

文章编号: 1000-0887(2001) 07-0943-09

正交各向异性薄板弯曲问题 分裂模量有限元法*

党发宁¹, 荣廷玉², 孙训方²

(1. 西安理工大学 岩土工程研究所, 西安 710048; 2. 西南交通大学 应用力学与工程系, 成都 610031)

(陈正汉推荐)

摘要: 讨论了建立分裂模量有限元法的必要性, 推导了正交各向异性薄板弯曲问题分裂模量变分原理的泛函, 以此为基础建立了该问题的分裂模量有限元法。该模型的特点是其中含有一个被称为分裂因子的参数, 通过算例说明: 适当调整分裂因子的值, 可以达到调整有限元模型的刚度、降低有限元刚度矩阵的谱条件数、克服常规有限元病态问题的目的, 最后分析了克服病态问题的机理。

关键词: 分裂模量变分原理; 分裂模量有限元法; 各向异性; 病态问题

中图分类号: O242.21 **文献标识码:** A

1 常规有限元模型所存在的问题

有限元模型按其独立函数及单元刚度矩阵之不同, 大致可分为五种类型。1) 根据位移场在单元的整个域内连续的假定而建立的协调模型^[1~4]; 2) 在单元内部假设平衡应力场而建立的平衡模型^[4]; 3) 除在每个单元内部假设平衡的应力场外, 沿单元的邻界还假设协调的位移函数而建立的杂交模型^[5~6]; 4) 独立函数既包含单元内部的位移, 又包含单元内部的应力, 以广义变分原理为基础建立的混合型有限元模型^[7]; 5) 杂交—混合有限元模型^[8]。

这些有限元模型的解有以下特点: 首先, 用势能原理建立的协调模型较真实结构偏硬, 给出数值解的下限, 而用余能原理建立的平衡模型较真实结构偏软, 给出数值解的上限^[9, 10]。图 1 是以正方形截面直杆为例, 在杆的横截面上分别划分出 16, 24, 36, 48, 64, 80, 100 个数目的三角形单元, 分别用直杆扭转问题的位移法和力法有限元程序计算的结果, 用幂函数拟合后的扭率与单元数的关系图。这里反应出的最重要的事实是: 在有限元体系中, 应变能成分是一个使模型偏硬的因素, 而余能成分则是使模型偏软的因素。其它三类模型的解一般介于以上二者之间, 应至少比以上两种模型之一的精度高, 当最大单元尺寸趋向于零时理论上都应收敛到解析解。所有这些有限元模型, 由于位能及余能成分在泛函中所占的比例是确定的, 一旦问题及单元划分确定, 其有限元总体刚度矩阵的谱条件数也随之确定, 模型的刚度确定, 计算精度当然也是确定的。有时难以适应弹性体的各种高谱条件数病态问题, 如极端各向异性体,

* 收稿日期: 2000_02_28; 修订日期: 2001_03_23

基金项目: 国家博士后科学基金资助项目

作者简介: 党发宁(1962—), 男, 汉族, 陕西省富平县人, 副教授, 计算力学博士, 副所长。

不可压缩问题, 奇变单元, 板的“自锁现象”等。其次, 工程领域中也常常会遇到一些有限元病态问题。

正是基于理论和工程领域中的需要, 本文引入了分裂模量变分原理, 建立了分裂模量有限元法。该模型具有以下特点: 首先, 它是一种变比例混合有限元模型; 其次, 通过调整模型中所包含的参数, 可以起到调节有限元模型的刚度, 降低刚度矩阵的谱条件数, 提高解的精度, 灵活适应弹性体的许多特殊需要, 克服常规有限元病态问题的目的。

本文以正交各向异性薄板弯曲问题为例, 给出了分裂模量有限元模型建立的方法、克服病态问题研究以及克服病态问题的机理分析。

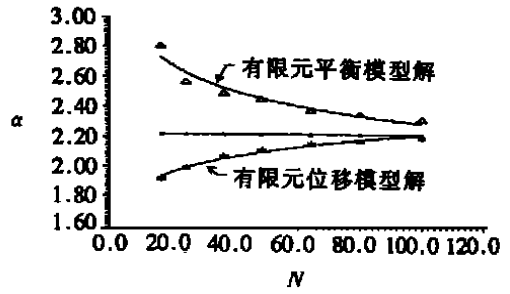


图1 有限元平衡模型和位移模型解示意图

2 基本方程组的分裂形式

为了建立线性弹性理论的新型变分原理, 有必要引入一些新的概念来描述本构关系^[11], 这将有利于以下的讨论。在 Cartesian 坐标系 x_i ($i = 1, 2, 3$ 分别表示 x, y 和 z 方向) 中, 传统线性理论的基本方程组可以表示为

