应用数学和力学,第 22 卷 第 8 期(2001 年 8 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2001) 08_0825_09

两个非线性发展方程组精确解析解的研究*

闫振亚, 张鸿庆

(大连理工大学 应用数学系, 大连 116024)

(我刊编委张鸿庆来稿)

摘要: 对齐次平衡法进行了改进并将其应用于两个非线性发展方程组中• 通过一些新的假设, 获得了若干精确解析解• 这些解包含王和张的结论及其它新类型的解析解, 如有理分式解和周期解• 这种方法也可以应用于求解更多的非线性偏微分方程•

关 键 词: 非线性发展方程; 改进的齐次平衡法; 精确解析解; 孤波解; 有理解

中图分类号: O175.1 文献标识码: A

引 言

在研究水波的过程中, 人们获得了很多完全可积模型, 如 KdV 方程, mKdV 方程, (2+ 1)_维 KP 方程, 耦合 KdV 方程, 变更 Boussinesq 方程, WBK 方程等[1~ 13]• 为了寻找非线性发展方程的精确解, 最近王等人[4] 提出一种有效的工具(齐次平衡法) • 不幸的是用该方法只能得到孤波解•

本文的目的是改进齐次平衡法以致于能够得到非线性发展方程更多形式的精确解• 首先我们简单介绍我们的主要思想, 然后将它应用于一些非线性发展方程中• 对于给定的非线性发展方程, 设含有两个变量 x 和 t

$$F(u, u_t, u_x, u_{xx}, u_{xt}, \cdots) = 0, \tag{1}$$

其中 F 为所讨论函数的多项式, 下标表示偏导数• 王[4] 利用齐次平衡法的前三步获得如下关系

$$u(x, t) = f(\phi, \phi_t, \phi_x, \phi_{xt}, \phi_{xx}, \cdots) + u_0, \tag{2}$$

$$G_i(\phi, \phi_t, \phi_x, \phi_{xt}, \phi_{xx}, \cdots) = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n), \tag{3}$$

其中 $\phi = \phi(x, t)$, f 为已知函数, $G_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ 为关于 ϕ 的各种导数的齐次函数• 为了求解函数 ϕ, 王仅仅假设 $\phi(x, t) = 1 + e^{\alpha x + \beta t + \gamma}$• 因此只有孤波解被得到• 事实上, 根据方程 (3) 的齐次性质, 我们能做关于 ϕ 的更多形式的假设, 结果可发现方程(1) 的更多精确解• 这些解包含王的结论• 为了证实这种方法, 我们考虑如下两个非线性发展方程组•

* 收稿日期: 2000_04_07; 修订日期: 2001_03_13
基金项目: 国家重点基础研究规划项目(G1998030600) ; 教育部博士点基金资助项目(98014119)
作者简介: 闫振亚(1974—) , 男, 河南上蔡人, 博士.

1 长波近似方程

对于给定长波近似方程[4~10]

$$u_t + uu_x - H_x + \frac{1}{2}u_{xx} = 0, \tag{4a}$$

$$H_t - (Hu)_x - \frac{1}{2}H_{xx} = 0. \tag{4b}$$

它们是Whitham[5]和Broer[6]提出的. 人们研究了对称、守恒律和孤子解. 最近, 王用齐次平衡法来考虑系统(4)并推导出如下结论[4]

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\ln\phi + c,\ H(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\phi. \tag{5}$$

其中 c 为常数, ϕ 满足

$$\phi_x\phi_t - c\phi_x^2 - \frac{1}{2}\phi_x\phi_{xx} = 0, \tag{6}$$

$$\phi_{xt} - c\phi_{xx} - \frac{1}{2}\phi_{xxx} = 0, \tag{7}$$

$$\phi_x^2\phi_t - c\phi_x^3 - \frac{1}{2}\phi_x^2\phi_{xx} = 0, \tag{8}$$

$$2\phi_x\phi_{xt} + \phi_{xx}\phi_t - 3c\phi_x\phi_{xx} - \frac{1}{2}\phi_{xx}^2 - \phi_x\phi_{xxx} = 0, \tag{9}$$

$$\phi_{xxt} - c\phi_{xxx} - \phi_{xxxx} = 0. \tag{10}$$

事实上, 容易证明要使(6)~(10)成立, ϕ 须满足

$$\phi_t - c\phi_x - \frac{1}{2}\phi_{xx} = 0. \tag{11}$$

现在, 我们的目的是求得方程(11)更多的解, 有如下情况:

情况A 首先取方程(11)中的 ϕ 有如下形式

$$\phi_1(x,t) = k_0 + \sum_{i=1}^{n} k_i a^{(\alpha_i x + \beta_i t + \gamma_i)}, \tag{12}$$

其中 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, α_i、β_i 为待定常数. k_j、γ_i $(i = 1, 2, \cdots, n;\ j = 0, 1, 2, \cdots, n)$ 为任意常数且 $k_j \neq 0$.

