendre 函数满足[5]•

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+\cot x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)P_\mu(\cos x)=-\mu(\mu+1)P_\mu(\cos x),\\&\mathrm{L}_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_\mu(\cos x)=-\mu(\mu+1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_\mu(\cos x)\cdot\end{aligned}\right\}\tag{17}$$

解(16)已经自动满足边界条件(10),因为

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_\mu(\cos x)\right]_{x=0}=0\cdot$$

将(16)代入(14)并利用(17)得到

$$\begin{bmatrix}(1-\nu)+\lambda-\beta&\varepsilon[(1-\nu)-\beta&1+\nu\\-1&1&1\\(1+\nu)\beta&-\varepsilon[(1-\nu)-\beta]\beta&\lambda-2(1+\nu)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\tag{18}$$

其中未知常数 $\beta=\mu(\mu+1)$• 将上述线性齐次方程组的系数矩阵记为 $B(\beta)$:

方程组(18)有非零解的条件给出

$$f(\beta)\overset{\mathrm{def}}{=}\det B(\beta)=\varepsilon\beta^3+a_1(\lambda)\beta^2+a_2(\lambda)\beta+a_3(\lambda)=0\cdot\tag{19}$$

其中系数

$$a_1(\lambda)=-\varepsilon(\lambda+4),\ a_2(\lambda)=-(1+\varepsilon\nu)\lambda+1-\nu^2+\varepsilon(5-\nu^2),$$

$$a_3(\lambda)=[\lambda+(1+\varepsilon)(1-\nu)]\cdot[\lambda-2(1+\nu)]\cdot$$

一般来说三次多项式 $f(\beta)$ 有三个根 $\beta_k(\lambda)(k=1,2,3)$• 这将导致Legendre函数的阶有六个解 $\nu_k=\mu_k^{\pm}(\lambda)=-\dfrac{1}{2}\pm\sqrt{\dfrac{1}{4}+\beta_k(\lambda)}\,(k=1,2,3)$• 但是,根据Legendre函数的性质 $\mathrm{P}_{-(\mu+1)}(\cos x)=\mathrm{P}_\mu(\cos x)$[5] 和关系式 $\mu_k^{+}+\mu_k^{-}=-1$,可以得出

$$\mathrm{P}_{\mu^-}(\cos x)=\mathrm{P}_{\mu^+}(\cos x)\cdot$$

因而,不失一般性可取 $\mu_k=\mu_k^{+}(\lambda)$• 这样,对于实参数 λ, ν 和 ε 的固定值存在三个解

$$\mu_k(\lambda)=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+{}_k(\lambda)}\qquad(k=1,2,3)\cdot\tag{20}$$

进一步求出线性各次方程组(18)的非零解为

$$\left.\begin{aligned}&\xi_{1(k)}=\varepsilon[\beta_k-(1-\nu)]+(1+\nu),\\&\xi_{2(k)}=-[\beta_k-(1-\nu)]+(1+\nu)+\lambda\qquad(k=1,2,3),\\&\xi_{3(k)}=(1+\varepsilon)[\beta_k-(1-\nu)]-\lambda,\end{aligned}\right\}\tag{21}$$

式中系数 $\xi_{j(k)}(j,k=1,2,3)$ 是对应于三个根 $\beta_k(\lambda)$ 的三组非零解•

假定三次多项式 $f(\beta)$ 无重根,则线性无关的模态函数为

$$\left.\begin{aligned}&X_{j,k}(x)=\xi_{j(k)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{P}_{\mu_k}(\cos x),\\&X_{3,k}(x)=\xi_{3(k)}\mathrm{P}_{\mu_k}(\cos x)\end{aligned}\quad(j=1,2,\ k=1,2,3)\right\}$$

满足边界条件(10)的微分方程(14)的通解是

$$\left.\begin{aligned}&U=\sum_{k=1}^{3}A_kX_{1,k}(x),\ V=\sum_{k=1}^{3}A_kX_{2,k}(x),\\&W=\sum_{k=1}^{3}A_kX_{3,k}(x)\quad\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right),\end{aligned}\right\}\tag{22}$$

其中未知常数 $A_k(k=1,2,3)$ 称为振幅•

一般来说对于给定的参数 λ, μ和ε, 三次多项式 $f(\beta)$ 或者有三个实根, 或者有一个实根和一对共轭复根• 这将会导致模态函数或者是三个实函数, 或者是一个实函数和一对复共轭函数• 为了避免复值运算, 最好是将模态函数解(22) 重新组合成实形式:

$$Y_{j,k}(x)\overset{\text{def}}{=}\mathrm{Re}(X_{j,k}(x))+\mathrm{Im}(X_{j,k}(x))\qquad(j,k=1,2,3)$$