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0 \quad (\text{在 } V \text{ 上}), \quad (1)$$

$$e_{\bar{j}} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\text{在 } V \text{ 上}), \quad (2)$$

$$\sigma_{ij} = S_{ijkl} e_{kl} \quad (\text{在 } V \text{ 上}); \quad (3)$$

或
$$e_{\bar{j}} = C_{\bar{j}kl} \sigma_{kl} \quad (\text{在 } V \text{ 上}), \quad (4)$$

$$u_i = u_i \quad (\text{在 } S_u \text{ 上}), \quad (5)$$

$$P_i \equiv \sigma_{ij} n_j = P_i \quad (\text{在 } S_p \text{ 上}), \quad (6)$$

这里, V 是弹性域, 承受有体力 F_i , 表面为 $S = S_u + S_p$, 在 S_u 上给定位移 u_i , S_p 上给定边界力 P_i , u_i , $e_{\bar{j}}$ 和 σ_{ij} 分别表示位移矢量、应变张量和应力张量。 n_j 是 S 的单位外法线, $\delta_{\bar{j}}$ 是 Kronecker 符号, 而 $(\dots)_{,j}$ 表示对 x_j 求导。应变能和余能密度函数分别为

$$A \equiv S_{mnpq} e_{mn} e_{pq} / 2, \quad (7)$$

$$B \equiv C_{mnpq} \sigma_{mn} \sigma_{pq} / 2, \quad (8)$$

这里 S_{mnpq} 和 C_{mnpq} 分别为弹性和柔性常数矩阵。

下面介绍一种与传统基本方程组等价的新的方程组。

假设 β_{ijkl} 是定义在 V 上的由任意变量组成的一个矩阵, 具有四阶张量的形式, 称其为分裂因子, 满足以下条件

$$\beta_{ijkl} = \beta_{iklj} = \beta_{jilk}, \quad (9)$$

$$\beta_{ijkl} S_{klst} = \beta_{stkl} S_{kl\bar{j}}. \quad (10)$$

利用分裂因子 β_{ijkl} 可以将弹性常数矩阵 S_{ijkl} 分裂为两部分

$$S_{\bar{j}kl} \equiv \beta_{ijst} S_{stkl} + (\delta_{is} \delta_{jt} - \beta_{jst}) S_{stkl}, \quad (11)$$

此时应力 σ_{ij} 变为

$$\sigma_{ij} = \beta_{ijkl} \sigma_{kl} + \sigma_{ij}^*, \quad (12)$$

或
$$\sigma_{ij} = \beta_{ijkl} S_{klmn} e_{mn} + \sigma_{ij}^*, \quad (13)$$

$$\sigma_{ij}^* \equiv (\delta_{ik}\delta_{jl} - \beta_{\bar{j}kl}) \sigma_{kl}, \quad (14)$$

$\sigma_{\bar{j}}^*$ 叫作分裂式应力张量。作为对 $\beta_{\bar{j}kl}$ 的补充, 引出另一个数量矩阵 α_{mnij} , 也满足规定

$$\alpha_{mnij} = \alpha_{nmij} = \alpha_{mjni}, \quad (15)$$

$$\alpha_{mnij} (\delta_{ik}\delta_{jl} - \beta_{\bar{j}kl}) = \delta_{nk}\delta_{il}. \quad (16)$$

由方程(14)和(16)可得

$$\sigma_{mn} = \alpha_{mpq} \sigma_{pq}^*. \quad (17)$$

引入两个新的能量密度函数 A^* 和 B^* 如下

$$A^* = \beta_{mkl} S_{klp} e_{pq} e_{mn} / 2, \quad (18)$$

$$B^* = C_{mnl} \alpha_{klp} \sigma_{pq}^* \sigma_{mn}^* / 2. \quad (19)$$

则本构方程转化为

$$\sigma_{ij} = \beta_{\bar{j}kl} S_{klmn} e_{mn} + \sigma_{ij}^* = \frac{\partial A^*}{\partial e_{\bar{j}}} + \sigma_{\bar{j}}^*, \quad (20)$$

$$e_{\bar{j}} = C_{ijkl} \alpha_{klmn} \sigma_{mn}^* = \frac{\partial B^*}{\partial \sigma_{ij}^*}, \quad (21)$$