将方程(12)代入(11), 得

$$\beta_i = c\alpha_i + \frac{1}{2}\alpha_i^2\ln a \qquad (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{13}$$

因此由(12)、(13)和(5), 得方程(4a)、(4b)的一组精确解

$$u(x,t) = \frac{\ln a\sum_{i=1}^{n}\alpha_i k_i a^{[\alpha_i x + (c\alpha_i + \frac{1}{2}\alpha_i^2\ln a)t + \gamma_i]}}{k_0 + \sum_{i=1}^{n} k_i a^{[\alpha_i x + (c\alpha_i + \frac{1}{2}\alpha_i^2\ln a)t + \gamma_i]}} + c,$$

$$H(x,t) = \frac{\ln^2 a\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2 k_i a^{[\alpha_i x + (c\alpha_i + \frac{1}{2}\alpha_i^2\ln a)t + \gamma_i]}}{k_0 + \sum_{i=1}^{n} k_i a^{[\alpha_i x + (c\alpha_i + \frac{1}{2}\alpha_i^2\ln a)t + \gamma_i]}} -$$

$$\left\{\frac{\ln a\sum_{i=1}^{n}\alpha_i k_i a^{\left[\alpha_i x+\left(c\alpha_i+\frac{1}{2}\alpha_i^2\ln a\right)t+\gamma_i\right]}}{k_0+\sum_{i=1}^{n}k_i a^{\left[\alpha_i x+\left(c\alpha_i+\frac{1}{2}\alpha_i^2\ln a\right)t+\gamma_i\right]}}\right\}^2.$$

当 $a=e$ 时, 得到方程(4a)、(4b) 的多孤子解

$$u(x,t)=\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i k_i e^{\left[\alpha_i x+\left(c\alpha_i+\frac{1}{2}\alpha_i^2\right)t+\gamma_i\right]}}{k_0+\sum_{i=1}^{n}k_i e^{\left[\alpha_i x+\left(c\alpha_i+\frac{1}{2}\alpha_i^2\right)t+\gamma_i\right]}}+c,$$

$$H(x,t)=\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2 k_i e^{\left[\alpha_i x+\left(c\alpha_i+\frac{1}{2}\alpha_i^2\right)t+\gamma_i\right]}}{k_0+\sum_{i=1}^{n}k_i e^{\left[\alpha_i x+\left(c\alpha_i+\frac{1}{2}\alpha_i^2\right)t+\gamma_i\right]}}-\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i k_i e^{\left[\alpha_i x+\left(c\alpha_i+\frac{1}{2}\alpha_i^2\right)t+\gamma_i\right]}}{k_0+\sum_{i=1}^{n}k_i e^{\left[\alpha_i x+\left(c\alpha_i+\frac{1}{2}\alpha_i^2\right)t+\gamma_i\right]}}\right\}^2.$$

在条件 $k_i=1\ (i=0,1,2,\cdots)$ 下, 此解为张[10] 所得. 当 $n=1$ 时, 方程(4) 的两组孤波解为

$$u_1(x,t)=\frac{1}{2}\alpha_1\tanh\frac{1}{2}\left[\alpha_1 x+\left(c\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_1^2\right)t+\gamma_1+\ln\frac{k_1}{k_0}\right]+\frac{1}{2}\alpha_1+c\qquad(k_1k_0>0),$$

$$H_1(x,t)=\frac{1}{4}\alpha_1^2\operatorname{sech}^2\frac{1}{2}\left[\alpha_1 x+\left(c\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_1^2\right)t+\gamma_1+\ln\frac{k_1}{k_0}\right]\qquad(k_0k_1>0).$$

此孤波解为王[4] 所得.

$$u_2(x,t)=\frac{1}{2}\alpha_1\coth\frac{1}{2}\left[\alpha_1 x+\left(c\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_i^2\right)t+\gamma_1+\ln\left(-\frac{k_1}{k_0}\right)\right]+\frac{1}{2}\alpha_1+c\quad(k_0k_1<0),$$

$$H_2(x,t)=\frac{1}{4}\alpha_1^2\operatorname{csch}^2\frac{1}{2}\left[\alpha_1 x+\left(c\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_1^2\right)t+\gamma_1+\ln\left(-\frac{k_1}{k_0}\right)\right]\qquad(k_0k_1<0).$$

此解为异性行波解, 王[4] 没有得到.