因此, 解(22) 可重新表达为

$$\left.\begin{aligned}&U=\sum_{k=1}^{3}A_kY_{1,k}(x),\ V=\sum_{k=1}^{3}A_kY_{2,k}(x),\\&W=\sum_{k=1}^{3}A_kY_{3,k}(x)\quad\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)\bullet\end{aligned}\right\}\tag{23}$$

4 柱 壳 的 解

对于柱壳部分有几何关系 $\phi\equiv\frac{\pi}{2}$, $r\equiv R$, 它给出

$$k_1\equiv0,\ k_2=1,\ k_3\equiv0\bullet\tag{24}$$

基本方程(8) 亦可写成

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+\lambda\right)U+\nu\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x}=0,\ V+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}W=0,\\&-\nu\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}+\varepsilon\frac{\mathrm{d}^3V}{\mathrm{d}x^3}+(\lambda-1)W=0\bullet\end{aligned}\right\}\tag{25}$$

其中 $\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}+x_c\bullet$

表达式(9) 成为

$$\left.\begin{aligned}&N_1=\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}+\nu W,\ N_2=\nu\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}+W,\\&M_1=\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x},\ M_2=\nu\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x},\ Q=\varepsilon\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}\end{aligned}\right\}\tag{26}$$

满足边界条件(11a) 或(11b) 方程(25) 的解可写成:

$$\left.\begin{aligned}&U=\eta_1\begin{matrix}\sin\\\cos\end{matrix}\left[\sqrt{\gamma}\left(\frac{\pi}{2}+x_c-x\right)\right],\ V=\eta_2\begin{matrix}\sin\\\cos\end{matrix}\left[\sqrt{\gamma}\left(\frac{\pi}{2}+x_c-x\right)\right],\\&W=\eta_3\begin{matrix}\cos\\\sin\end{matrix}\left[\sqrt{\gamma}\left(\frac{\pi}{2}+x_c-x\right)\right]\qquad\left(\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}+x_c\right)\end{aligned}\right\}\tag{27}$$

式中上栏的三角函数对应于对称模态情形, 而下栏对应于反对称模态情形•

将(27) 代入(25) 导出齐次方程组

$$\begin{bmatrix}\lambda-\eta & 0 & \pm\nu\sqrt{\gamma}\\0 & 1 & \pm\sqrt{\gamma}\\\pm\nu\sqrt{\gamma} & \pm\varepsilon\gamma\sqrt{\gamma} & \lambda-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta_1\\\eta_2\\\eta_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\bullet\tag{28}$$

记上述方程组的系数矩阵为 $\boldsymbol{C}(\gamma)$. 保证方程组(28)有非零解的条件为

$$g(\gamma) \overset{\text{def}}{=} \det \boldsymbol{C}(\gamma) = \varepsilon\gamma^3 - \varepsilon\lambda\gamma^2 + (1 - \nu^2 - \lambda)\gamma + \lambda(\lambda - 1) = 0. \tag{29}$$

对于给定的 λ, ν 和 ε 上述三次方程有三个根 $\gamma = \gamma_k(\lambda)(k = 1, 2, 3)$, 并且它们对应于(28)的三组非零解为

$$\eta_{1(k)} = \pm\sqrt{\gamma_k},\ \eta_{1(k)} = \pm(\lambda - \gamma_k)\sqrt{\gamma_k},\ \eta_{1(k)} = -(\lambda - \gamma_k) \qquad (k = 1, 2, 3). \tag{30}$$

方程(28)和解(30)中的符号 ±, 当对称模态时取+ 号, 而反对称模态取- 号.

与球壳相类似的分析, 假定三次多项式 $g(\gamma)$ 无重根, 即它或者有三个实单根, 或者有一实根和一对复共轭根. 满足边界条件(11a)或(11b)方程(25)的通解可写成

$$\left.\begin{aligned} U &= \sum_{k=4}^{6} A_k Y_{1,k}(x),\ V = \sum_{k=4}^{6} A_k Y_{2,k}(x), \\ W &= \sum_{k=4}^{3} A_k Y_{3,k}(x) \qquad \left(\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + x_c\right), \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

其中振幅 $A_k(k = 4, 5, 6)$ 是未知的实常数. 实值的模态函数是

$$Y_{j,k} \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Re}(X_{j,k}(x)) + \operatorname{Im}(X_{j,k}(x)) \quad (j = 1, 2, 3;\ k = 4, 5, 6). \tag{32}$$

并且原来的模态函数的表达式为

$$X_{j,k}(x) = \eta_j(k) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\left[\sqrt{\gamma_k}\left(\frac{\pi}{2} + x_c - x\right)\right],\ X_{3,k}(x) = \eta_3(k) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left[\sqrt{\gamma_k}\left(\frac{\pi}{2} + x_c - x\right)\right]. \tag{33}$$

式中上、下栏的三角函数分别对应于对称模态和反对称模态的情形.