公式(20)和(21)是分裂本构关系。分裂式平衡方程和应力边界条件如下

$$(\beta_{\bar{j}kl} S_{klmn} e_{mn})_{,j} + \sigma_{\bar{j},j}^* + F_i = 0, \quad (22)$$

$$(\beta_{\bar{j}kl} S_{klmn} e_{mn}) n_j + \sigma_{ij}^* n_j = P_i. \quad (23)$$

方程(2), (21)和(22)以及边界条件(5)和(23)是与传统的基本方程等价的分裂式基本方程, 特点是其中包含了可任意变化的分裂因子, 在新的有限元模型中它将发挥重要的作用。

3 分裂模量变分原理的泛函

借助于新的基本方程组, 文[11, 12]提出了一般弹性体分裂模量变分原理的泛函

$$\Pi_{2p} = \int_V (A^* + e_{\bar{j}} \sigma_{ij}^* - B^* - F_j u_k) dV - T_p, \quad (24)$$

这里, T_p 的表达式为

$$T_p = \int_{S_p} p_i u_i ds + \int_{S_u} (u_i - \bar{u}_i) p_i dS. \quad (25)$$

分裂模量变分原理为 $\delta \Pi_{2p} = 0$, 由此可得

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{2p} = & \int_V \left\{ \left[e_{ij} - \frac{\partial B^*}{\partial \sigma_{kl}^*} \right] \frac{\partial \sigma_{kl}^*}{\partial e_{\bar{j}}} \delta \sigma_{ij}^* - \left[\left[\frac{\partial A^*}{\partial e_{\bar{j}}} + \sigma_{\bar{j}}^* \right]_{,j} + F_i \right] \delta u_i \right\} dV - \\ & \int_{S_u} (u_i - \bar{u}_i) \delta P_i dS + \int_{S_u} \left[\frac{\partial A^*}{\partial e_{\bar{j}}} + \sigma_{\bar{j}}^* - \sigma_{\bar{j}} \right] n_j \delta u_i dS - \\ & \int_S \left[\left[\frac{\partial A^*}{\partial e_{ij}} + \sigma_{ij}^* \right] n_j - P_i \right] \delta u_i dS = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

由于变量 $\delta \sigma_{ij}^*$ 和 δu_i 是相互独立的, 变分方程(26)可给出基本方程(21)和(22)以及边界条件(5)和(23)。

以上方程中, 令 $\beta_{mnl} = \beta \delta_{mk} \delta_{nl}$, 可得一最简单且最实用的泛函

$$\begin{aligned} \Pi_{2p\beta} = & \int_V \left[\frac{1}{2} \beta S_{\bar{j}kl} e_{ij} e_{kl} - \frac{1}{2} (1 - \beta) C_{\bar{j}kl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} + (1 - \beta) \sigma_{\bar{j}} e_{\bar{j}} - F_i u_i \right] dV - \\ & \int_{S_u} (u_i - \bar{u}_i) [\beta \sigma_{ij} + (1 - \beta) S_{ijkl} e_{kl}] n_j dS - \int_{S_p} p_i u_i dS, \end{aligned} \quad (27)$$

这里 β 是一个关于坐标 x_i 的无量纲参数, 即分裂因子, 它可以在 $[0, 1]$ 内任意变化. β 可以看作是应变能成分在泛函中所占的比重. 对于非协调的有限元模型, 如果让 β 在 $[0, 1]$ 以外取值, 有时会得到更好的结果.

不难看出, $\Pi_{2p\beta}$ 不仅包含应变能成分 $\frac{1}{2} \beta S_{ijkl} e_{ij} e_{kl}$, 也包含余能成分 $\frac{1}{2} (1-\beta) C_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl}$, 而且这些成分的比例可以通过参数 β 任意调节. 如果在 V 内和 S 上令 $\beta = 1$, 且在 S_u 上 $u_i = u_i$, 则 $\Pi_{2p\beta}$ 变为 Π_p , 即最小势能原理的泛函; 而在 V 内若令 $\beta = 0$, 且在 S 上令 $\beta = 1$, σ_{ij} 满足平衡条件, 则它就变为 Π_c , 即最小余能原理的泛函. 因此, 参数 β 的其它中间值可给出更有利的泛函, 用以建立更高精度的变比例混合有限元模型.