情况 B　假设(11) 式中 ϕ 有如下有理形式的解析解

$$\phi_2(x,t)=\sum_{i=0}^{m}\omega_i(t)(x+x_0)^i,\tag{14}$$

其中 x_0 为常数, $\omega_i\ (i=0,1,2,\cdots,m)$ 为 t 的待定函数.

借助于 MATHEMATICA, 将(14) 代入(11) 并且令 $(x+x_0)^j\ (j=0,1,2,\cdots)$ 的系数为0, 得到一个关于 $\omega_i\ (i=0,1,2,\cdots,m)$ 的微分方程组. $\omega_i\ (i=0,1,2,\cdots,m)$ 可以确定出. 为方便起见, 取 $m=3$, 得

$$\omega_0=c^3c_0t^3+(c^2c_1+3cc_0)t^2+(cc_2+c_1)t+c_3,$$

$$\omega_1=3c^2c_0t^2+(2cc_1+3c_0)t+c_2,\quad \omega_2=3cc_0t+c_1,\quad \omega_3=c_0,$$

其中 c_0、c_1、c_2、c_3 为任意常数. 因此可得到方程(4) 的新有理分式解

$$u(x,t)=\frac{3c_0(x+x_0)^2+(6cc_0t+2c_1)(x+x_0)+3c^2c_0t^2+(2cc_1+3c_0)t+c_2}{D(x,t)}+c,$$

$$H(x,t)=\frac{6c_0(x+x_0)+6cc_0t+2c_1}{D(x,t)}-(u-c)^2,$$

其中

$$D(x,t)=c_0(x+x_0)^3+(3cc_0t+c_1)(x+x_0)^2+[3c^2c_0t^2+(2cc_1+3c_0)t+c_2](x+x_0)+c^3c_0t^3+(c^2c_1+3cc_0)t^2+(cc_2+c_1)t+c_3.$$

情况 C　类似于情况 B, 若取另一有理形式的解析解, 即

$$\phi_3(x,t)=\sum_{i=0}^{m}\omega_i(x)t^i,\tag{15}$$

取 $m=2$, 则方程(4) 的另一有理解可写为:

$$u=\frac{\left(-\sqrt{2}cc_2t^2+2c_2xt+\sqrt{2}cc_4t+\dfrac{\sqrt{2}c_2}{c_1}t+R\right)e^{-2cx}+\dfrac{c_1}{c}x-\dfrac{\sqrt{2}c_1}{c}+\dfrac{\sqrt{2}c(2c_1+c_3)}{c_1}}{\left[c_2t^2-\left(\dfrac{\sqrt{2}c_2}{c}x+c_4\right)t+A\right]e^{-2cx}+c_1t^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}c_2}{c}x-c_3\right)t+B}+c,$$

$$H=\frac{[\sqrt{2}cc_2t^2+(4cc_2x-4c_2+\sqrt{2}cc_4)t+M]e^{-2cx}+\dfrac{c_1}{c}}{\left[c_2t^2-\left(\dfrac{\sqrt{2}c_2}{c}x+c_4\right)t+A\right]e^{-2cx}+c_1t^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}c_2}{c}x-c_3\right)t+B}-(u-c)^2,$$

其中

$$R=\frac{\sqrt{2}c_2+cc_4}{\sqrt{2}(1-\sqrt{2}c)}x^2+\frac{c_2}{c}x+\frac{c_2+cc_4}{\sqrt{2}c(\sqrt{2}c-1)}-\sqrt{2}c_0;$$

$$A=\frac{\sqrt{2}c_2+cc_4}{2c(\sqrt{2}c-1)}x^2+\frac{c_2+cc_4}{\sqrt{2}c(\sqrt{2}c-1)}+c_0;$$

$$B=\frac{c_1}{2c}x^2-\sqrt{2}c(2c_2+c_3)c_1x+c_5;$$

$$M=\frac{2\sqrt{2}cc_2+2cc_4}{\sqrt{2}-1}x^2+\frac{4\sqrt{2}cc_2-2c_2+2cc_4}{c(1-\sqrt{2}c)}x+\frac{c_2}{c}-2cc_0+\frac{c_2+cc_4}{c(1-\sqrt{2}c)},$$

$c_0, c_1, \cdots, c_5$ 为常数.