5 频率方程

解(22)和(31)已满足方程(8)和边界条件(10)和(11a)或(11b). 它们还必须满足连接条件(12a, b), 由此导出确定振幅 $\{A_j\}$ $(j = 1, 2, \cdots, 6)$ 的方程组

$$[D_{ij}(\lambda)]\{A_j\} = \{0\} \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, 6), \tag{34}$$

其中

$$D_{ij}(\lambda) = \operatorname{Re}(d_{ij}(\lambda)) + \operatorname{Im}(d_{ij}(\lambda)).$$

矩阵 $[d_{ij}(\lambda)]_{6\times 6}$ 的元素是

$$d_{ik} = \xi_{i(k)} P'_{\nu_k}(0),\ d_{i\,k+3} = \eta_{i(k)}\begin{bmatrix}\sin\\ \cos\end{bmatrix}(\sqrt{\gamma_k}x_c) \qquad (i = 1, 2),$$

$$d_{3\,k} = -\xi_{3(k)} P_{\nu_k}(0),\ d_{3\,k+3} = \eta_{3(k)}\begin{bmatrix}\cos\\ \sin\end{bmatrix}(\sqrt{\gamma_k}x_c)$$

$$d_{4\,k} = (\beta_k\xi_{1(k)} - \xi_{3(k)}) P_{\nu_k}(0),\ d_{4\,k+3} = \eta_{1(k)}\sqrt{\gamma_k}\begin{bmatrix}-\cos\\ +\sin\end{bmatrix}(\sqrt{\gamma_k}x_c),$$

$$d_{5\,k} = \beta_k\xi_{2(k)} P_{\nu_k}(0),\ d_{5\,k+3} = \eta_{2(k)}\sqrt{\gamma_k}\begin{bmatrix}-\cos\\ +\sin\end{bmatrix}(\sqrt{\gamma_k}x_c),$$

$$d_{6\,k} = [\beta_k - (1 + \nu)]\xi_{2(k)} P'_{\nu_k}(0),\ d_{6\,k+3} = -\gamma_k\eta_{2(k)}\begin{bmatrix}\sin\\ \cos\end{bmatrix}(\sqrt{\gamma_k}x_c) \qquad (k = 1, 2, 3)$$

式中上栏的三角函数对应于对称模态的情形, 而下栏对应于反对称模态. Legendre 函数在 $x = 0$ 的值可由 Gamma 函数表示如下[5]

$$P_{\nu_k}(0) = \frac{\Gamma(\nu_k/2 + 1/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu_k/2 + 1)}\cos\frac{\nu_k\pi}{2},\quad P'_{\nu_k}(0) = \frac{2\Gamma(\nu_k/2 + 1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu_k/2 + 1/2)}\sin\frac{\nu_k\pi}{2}. \tag{35}$$

为了确定振幅$\left\{A_j\right\}$的非零解和频率参数λ, 矩阵$[D_{ij}(\lambda)]_{6\times 6}$的行列式必须为零, 这将导出频率方程:

$$F(\lambda) \overset{\text{def}}{=} \det[D_{ik}(\lambda)] = 0.$$

应该指出频率方程(36)是精确的显式解析形式, 因为矩阵$[D_{ij}(\lambda)]_{6\times 6}$的元素可由三角函数和Gamma函数表示出来, 并且根$\xi_{(k)}$和$\eta_{(k)}$也可由三次方程(19)和(29)显示地解出.

6 数值结果和讨论

考虑一个密封容器组合壳结构的例子[1, 2], 壳体的材料常数是弹性模量$E = 207$ GPa, 材料密度$\rho = 7800$ kg/m^{3}和泊松比$\nu = 0.3$. 壳体的几何尺寸是厚度$h = 2.03$ mm, 柱壳部分长度的一半为$l_c = 171.5$ mm. 柱壳和球壳的半径为$R = 114.3$ mm. 在这一例子中球壳和柱壳的几何参数为$\varepsilon = \frac{1}{12}\left(\frac{h}{R}\right)^2 \cong 2.63\times 10^{-5}(h/R \cong 1.78\times 10^{-2})$和$x_c = \frac{l_c}{R} \cong 1.50$.