4 分裂模量有限元公式

对于正交各向异性薄板弯曲问题, 其几何方程可表示为

$$\varepsilon = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}]^T = \left[\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right]^T = -z \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]^T, \quad (28)$$

其中应变张量 e_{ij} 与工程应变 ε_{ij} 的关系为
$$\begin{cases} e_{ij} = \varepsilon_{ij} (i = j) \\ e_{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} (i \neq j) \end{cases},$$
 应力应变关系转化为

$$\varepsilon = C \sigma, \quad (29)$$

$$\text{其中, } C = \frac{1}{E_1 E_2} \begin{bmatrix} E_2 & -\nu_2 E_1 & 0 \\ -\nu_1 E_2 & E_1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_1 E_2}{G} \end{bmatrix} \quad (30)$$

是柔性常数矩阵,

$$\sigma = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]^T \quad (31)$$

是应力矢量.

对于正交各向异性薄板弯曲问题, 上面泛函中分裂因子 β_{mnl} 的选择应该满足以下条件.

1) 与弹性常数 E_1, E_2 和 G 相对应, 至少应包含三个独立的非零项. 2) β_{mnl} 的选择应保证单元混合矩阵的对称性. 研究表明, 下面的选择是恰当的

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta^* & 0 \\ \beta^* & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 \end{bmatrix}, \quad (32)$$

$$\text{其中, } \beta^* = (\beta_1 \nu_1 E_2 - \beta_2 \nu_2 E_1) / (E_1 - E_2). \quad (33)$$

记

$$\alpha^{-1} = \begin{bmatrix} 1 - \beta_1 & -\beta^* & 0 \\ -\beta^* & 1 - \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \beta_3 \end{bmatrix}, \quad (34)$$

则分裂式应变能函数和余能函数可表示为

$$A^* = \frac{1}{2} \varepsilon^T \beta C^{-1} \varepsilon = \frac{1}{2} \varepsilon^T E_{\beta_{ij}} \varepsilon, \quad (35)$$

$$B^* = \frac{1}{2} \sigma^{*T} C \alpha \sigma^* = \frac{1}{2} \sigma^T \alpha^{-1} C \sigma = \frac{1}{2} \sigma^T C_{\beta_{ij}} \sigma, \quad (36)$$

上式中

$$E_{\beta_{\bar{j}}} = \beta C^{-1} \quad (37)$$

是分裂式弹性常数矩阵,

$$C_{\beta_{\bar{j}}} = \alpha^{-1} C \quad (38)$$

是分裂式柔性常数矩阵, 分裂式应力为

$$\sigma^* = (\delta_{ik}\delta_{jl} - \beta_{\bar{j}kl}) \sigma_{kl} = \alpha^{-1} \sigma \quad (39)$$

将方程(35), (36) 和(39)代入泛函(24) 式得

$$\Pi_{\beta p} = \int_A \left\{ \frac{1}{2} \varepsilon^T E_{\beta_{\bar{j}}} \varepsilon + \varepsilon^T \alpha^{-1} \sigma - \frac{1}{2} \sigma^T C_{\beta_{\bar{j}}} \sigma - F_{ku} k \right\} dz dA - T_p \cdot \quad (40)$$

$$\text{记 } \kappa = [K_x, K_y, 2K_{xy}]^T = - \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]^T, \quad (41)$$

$$M = [M_x, M_y, M_{xy}]^T = \frac{t^3}{12z} [\alpha_x, \alpha_y, \tau_{xy}]^T. \quad (42)$$

将(41)和(42)代入泛函(40), 并沿 z 轴方向进行积分得

$$\Pi_{\beta p} = \frac{1}{2} \int_A \left\{ \frac{t^3}{12} \kappa^T E_{\beta_{\bar{j}}} \kappa + 2 \kappa^T \alpha^{-1} M - \frac{12}{t^3} M^T C_{\beta_{\bar{j}}} M - 2q w \right\} dA - T_p, \quad (43)$$

其中

$$T_p = \int_{S_p} \left[M_n \frac{\partial w}{\partial n} + Q_n w \right] dS - \int_{S_u} \left[\left[\frac{\partial w}{\partial n} - \frac{\partial w}{\partial n} \right] M_n + (w - w) Q_n \right] dS. \quad (44)$$