情况 D　我们也能获得(11) 如下形式解

$$\phi_4(x,t)=c_0+\sum_{i=1}^{m}\sin[\sqrt{2\lambda_i-c^2}x]\exp(-cx-\lambda_it+c_i),\tag{16a}$$

$$\phi_5(x,t)=c_0+\sum_{i=1}^{m}\cos[\sqrt{2\lambda_i-c^2}x]\exp(-cx-\lambda_it+c_i).\tag{16b}$$

将(16a) 和(16b) 代入 Bäcklund 变换(5), 获得方程(4a) 和(4b) 的另两组新的精确解

$$u(x,t)=\frac{\sum_{i=1}^{m}[\sqrt{2\lambda_i-c^2}\cos\sqrt{2\lambda_i-c^2}x-c\sin\sqrt{2\lambda_i-c^2}x]\exp(-cx-\lambda_it+c_i)}{c_0+\sum_{i=1}^{m}\sin\sqrt{2\lambda_i-c^2}x\exp(-cx-\lambda_it+c_i)}+c,$$

$$H(x,t)=$$

$$\frac{2\sum_{i=1}^{m}[-c\sqrt{2\lambda_i-c^2}\cos\sqrt{2\lambda_i-c^2}x+(c^2-\lambda_i)\sin\sqrt{2\lambda_i-c^2}x]e^{(-cx-\lambda_it+c_i)}}{c_0+\sum_{i=1}^{m}\sin\sqrt{2\lambda_i-c^2}x\exp(-cx-\lambda_it+c_i)}-$$

$$\left\{\frac{\sum_{i=1}^{m}\left[\sqrt{2\lambda_i-c^2}\cos\sqrt{2\lambda_i-c^2}x-c\sin\sqrt{2\lambda_i-c^2}x\right]\exp(-cx-\lambda_i t+c_i)}{c_0+\sum_{i=1}^{m}\sin\sqrt{2\lambda_i-c^2}x\exp(-cx-\lambda_i t+c_i)}\right\}^2;$$

$$u(x,t)=-\frac{\sum_{i=1}^{m}\left[\sqrt{2\lambda_i-c^2}\sin\sqrt{2\lambda_i-c^2}x+c\cos\sqrt{2\lambda_i-c^2}x\right]\exp(-cx-\lambda_i t+c_i)}{c_0+\sum_{i=1}^{m}\cos\sqrt{2\lambda_i-c^2}x\exp(-cx-\lambda_i t+c_i)}+c,$$

$$H(x,t)=$$

$$\frac{2\sum_{i=1}^{m}\left[c\sqrt{2\lambda_i-c^2}\sin\sqrt{2\lambda_i-c^2}x+(c^2-\lambda_i)\cos\sqrt{2\lambda_i-c^2}x\right]e^{(-cx-\lambda_i t+c_i)}}{c_0+\sum_{i=1}^{m}\cos\sqrt{2\lambda_i-c^2}x\exp(-cx-\lambda_i t+c_i)}-$$

$$\left\{\frac{\sum_{i=1}^{m}\left[\sqrt{2\lambda_i-c^2}\sin\sqrt{2\lambda_i-c^2}x+c\cos\sqrt{2\lambda_i-c^2}x\right]\exp(-\lambda_i t-cx+c_i)}{c_0+\sum_{i=1}^{m}\cos\sqrt{2\lambda_i-c^2}x\exp(-cx-\lambda_i t+c_i)}\right\}^2.$$

