

文章编号: 1000-0887(2001) 08\_0817\_08

# 具有平方、立方非线性项的耦合 动力学系统 1: 2 内共振分岔\*

陈予恕, 杨彩霞, 吴志强, 陈芳启

(天津大学 机械学院 力学系, 天津 300072)

(本刊编委陈予恕来稿)

摘要: 对一类具有平方、立方非线性项的耦合动力学系统 1: 2 内共振情形进行了研究。首先, 用直接方法求出该系统 1: 2 内共振时的 Normal Form, 该系统的 Normal Form 中, 不仅含有平方非线性项, 同时还含有立方非线性项。通过采用适当的变量变换, 将 4 维分岔方程约化成 3 维, 进而得到单变量 4 次分岔方程。最后用奇异性理论, 研究了一类普适开折的分岔特性。该方法可用于 4 维中心流形上流的强内共振时的分岔行为分析。

关键词: 平方立方非线性; Normal Form; 1: 2 内共振分岔

中图分类号: O193; O177.91 文献标识码: A

## 引 言

从 90 年代起, 非线性动力系统理论向高维和分析工程科学、自然科学和社会科学等部门实际系统中复杂动力学行为发展, 成为非线性科学研究的热点。

Normal Form 理论作为简化方程的手段, 给出了微分方程组在平衡位置或周期运动附近可能化成的最简形式, 因而显著地简化了高维非线性动力学系统的求解和研究分岔问题的过程, 同样地简化了所得结果的论证和分析。

A. H. Nayfeh<sup>[1]</sup>研究了具有平方非线性项的 1: 2 内共振; W. F. Langford<sup>[2]</sup>研究了具有平方、立方非线性项的 1: 1 内共振; W. F. Langford<sup>[3]</sup>研究 1: 2 内共振时 Normal Form 只取到 2 阶; 吴志强<sup>[4]</sup>导出了直到 3 阶的非半单 1: 1 内共振分岔 Normal Form 系数的表达式以及更高阶 Normal Form 系数的求解公式, 推导了多重非内共振 Hopf 分岔的 Normal Form 计算公式。陈芳启等<sup>[5]</sup>研究了单自由度参激系统 4 阶分岔方程的普适开折问题。

从现有文献看, 并没有包括同时含有平方非线性项及立方非线性项的 1: 2 内共振情况的分岔分析, 而这类方程在工程实际中却大量存在, 因此有必要对此类情况进行研究<sup>[6,7]</sup>。

本文根据 Poincaré 共振定义, 对 1: 2 强内共振 Normal Form 的形式进行了计算; 然后通过适当的变量变换技巧, 由 4 维分岔方程降成 3 维, 采用消元法得到单变量的 4 阶分岔方程; 并用

\* 收稿日期: 2000\_05\_08; 修订日期: 2001\_03\_15

基金项目: 国家重点基础研究专项经费资助(G1998020316); 国家自然科学基金资助项目(19990510); 教育部博士点基金资助项目(D09901)

作者简介: 陈予恕(1931—), 男, 山东肥城人, 教授, 博士生导师, 俄国应用科学院国外院士。

奇异性理论进行了普适开折和动态行为的分岔分析。如果一个高维非线性动力学系统,在某一组参数值时具有成 1:2 关系的两对纯虚根,首先可用中心流形定理将之化到 4 维中心流形上,然后可用本文建议的方法分析其局部分岔特性。

## 1 1:2 强内共振时 Normal Form

现有非线性动力系统

$$y' = f(y) \quad f \in C^k(R^n), \quad (1)$$

通过一系列近恒等的非线性坐标变换

$$y = x + p_k(x) \quad (k = 2, \dots, l-1), \quad (2)$$

可将方程(1)化为正规形。在非共振情况下,该非线性方程可线性化。而在共振情形,则只存在共振的非线性项。

上述经典方法,由于在变换过程中,需要计算一个同调算子,而该同调算子的维数随着所求阶数的升高而增加很快,因而中间过程极为烦琐。

吴志强在文[4]中采用了一种特殊的近恒等变换,提出了求 Normal Form 的直接方法,由于避免了推导同调算子时进行的多项式矩阵的求逆;将中心流形和求 Normal Form 的推导综合起来,所求解的方程的维数,不会随着所求非线性项阶数的升高而增大,只需求解与原系统同维数的方程。