方程(43)就是正交各向异性薄板弯曲问题分裂模量变分原理的泛函。

上式中 A 为板中面域, $S = S_p + S_u$ 为其边界, S_u 上给定挠度 w 和 $\frac{\partial w}{\partial n}$, 而在 S_p 上指定边界弯矩 M_n 和 Q_n , 承受横向荷载 q , E_1, E_2 为两个弹性主向上的弹性模量, ν_1 和 ν_2 为两个弹性主向上的波桑比, G 是剪切弹性模量; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 为分裂因子。

选取三角形板弯曲单元, 引入结点位移矢量为 $d_i = [w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}]^T (i, j, m)$, 则单元位移矢量为

$$d = [d_i^T, d_j^T, d_m^T]^T. \quad (45)$$

单元位移选用线性模式, 将结点坐标、结点位移代入后得形函数, 由此得应变矢量为

$$\kappa = B d, \quad (46)$$

其中 B 是常规位移有限元的应变矩阵^[13]。同一单元的应力矢量当作常量, 记为

$$M_0 = [M_{x0}, M_{y0}, M_{xy0}]^T, \quad (47)$$

然后将方程(46)和(47)代入泛函(43) 式得

$$\Pi_{\beta p} = \frac{1}{2} \sum_e \left\{ d^T k_w d + 2 d^T k_{wm} M_0 - M_0^T k_m M_0 - 2 d q^e \right\}, \quad (48)$$

$$\text{其中 } k_w = \int_e B^T \frac{t^3}{12} E_{\beta_{\bar{j}}} B dA_e; \quad k_{wm} = \int_e B^T \alpha^{-1} dA_e = k_{mw}^T. \quad (49a, b)$$

$$k_m = \int_e \frac{12}{t^3} C_{\beta_{\bar{j}}} dA_e. \quad (49c)$$

分裂式单元混合刚度矩阵为

$$k_e = \begin{bmatrix} k_w & k_{wm} \\ k_{mw} & k_m \end{bmatrix}. \quad (50)$$

变分方程 $\delta \Pi_{\beta p} = 0$ 给出最终的代数方程:

$$Kp = q \quad (51)$$

正交各向异性薄板弯曲问题分裂模量有限元的单元混合刚度矩阵(50)既不同于常规混合有限元的刚度矩阵,也不同于其它模型的刚度矩阵,它由刚度矩阵 k_w 、柔度矩阵 k_m 和两个混合型矩阵 k_{wm} 与 k_{mw} 组成。其中刚度矩阵 k_w 中,令 $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1$, 则其转化为常规位移元中的刚度矩阵。对于完备的协调有限元模型,刚度矩阵 k_w 部分是使模型偏硬的因素,而柔度矩阵 k_m 部分是使模型偏软的因素。但无论是协调还是非协调有限元模型,都可以通过改变分裂因子的值,来改变有限元模型的刚度,使有限元模型更接近于弹性体的真实情况,达到提高解的精度,克服常规有限元中某些病态问题的效果。

以上各列式中令 $E_1 = E_2 = E$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ 和 $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta$, 即转化为各向同性薄板弯曲问题分裂模量有限元模型,泛函(43) 转化为

$$\Gamma_{p,\beta} = \frac{1}{2} \int_A \left\{ \frac{t^3}{12} K^T E_{\beta} K + 2(1-\beta) K^T M - \frac{12}{t} M^T C_{\beta} M - 2q^T \right\} dA - T_p, \quad (52)$$

其中 $E_{\beta} = \beta C^{-1}$ 和 $C_{\beta} = (1-\beta)C$ 是分裂式弹性和柔性常数矩阵。分裂式单元混合刚度矩阵各分量转化为

$$k_w = \int_e B^T \frac{t^3}{12} E_{\beta} B dA_e; \quad k_{wm} = (1-\beta) \int_e B^T dA_e = k_{mw}^T, \quad (53a, b)$$

$$k_m = \int_e \frac{12}{t} C_{\beta} dA_e. \quad (53c)$$

5 算例分析

本段通过算例说明分裂模量有限元具有刚度可调整,计算精度高,可克服某些病态问题等优点。

算例 5.1 四边固支的正交各向异性方板,承受集度为 P_0 的均布横向荷载,假设边界与弹性主向平行。板中心挠度的解析解为^[14] $W_0 = 0.00156p_0 a^4/D_0$; 用差分法(4×4 正方形网格)计算的结果为 $W_0 = 0.0019p_0 a^4/D_0$, 误差为 24%。