情况 E　此外,容易证明上述 5 种解 $\phi_i(i=1,2,\cdots,5)$ 的如下的组合形式仍为(11) 的解,即

$$\phi(x,t)=c_0+\sum_{i=1}^{5}c_i\phi_i(x,t),\tag{17}$$

其中 $c_j(j=0,1,2,\cdots,5)$ 为任意常数. 因此由Bäcklund 变换(5),我们又可得方程 (4a) 和(4b) 的另一解

$$u=\frac{\sum_{i=1}^{5}c_i\phi_{ix}}{c_0+\sum_{i=1}^{5}c_i\phi_i(x,t)}+c,\quad H=\frac{\sum_{i=1}^{5}c_i\phi_{ixx}}{c_0+\sum_{i=1}^{5}c_i\phi_i(x,t)}-\frac{\left(\sum_{i=1}^{5}c_i\phi_{ix}\right)^2}{\left(c_0+\sum_{i=1}^{5}c_i\phi_i(x,t)\right)^2},$$

其中 $\phi_i(i=1,2,\cdots,5)$ 满足(12) 、(14) 、(15) 、(16a) 和(16b) 式.

2　(2+1)_维色散长波方程

下面我们考虑(2+1)_维色散长波方程[4, 11]

$$u_{yt}+H_{xx}+\frac{1}{2}(u^2)_{xy}=0,\tag{18a}$$

$$H_t+u_x+(uH)_x+u_{xxy}=0.\tag{18b}$$

利用齐次平衡法[4],容易获得如下结论

$$u(x,y,t)=2\frac{\partial}{\partial x}\ln\phi+A,\quad H(x,y,t)=2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\ln\phi-1,\tag{19}$$

其中 $\phi=\phi(x,y,t)$ 满足

$$\phi_{xyt}+A\phi_{xxy}+\phi_{xxxy}=0,\tag{20}$$

$$\phi_x\phi_y\phi_t+A\phi_y\phi_x^2+\phi_y\phi_x\phi_{xx}=0,\tag{21}$$

$$\phi_x\phi_{yt}+\phi_{xy}\phi_t+\phi_y\phi_{xt}+A\phi_y\phi_{xx}+2A\phi_{xy}\phi_x+\phi_{xx}\phi_{xy}+\phi_x\phi_{xxy}+\phi_y\phi_{xxx}=0,\tag{22}$$

其中 A 为任意常数•

类似于对(11)所做的假设,从(20)~(22)中,有如下结论

情况 1 容易证明(20)~(22)式有如下解

$$\phi_1(x,y,t)=c_0(y)+\sum_{i=1}^{m}c_i(y)D_i^{\alpha_i(y)x-[A\alpha_i(y)+\alpha_i^2(y)\ln D_i(y)]t+\beta_i(y)},\tag{23}$$

其中 $c_0(y)$、$D_i=D_i(y)$、$c_i(y)$、$\alpha_i(y)$、$\beta_i(y)$ $(i=1,2,\cdots,m)$ 为 y 的任意函数,$D_i(y)>0$ 且 $D_i(y)\neq 1$• 将(23)代入(19),得方程(18)的一系列精确解

$$u=\frac{2\sum_{i=1}^{m}c_i(y)\alpha_i(y)D_i^{\alpha_i(y)x-[A\alpha_i(y)+\alpha_i^2(y)\ln D_i(y)]t+\beta_i(y)}}{c_0(y)+\sum_{i=1}^{m}c_i(y)D_i^{\alpha_i(y)x-[A\alpha_i(y)+\alpha_i^2(y)\ln D_i(y)]t+\beta_i(y)}}+A,\tag{24}$$

$$H=\frac{2\sum_{i=1}^{m}[(c_i\alpha_i)_y+c_i\alpha_iQ_i]}{c_0(y)+\sum_{i=1}^{m}c_i(y)D_i^{\xi}}-\frac{2\left[c_{0y}+\sum_{i=1}^{m}(c_{iy}D_i^{\xi}+c_iQ_i)\right]\sum_{i=1}^{m}c_i\alpha_iD_i^{\xi}}{\left[c_0(y)+\sum_{i=1}^{m}c_i(y)D_i^{\xi}\right]^2}-1,\tag{25}$$

其中

$$Q_i=D_i^{\xi}\left\{\xi\frac{D_{iy}}{D_i}+D_i\left[\alpha_{iy}x-\left(A\alpha_{iy}+2\alpha_i\alpha_{iy}\ln D_i+\alpha_i^2\frac{D_{iy}}{D_i}\right)t+\beta_{iy}\right]\right\},$$

$$\xi=\alpha_i(y)x-[A\alpha_i(y)+\alpha_i^2(y)\ln D_i(y)]t+\beta_i(y)•$$

事实上,若取 $c_0(y)=c_i(y)=1$, $D_i(y)=e$ $(i=1,2,\cdots,m)$,则解(24)、(25)变为方程(18)的多类孤子解[11]•