数值计算是基于上述解析解和频率方程. 编译了一个简单的Maple程序用于计算此例的固有频率. 借助于Maple在符号运算和带有所需有效数字精度的数值计算等方面的强大功能, 求出了对称和反对称模态前六个固有频率的数值, 并列于表1中.

应该指出的是本文解精确地满足球壳顶点$x = 0$处的边界条件(10). 可是大多数的数值方法, 例如在状态空间法中, 为了避免球壳顶点处方程所具有的奇异性, 将完整半球壳的实际模型改换成在球壳顶点开一小孔的模型, 并且将小孔处边界条件强制为如下自由边界条件[1]:

$$N_1(x_0) = M_1(x_0) = Q(x_0) = 0 \qquad (0 \leqslant x_0 \leqslant 1). \tag{37}$$

显然, 当$x_0 \to 0$时, 自由边界条件(37)的极限情形不能够退化到精确的边界条件(10). 或许正是这个差异导致了表1中状态空间法的近似结果与本文精确结果相比具有较大的但并不严重的误差. 在广义传递矩阵法中[3], 提出了一个更好的处理球壳顶点的奇异性的方法, 所得结果具有满意的精度(见表1). 在此法中条件(10)被近似成

$$U(x_0) = V(x_0) = W'(x_0) = 0 \qquad (0 \leqslant x_0 \ll 1). \tag{38}$$

当$x_0 \to 0$时它会精确地趋于条件(3.1). 这也是为什么广义传递矩阵法可以获得较高精度数值结果的一个原因.

表1 固有频率$f = \frac{1}{2\pi R}\sqrt{\lambda E/[\rho(1-\nu^2)]}$ (Hz)

模记	FEM 1)	SMM 2)	FEM 3)	TMM 4)	本文
对称	4005	4011	4004	4003	4002.8
	6297	6292	6292	6292	6292.7
	6808	6812	6902	6906	6805.9
反对称	5538	5539	—	—	5533.5
	6666	6671	—	—	6663.8
	7014	7016	—	—	7012.7

1) 由有限元软件ANSYS所得结果[1];
2) 基于Love壳理论的状态子空间方法[1];
3) Mindlin_Reissner有限元法[2];

4) 基于 Reissner_Naghdi 壳理论广义传递矩阵法[3]:

致谢 作者在爱尔兰国立(科克)大学做博士后研究期间,曾得到 Grannell 博士和 O'Callaghan 博士对本文研究的鼓励和支持· 对此,作者表示衷心的感谢·

[参 考 文 献]

[1] Tavakoli M S, Singh R. Eigensolutions of joined/hermetic shell structures using the state space method[J]. J Sound Vib, 1989, **130**: 97—123.

[2] Ozakca M, Hinton E. Free vibration analysis and optimisation of axisymmetric plates and shells_I Finite element formulation[J]. Comput Struct, 1994, **52**: 1181—1197.

[3] Shang X, Grannell J J. A generalised transfer matrix method for free vibration of axisymmetric shell [A]. In: Gilchrist ed. Proceedings of the 3rd International Conference on Modern Practice in Stress and Vibration Analysis [C]. Rotterdam: Balkema, 1997, 463—468.

[4] Kraus H. Thin Elastic Shells [M]. New York: John Wiley, 1967.

[5] Abramowitz M, Stegun I A. Handbook of Mathematics Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables [M]. New York: Dover, 1972.

An Exact Analysis for Free Vibration of a Composite Shell Structure_Hermetic Capsule

SHANG Xin_chun
(Department of Mathematics and Mechanics, Beijing University of Science and Technology, Beijing 100083, P R China)

Abstract: An exact analytical solution was presented for free vibration of composite shell structure_hermetic capsule. The basic equations on axisymmetric vibration were based on the Love classical thin shell theory and derived for shells of revolution with arbitrary meridian shape. The conditions of the junction between the spherical and the cylindrical shell segments are given by the continuity of deformation and the equilibrium relations near the junction point. The mathematical model of problem is reduced to as an eigenvalue problem for a system of ordinary differential equations in two separate domains corresponding to the spherical and the cylindrical shell segments. By using Legendre and trigonometric functions, exact and explicitly analytical solutions of the mode functions were constructed and the exact frequency equation were obtained. The implementation of Maple programme indicates that all calculations are simple and efficient in both the exact symbolic calculation and the numerical results of natural frequencies compare with the results using finite element methods and other numerical methdos. As a benchmark, the exactly analytical solutions presented in this paper is valuable to examine the accuracy of various approximate methods.

Key words: composite shells; hermetic capsule; free vibration; exact solution