本文研究的方程,是我们用拉格朗日方程建立的某航天结构刚柔耦合多自由度系统的非线性动力学方程,经一系列简化处理,并用中心流形定理约化而成的两自由度的 4 维方程组<sup>[6]</sup>。对于汽轮发电机组,当考虑对称柔性单跨转子时,轮盘处的两个自由度与轴颈处的两个自由度构成一个 4 自由度系统,满足 1:2 内共振条件时,其运动学方程形式上与本文所研究的方程一致。

现有两自由度 1:2 耦合系统的运动方程:

$$\begin{cases} \ddot{x} + x + \varepsilon + \varepsilon k_1 y + \varepsilon c_1 \dot{y} = xy + x\dot{y} + \dot{x}^2 y + y^2 + x^2 y + x^3 = f_1, \\ \ddot{y} + (4 + \mu)y + \varepsilon c_2 \dot{y} + k_2 x + c_3 \dot{x} = \\ 2xy + x\dot{y} + 2\dot{x}^2 y + 3y^2 + x^2 y + x^3 = f_2 \end{cases} \quad (3)$$

其中  $x, y$  分别表示刚柔两物体  $x, y$  两方向的位移;  $c_1, c_2, c_3$  为线性阻尼;  $k_1, k_2$  为线性刚度;  $\varepsilon, \delta$  为小参数;  $f_1, f_2$  为该方程中的非线性项,且同时含有平方和立方非线性项。

现求系统(3)的 Normal Form

$$\text{令 } x = x_1, \dot{x}_1 = x_2, y = x_3, \dot{x}_3 = x_4$$

将式(3)化为动力系统(1)的形式:

$$\dot{X} = AX + BX + F(x), \quad (4)$$

其中,

$$X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T, \quad (5)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_2 & -c_3 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

A 为系统线性项系数矩阵。

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta & -\xi_{k_1} & -\xi_{c_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & -\xi_{c_2} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$B$  视为对系统线性项的扰动矩阵。

$$F(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -f_1 \\ 0 \\ -f_2 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$F(x)$  为非线性函数矩阵。

经近恒等的非线性变换:

$$X = TZ + H(Z), \quad (9)$$

其中,

$$Z = (z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2)^T, \quad (10)$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ I & 0 & -I & 0 \\ -\frac{1}{3}k_2 - \frac{1}{3}Ic_3 & 1 & -\frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}Ic_3 & 1 \\ -\frac{1}{3}k_2 - \frac{1}{3}Ic_3 & 2I & \frac{1}{3}I(k_2 - Ic_3) & -2I \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$H(Z) = \sum_{|m| \geq 2} H_m Z^m. \quad (12)$$

将(4)化为:

$$Z = JZ + C(Z), \quad (13)$$

其中,

$$J = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2I \end{pmatrix}, \quad (14)$$

$$C(Z) = \sum_{|m| \geq 2} C_m Z^m, \quad (15)$$

$$[\langle m, \lambda \rangle J - A] H_m = \tilde{f}_m - TC_m. \quad (16)$$

根据 Poincaré 共振定义,

$$\langle m, \lambda \rangle = \lambda. \quad (17)$$

将 Normal Form 中保留的共振项写为  $z_1^{m_1} \bar{z}_1^{m_2} z_2^{m_3} \bar{z}_2^{m_4}$  形式。当满足 1/2 内共振条件时,

$$m_1 I - m_2 I + 2m_3 I - 2m_4 I = I, \quad (18)$$

$$m_1 I - m_2 I + 2m_3 I - 2m_4 I = -I, \quad (19)$$

$$m_1 I - m_2 I + 2m_3 I - 2m_4 I = 2I, \quad (20)$$

$$m_1 I - m_2 I + 2m_3 I - 2m_4 I = -2I. \quad (21)$$

Normal Form 1 阶项为:

由式(18)得:  $m_1 = 1$  保留  $z_1$  项,

由式(19)得:  $m_2 = 1$  保留  $\bar{z}_1$  项,  
 由式(20)得:  $m_3 = 1$  保留  $z_2$  项,  
 由式(21)得:  $m_4 = 1$  保留  $\bar{z}_2$  项.