用分裂模量有限元计算,单元网格如图 2, 令所有单元的分裂因子为 $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0.9999$, 得板中心的挠度为 $W_0 = 0.00160p_0 a^4/D_0$, 误差为 2.6%。如果令所有单元的分裂因子为 $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1.6$, 则挠度为 $W_0 = 0.001558p_0 a^4/D_0$, 此时的误差已非常小,十分接近解析解。可见分裂模量有限元的计算精度比差分法高得多。

现假设板中心有一硬块, $1/4$ 板的单元网格如图 3。令 $D_{0\text{硬块单元}} = 0.92 \times 10^{12} D_{0\text{一般单元}}$, 此时由于硬块的面积仅占板总面积的 $1/64$, 故由理论分析可知板中心处的挠度应比无硬块时稍小,但相差不大。如果用常规位移元来计算,则已出现病态。

用分裂模量法计算,硬块单元的分裂因子 β_1 、 β_2 和 β_3 分别取为 10^{-12} 、0.9999 和 0.9999, 其它单元分裂因子的取值为 0.01、0.9999 和 0.9999, 得板中心的挠度为 $W_0 = 0.00142p_0 a^4/D_0$, 与理论分析结果相吻合。说明分裂模量法能够克服常规位移元因两个弹性主向上的模量相差巨大所引起的病态。

下面再来看分裂模量有限元在各向同性薄板分析中的应用。

算例 5.2 一正方形均匀薄板,四边简支,承受集度为 $9.8 \times 10^{-3} \text{Mpa}$ 的均匀横向荷载,板长为 0.20m,厚度为 $0.2 \times 10^{-2} \text{m}$,弹性模量为 205.8GPa, $\nu = 0.3$, $1/4$ 板的网格划分如图 4。板

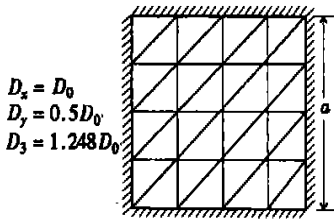


图2 各向异性无硬块方板单元

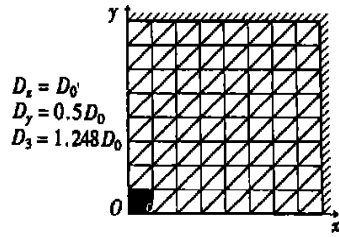


图3 各向异性含硬块方板单元

中心处挠度的解析解^[15]为 $W_0 = 4.222 \times 10^{-4} \text{ m}$ 。

用 Herrmann^[16] 提出的有限元混合法计算的结果为 $w_0 = 4.389 \times 10^{-4} \text{ m}$, 误差为 3.96%。用分裂模量法, 取 $\beta = 0.9999$, 计算的解为 $w_0 = 4.250 \times 10^{-4} \text{ m}$, 误差为 0.66%。当分裂因子 β 由零逐渐增大时, 挠度的数值解由上方逼近真解并一直变到比真解小如图 5。说明用分裂模量法解题时, 可以通过适当地选取分裂因子 β 的值来提高解的精度。

现在令板中心 8 个单元的弹性模量为 $2.058 \times 10^{16} \text{ GPa}$ 。由于这个硬块的尺寸仅占板总面积的 $1/64$, 因此理论分析可以判断挠度应比均匀板稍小, 但相差不大。此时普通位移法已出现严重病态。用分裂模量法, 令一般单元的分裂因子为 0.9999 保持不变, 硬块单元的分裂因子小于 1.0×10^{-20} 以后, 板中心处挠度的解变得稳定, 并与理论分析结果一致如图 6。