Normal Form 2 阶项为:

由式(18)得:  $m_2 = 1, m_3 = 1$  保留  $\bar{z}_1 z_2$  项,  
 由式(19)得:  $m_1 = 1, m_4 = 1$  保留  $z_1 \bar{z}_2$  项,  
 由式(20)得:  $m_1 = 2$  保留  $z_1^2$  项,  
 由式(21)得:  $m_2 = 2$  保留  $\bar{z}_1^2$  项.

Normal Form 3 阶项为:

由式(18)得:  $m_1 = 2, m_2 = 1; m_1 = 1, m_3 = 1, m_4 = 1$   
 保留  $z_1^2 \bar{z}_1, z_1 z_2 \bar{z}_2$  项,  
 由式(19)得:  $m_1 = 1, m_2 = 2; m_2 = 1, m_3 = 1, m_4 = 1$   
 保留  $z_1 z_1^2 \bar{z}_1, \bar{z}_1 z_1 z_2 \bar{z}_2$  项,  
 由式(20)得:  $m_1 = 1, m_2 = 1, m_3 = 1; m_3 = 2, m_4 = 1$   
 保留  $z_1 \bar{z}_1 z_2, z_2^2 \bar{z}_2$  项,  
 由式(21)得:  $m_1 = 1, m_2 = 1, m_4 = 1; m_3 = 1, m_4 = 2$   
 保留  $z_1 z_1 \bar{z}_2, z_2 z_2^2$  项.

若相应系数记为  $c_{m_1 m_2 m_3 m_4}$  及  $e_{m_1 m_2 m_3 m_4}$ , 则 1/2 内共振 Normal Form 有如下形式:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 2I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{0110} \bar{z}_1 z_2 \\ e_{2000} z_1^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{2100} z_1^2 \bar{z}_1 + c_{1011} z_1 z_2 \bar{z}_2 \\ e_{1110} z_1 \bar{z}_1 z_2 + e_{0021} z_2^2 \bar{z}_2 \end{pmatrix}, \quad (22)$$

其中  $c_{0110}, c_{2100}, c_{1011}, e_{2000}, e_{1110}, e_{0021}$  为 6 个复数, 且与原系统参数有关.

$$c_{0110} = \frac{8}{51} k_2 - \frac{8}{51} I c_3 - \frac{1}{17} I + \frac{2}{51} I k_2 + \frac{2}{51} c_3 - \frac{4}{17}, \quad (23)$$

$$c_{2100} = -\frac{1}{91800} I (549 c_3 k_2 - 1368 I k_2^2 - 54 I c_3^2 - 44649 I c_3 + 1080 I k_2 + 762 I k_2 c_3 - 82890 k_2 - 1080 c_3 + 4527 c_3^2 + 6054 k_2^2 + 137700), \quad (24)$$

$$c_{1011} = \frac{1}{6120} I (729 k_2 + 80 c_3^2 - 153 c_3 + 80 k_2^2 - 2727 + 816 I c_3), \quad (25)$$

$$e_{2000} = \frac{13}{150} c_3 k_2 - \frac{1}{25} I k_2^2 + \frac{7}{150} I c_3^2 + \frac{2}{15} I c_3 + \frac{1}{15} I k_2 - \frac{7}{50} I k_2 c_3 + \frac{2}{15} k_2 - \frac{1}{15} c_3 + \frac{3}{50} c_3^2 - \frac{2}{25} k_2^2, \quad (26)$$

$$e_{1110} = \frac{1}{1101600} I (-5238 c_3 k_2 + 23481 I k_2^2 - 8352 I c_3^2 - 898290 I c_3 - 17010 I k_2 + 116271 I k_2 c_3 - 45090 k_2 - 12960 c_3 - 6174 c_3^2 + 31347 k_2^2 - 1927800), \quad (27)$$

$$e_{0021} = -\frac{1}{20} I (k_2 + 6 + 2 I c_3). \quad (28)$$

## 2 由 Normal Form 求分岔方程

1: 2 内共振的 Normal Form 形式为

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 2I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{0110} \bar{z}_1 z_2 \\ e_{2000} z_1^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{2100} z_1^2 \bar{z}_1 + c_{1011} z_1 z_2 \bar{z}_2 \\ e_{1110} z_1 \bar{z}_1 z_2 + e_{0021} z_2^2 \bar{z}_2 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

由于所得 Normal Form 中, 除含有立方非线性项外, 还含有平方非线性项, 因此用以往相位相减降维的办法遇到一些困难, 不能顺利将 4 维降成 3 维, 从而难以求出分岔方程. 现引入变换

$$\rho = |z_1|^2, \quad \frac{1}{\rho}(u + iv) = \frac{z_2}{z_1^2}, \quad (29)$$

由式(29)得

$$z_1 = \sqrt{\rho} e^{i\theta}, \quad z_2 = (u + iv) e^{2i\theta}, \quad (30)$$

$$\dot{z}_1 = \frac{\dot{\rho}}{2\sqrt{\rho}} e^{i\theta} + i\dot{\theta} \sqrt{\rho} e^{i\theta}, \quad \dot{z}_2 = (\dot{u} + i\dot{v}) e^{2i\theta} + 2i\dot{\theta}(u + iv) e^{2i\theta}. \quad (31)$$

将式(30)、(31)代入式(22)左右两端, 将实部与虚部分开, 并注意  $c_{0110}$ 、 $c_{2100}$ 、 $c_{1011}$ 、 $e_{2000}$ 、 $e_{1110}$ 、 $e_{0021}$  为 6 个复数, 且令其实部依次为  $a_i$ , 虚部依次为  $b_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , 经整理得

$$\dot{\rho} = 2a_1 \rho u - 2b_1 \rho v + 2a_2 \rho^2 + 2a_3(u^2 + v^2)\rho, \quad (32)$$

$$\dot{\theta} = 1 + b_1 u + a_1 v + b_2 \rho + b_3(u^2 + v^2), \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \dot{u} &= 2v(\dot{\theta} - 1) + a_4 \rho + a_5 \rho u - b_5 \rho v + \\ & a_6(u^2 + v^2)u - b_6(u^2 + v^2)v, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -2u(\dot{\theta} - 1) + b_4 \rho + a_5 \rho v + b_5 \rho u + \\ & a_6(u^2 + v^2)v + b_6(u^2 + v^2)u. \end{aligned} \quad (35)$$

将式(33)代入式(34)和式(35)得

$$\begin{aligned} \dot{u} &= 2b_1 u v + 2a_1 v^2 + 2b_2 \rho + 2b_3(u^2 + v^2)v + a_4 \rho + \\ & a_5 \rho u - b_5 \rho v + a_6(u^2 + v^2)u - b_6(u^2 + v^2)v, \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -2b_1 u^2 - 2a_1 u v - 2b_2 \rho - 2b_3(u^2 + v^2)u + b_4 \rho + \\ & a_5 \rho v + b_5 \rho u + a_6(u^2 + v^2)v + b_6(u^2 + v^2)u, \end{aligned} \quad (37)$$

则(32)、(36)和(37)为 3 个变量  $\rho$ ,  $u$ ,  $v$  微分方程组.

现求分岔方程, 令  $\dot{\rho} = \dot{u} = \dot{v} = 0$  则

$$2a_1 \rho u - 2b_1 \rho v + 2a_2 \rho^2 + 2a_3(u^2 + v^2)\rho = 0, \quad (38)$$

$$\begin{aligned} 2b_1 u v + 2a_1 v^2 + 2b_2 \rho + 2b_3(u^2 + v^2)v + a_4 \rho + a_5 \rho u - \\ b_5 \rho v + a_6(u^2 + v^2)u - b_6(u^2 + v^2)v = 0, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} -2b_1 u^2 - 2a_1 u v - 2b_2 \rho - 2b_3(u^2 + v^2)u + b_4 \rho + a_5 \rho v + \\ b_5 \rho u + a_6(u^2 + v^2)v + b_6(u^2 + v^2)u = 0. \end{aligned} \quad (40)$$

解此代数方程组, 消去  $u$ 、 $v$ , 得  $\rho$  的 4 次代数方程

$$A\rho^4 + B\rho^3 + C\rho^2 + D\rho + E = 0, \quad (41)$$

其中  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 、 $E$  为与原系统参数和分岔参数有关的常数.