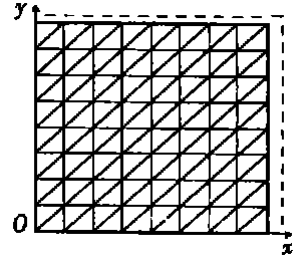


图4 各向同性均匀方板单元

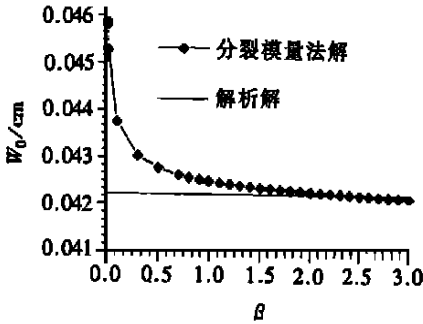


图5 分裂因子与板中心挠度的分裂法解的关系

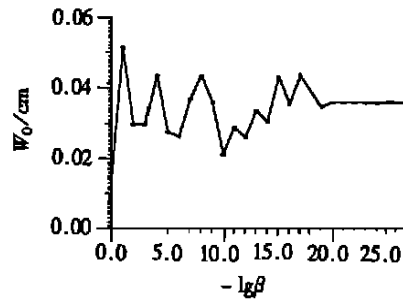


图6 板中心挠度随分裂因子变化图

再让硬块单元的弹性模量由 205.8 GPa 渐增到 $2.058 \times 10^{18} \text{ GPa}$ 。用常规位移法计算, 当两类单元的弹模比增加到 $E(2)/E(1) = 1.0 \times 10^{12}$ 以后, 挠度的解出现病态。如果用分裂模量法来计算, 随着弹性模量的逐渐增加, 让分裂因子的值逐渐减小, 计算结果如图 7, 可见其解的精度高, 且非常稳定。说明分裂模量法能够克服因弹性模量相差巨大所引起的病态问题。

6 克服有限元病态问题的机理分析

有限元病态是一个比较复杂的问题, 下面仅以材料两个弹性主向上的弹性模量相差巨大时所引起的病态问题为例分析分裂模量法克服病态问题的机理。

对于正交各向异性薄板弯曲问题, 当两个弹性主向上的弹性模量相差巨大时, E_2 相比 E_1

太小, 由常规位移法的弹性常数矩阵

$$E = \frac{1}{2(1 - \nu_1 \nu_2)} \begin{bmatrix} E_1 & \nu_1 E_2 & 0 \\ \nu_2 E_1 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & G(1 - \nu_1 \nu_2) \end{bmatrix} \quad (54)$$

可看出, 由于计算机的有效字长有限, E_2 的有效数字部分或全部被忽略, 其极限情况 $E_1/E_2 \rightarrow \infty$ 时, E_2 将被当做零来处理, 这样的有限元模型背离了原弹性力学方程, 使其解发生病态。分裂模量有限元法则不同, 它的弹性常数矩阵 $E_{\beta ij}$ 为

$$E_{\beta ij} = \frac{1}{2(1 - \nu_1 \nu_2)} \begin{bmatrix} \beta_1 E_1 + \frac{(\beta_1 - \beta_2)(\nu_1 E_2)^2}{E_1 - E_2} & \beta_1 \nu_1 E_2 + \frac{(\beta_1 - \beta_2)(\nu_1 E_2)}{E_1/E_2 - 1} & 0 \\ \beta_2 \nu_2 E_1 + \frac{(\beta_1 - \beta_2)(\nu_2 E_1)}{1 - E_2/E_1} & \beta_2 E_2 + \frac{(\beta_1 - \beta_2)(\nu_1 E_2)^2}{E_1 - E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 G(1 - \nu_1 \nu_2) \end{bmatrix} \quad (55)$$

注意到 $\nu_1 E_2 = \nu_2 E_1$ 是一个量级适中的数, 当某个弹性主向上的弹性模量 E_1 相比另一弹性主向上的模量 E_2 高出 λ 个量级时, 令该弹性主向上的分裂因子 β_1 为 $10^{-\lambda}$, 另一分裂因子为一个接近于 1 的数, 则 $\beta_1 E_1$ 为一个量级相当的数, 这就保证了弹性常数矩阵 $E_{\beta ij}$ 中的元素不至于因弹性主向上的模量相差巨大而量级相差巨大。产生病态问题的潜在因素被消除了。

7 结 语

分裂因子并不影响严格的弹性理论解, 这是由解的唯一性所决定的。然而把它用于有限元时, 其取值对数值解的精度却有很大的影响, 通过改变分裂因子的值, 可以调节有限元模型的刚度, 使有限元模型能更好地适合弹性体的真实情况, 这正是最初引入分裂因子的实用目的之一。关于分裂因子的选取方法请参考文[17], 这里不再讨论。

[参 考 文 献]

- [1] Clough R W. The finite element method in plane stress analysis[J]. Pro Amer Soc Civil Eng, 1960, 87: 345—378.
- [2] Argyris J H. Energy Theorems and Structural Analysis [M]. Butterworth, 1960.
- [3] Turner M J, Clough R W, Martin H G, et al. Stiffness and deflection analysis of complex structures [J]. J Aero Sci, 1956, 23: 805—823.
- [4] Fraeijs de Veubeke B. Displacement and equilibrium models in the finite element method[A]. In: Zienkiewicz O C, Holister G S Eds. Stress Analysis [C]. London: John Wiley and Sons Ltd. 1965, 145—197.
- [5] Pian T H H. Derivation of element stiffness matrices[J]. AIAA J, 1964, 2: 576—577.
- [6] Pian T H H. Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distributions[J]. AIAA J, 1964, 2: 1333—1336.
- [7] Herrmann L R. A bending analysis for plates[A]. In: 1st Conf Matrix Methods in Structural Mechanics [C]. Ohio: Wright_Patterson Air Force Base, 1965, 577—604.
- [8] Pan Y S, Chen D P. Formulation of hybrid/ mixed plate bending element with splitting and partially

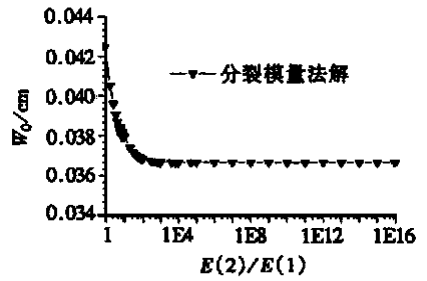


图 7 挠度随弹性模量变化图(分裂法)

- compatible displacements[A]. In: Proc of International Conf on Computational Engineering Mechanics [C], Beijing: 1987, 37—42.
- [9] Fraeijs de Veubeke B. Upper and lower bounds in matrix structural analysis[A]. In: Fraeijs de Veubeke B Ed. Matrix Methods of Structural Analysis [C]. New York: MacMillan, 1964, 1: 165—201.
- [10] Sander P G. Bornes superieures et inferieures dans l' analyse matricielle des plaques en flexion_torsion [J]. Bull Soc Royale Seien ces Liege, 1964, 33(7): 456—494.
- [11] 荣廷玉. 弹性力学广义混合变分原理及有限元广义混合法 [A]. 见: 四川省力学学会及重庆市力学学会第一届计算力学学术论文报告会论文集 [C]. 第一集, 1983, 1—13.
- [12] RONG Ting_yu. Generalized mixed variational principles and new FEM models in solid mechanics [J]. Int J Solid Structures, 1988, 24(1): 1131—1140.
- [13] Zienkiwicz O C. The Finite Element Method in Engineering Science [M]. McGraw_Hill Book Company, 1971.
- [14] Leknitskii S G. Anisotropic Plates [M]. London: Gordon & Breach, 1968.
- [15] Timoshenko S, Woinowsky_Kreger S. Theory of Plates & Shells [M]. New York: McGraw_Hill Book Company, 1959.
- [16] 徐次达, 华伯浩. 固体力学有限元理论、方法及程序 [M]. 北京: 水利电力学院, 1983.
- [17] 党发宁. 有限元广义混合法及其在克服有限元病态问题研究中的应用 [D]. 成都: 西南交通大学博士学位论文, 1998, 1: 54—74.

Splitting Modulus Finite Element Method for Orthogonal Anisotropic Plate Bending

DANG Fa_ning¹, RONG Ting_yu², SUN Xun_fang²

(1 Institute of Geotechnical Engineering, Xi'an University of
Technology, Xi'an 710048, P R China;

2. Department of Applied Mechanics and Engineering, Southwest Jiaotong University,
Chengdu 610031, P R China)

Abstract: Splitting modulus variational principle in linear theory of solid mechanics was introduced, the principle for thin plate was derived, and splitting modulus finite element method of thin plate was established too. The distinctive feature of the splitting model is that its functional contains one or more arbitrary additional parameters, called splitting factors, so stiffness of the model can be adjusted by properly selecting the splitting factors. Examples show that splitting modulus method has high precision and the ability to conquer some ill_conditioned problems in usual finite elements. The cause why the new method could transform the ill_conditioned problems into well_conditioned problem, is analyzed finally.

Key words: splitting modulus variational principle; method of splitting modulus finite elements; anisotropic; ill_conditioned problems