### 3 单变量分岔方程的转迁集和分岔图

前面得到的单变量 4 次分岔方程是一元 4 次代数方程, 由于任何一元高次代数方程, 都可以通过引入适当的平移变换, 消去其中的次高次项, 所以对于我们研究的单变量 4 次分岔方程, 在一般情况下, 可以通过变换, 消去 3 次项, 使分岔方程变为

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0 \tag{42}$$

经适当变换, 式(42)化为

$$x^4 + 2\eta x^2 + \lambda^2 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x + \alpha_4 = 0, \tag{43}$$

式(43)可视为芽

$$g = x^4 + 2\eta x^2 + \lambda^2 \tag{44}$$

的一个4\_参数开折. 在2\_参数平面内共有6种组合形式, 在此我们只给出一种组合的结果.

$$x^4 + mx^2 + \lambda^2 + \alpha_1 x + \alpha_4 = 0,$$

$$\alpha_1 \neq 0, \alpha_4 \neq 0, \alpha_2 \equiv 0, \alpha_3 \equiv 0$$

由转迁集的定义, 可求得开折(46)的转迁集为:

1. 分岔集

$$B_1: \alpha_4 = 0,$$

$$B_2^\pm: \alpha_4 = \frac{1}{128} \frac{(m^4 - 80m^2 - 128 \pm \sqrt{m^2(m^2 + 32)^3}) \alpha_1^4}{(m - 2)^3 (m + 2)^3};$$

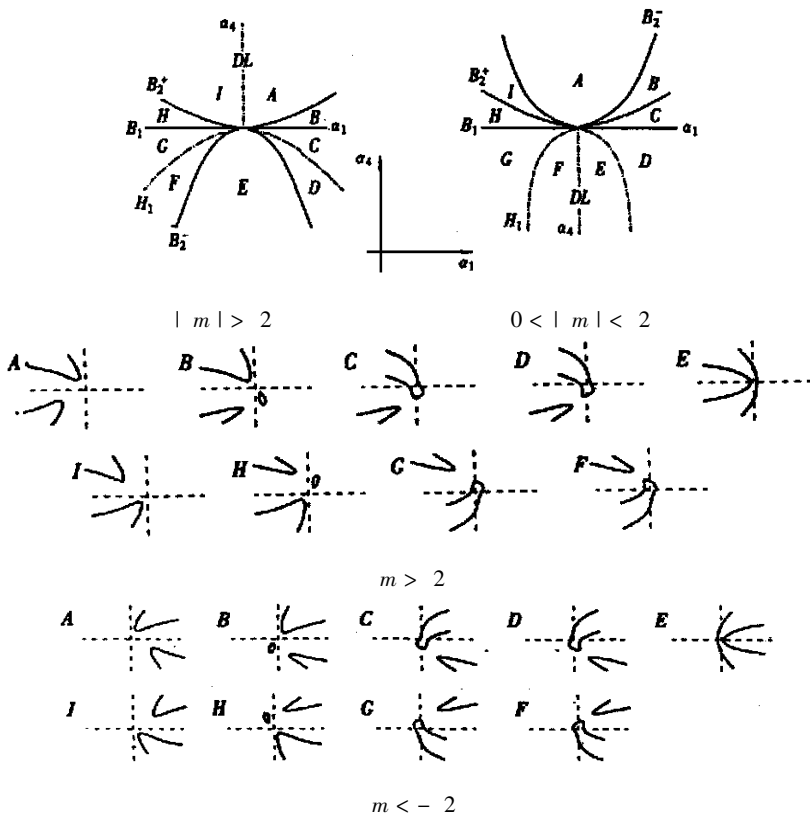
2. 滞后集

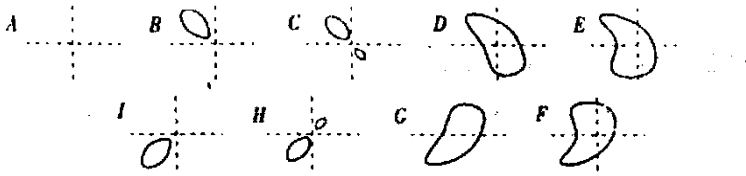
$$H: \alpha_4 = -\frac{243}{256} \frac{(m^2 + 12) \alpha_1^4}{m^6};$$

3. 双极限集

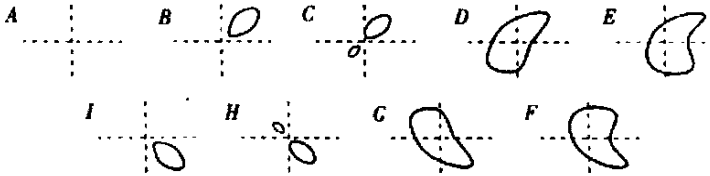
$$DL: \alpha_1 = 0 \text{ 和 } \alpha_4(m^2 - 4) \geq 0$$

得到的分岔图为:





$$0 < m < 2$$



$$-2 < m < 0$$

### [ 参 考 文 献 ]

- [1] Nayfeh A H, Mook D T. Nonlinear Oscillations [M]. New York: John Wiley & Sons, 1979.
- [2] Langford W F, Zhan K. Dynamics of 1/1 resonance in vortex-induced vibration [A]. In: M P Paidoussis Ed. ASME Fundamental Aspects of Fluid-Structure Interactions [C]. PVP\_Vol. 247, Book, No G00728\_1992.
- [3] Leblanc V G, Langford W F. Classification and unfoldings of 1:2 resonant Hopf bifurcation [J]. Arch Rational Mech Anal, 1996, (136): 305—357.
- [4] 吴志强. 多自由度非线性系统的非线性模态及 Normal Form 直接方法 [D]. 博士论文, 天津: 天津大学, 1996.
- [5] 陈芳启, 吴志强, 陈予恕. 一类粘弹性圆柱壳的高余维分岔 [J]. 力学学报, 2001, 33(3): 286—293.
- [6] 陈予恕, 杨彩霞. 一类刚柔耦合非线性系统的动力学建模 [J]. 中国空间科学技术, 2000(3): 7—12.
- [7] CHEN Yu\_shu, Leung A Y T. Bifurcation and Chaos in Engineering [M]. London: Springer-Verlag, 1998.
- [8] 陆启韶. 分岔与奇异性 [M]. 上海: 上海科技教育出版社, 1995.
- [9] 陈予恕. 非线性振动系统的分岔和混沌理论 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1993.
- [10] 陆启韶. 常微分方程定性理论与几何方法 [M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1988.
- [11] Arnold V I. Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations [M]. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1988.
- [12] Golubitsky M, Schaeffer D G. Singularities and Bifurcation Theory, Vol. 1 [M]. New York: Springer-Verlag, 1985.
- [13] Chow S N, Hale S. Methods of Bifurcation Theory [M]. New York: Springer-Verlag, 1992.

## 1: 2 Internal Resonance of Coupled Dynamic System With Quadratic and Cubic Nonlinearities

CHEN Yu\_shu, YANG Cai\_xia, WU Zhi\_qiang, CHEN Fang\_qi  
(Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 300072, P R China)

**Abstract:** The 1: 2 internal resonance of coupled dynamic system with quadratic and cubic nonlinearities is studied. The normal forms of this system in 1: 2 internal resonance were derived by using the direct method of normal form. In the normal forms, quadratic and cubic nonlinearities were remained. Based on a new convenient transformation technique, the 4\_dimension bifurcation equations were reduced to 3\_dimension. A bifurcation equation with one\_dimension was obtained. Then the bifurcation behaviors of a universal unfolding were studied by using the singularity theory. The method of this paper can be applied to analyze the bifurcation behavior in strong internal resonance on 4\_dimension center manifolds.

**Key words:** quadratic and cubic nonlinearities; Normal Form; 1: 2 internal resonance