当 $m=1$, $D_i(y)=e$ 时,由(24)、(25),得两组孤波解

$$u_1=\alpha_1(y)\tanh\left\{\frac{1}{2}\left[\alpha_1(y)x-(A\alpha_1(y)+\alpha_1^2(y))t+\beta_1(y)+\ln\frac{c_1(y)}{c_0(y)}\right]\right\}+\alpha_1(y)+A\qquad c_1c_0>0•$$

$$H_1=\frac{1}{2}\left[\alpha_{1y}x-(A\alpha_{1y}+2\alpha_1\alpha_{1y})t+\beta_{1y}+\frac{c_{1y}}{c_1}-\frac{c_{0y}}{c_0}\right]\mathrm{sech}^2\left\{\frac{1}{2}\left[\alpha_1(y)x-[A\alpha_1(y)+\alpha_1^2(y)]t+\beta_1(y)+\ln\frac{c_1(y)}{c_0(y)}\right]\right\}+\alpha_{1y}\tanh\left\{\frac{1}{2}\left[\alpha_1(y)x-(A\alpha_1(y)+\alpha_1^2(y))t+\beta_1(y)+\ln\frac{c_1(y)}{c_0(y)}\right]\right\}+\alpha_{1y}-1\qquad c_1c_0>0;$$

$$u_2=\alpha_1(y)\coth\left\{\frac{1}{2}\left[\alpha_1(y)x-(A\alpha_1(y)+\alpha_1^2(y))t+\beta_1(y)+\ln\left(-\frac{c_1(y)}{c_0(y)}\right)\right]\right\}+\alpha_1(y)+A\qquad c_1c_0<0,$$

$$H_2=-\frac{1}{2}\left[\alpha_{1y}x-(A\alpha_{1y}+2\alpha_1\alpha_{1y})t+\beta_{1y}+\frac{c_{1y}}{c_1}-\frac{c_{0y}}{c_0}\right]\mathrm{csch}^2\left\{\frac{1}{2}\left[\alpha_1(y)x-[A\alpha_1(y)+\alpha_1^2(y)]t+\beta_1(y)+\ln\left(-\frac{c_1(y)}{c_0(y)}\right)\right]\right\}+\alpha_{1y}\coth\left\{\frac{1}{2}\left[\alpha_1(y)x-[A\alpha_1(y)+\alpha_1^2(y)]t+\beta_1(y)+\ln\left(-\frac{c_1(y)}{c_0(y)}\right)\right]\right\}+\alpha_{1y}-1\qquad c_1c_0<0•$$

ZHANG 的结果中(34)和(35)[11]为 u_1 和 H_1 的特例,但 ZHANG 没有得到解 u_2 和 H_2,它们是异性行波解•

情况 2 若取(20) ~ (22) 中的 ϕ 具有形式

$$\phi_2(x, y, t) = \sum_{i=0}^{m} k_i(\alpha x + \beta y)(t - t_0)^i, \qquad A = 0, \tag{26}$$

其中 $k_i(\alpha x + \beta y)$ $(i = 0, 1, 2, \cdots, m)$ 为 $\alpha x + \beta y$ 的待定函数• 将(26) 代入(20) ~ (22) 式, 得到关于$(t - t_0)^i$ $(i = 0, 1, 2, \cdots, m)$ 的多项式方程组, 并且根据 $1, t - t_0, (t - t_0)^2, \cdots, (t - t_0)^m$ 的线性无关性, 可得关于 $k_i(\alpha x + \beta y)$ $(i = 0, 1, 2, \cdots, m)$ 的一个常微分方程组, 解这个常微分方程组, 得

$$k_i(\alpha x + \beta y) = (-\alpha^2)^{i-m}(m - i)!\begin{pmatrix} m \\ i \end{pmatrix}\sum_{j=1}^{2(m+1-i)} a_j \frac{(\alpha x + \beta y)^{2(m+1-i)-j}}{(2(m + 1 - i) - j)!}$$
$$(i = 0, 1, 2, \cdots, m), \tag{27}$$

其中 $a_j(j = 1, 2, \cdots)$ 为任意常数, 结合(19)、(26)、(27), 得方程(18) 的有理分式解

$$u(x, y, t) = \frac{2\sum_{i=0}^{m}\left[(-\alpha^2)^{i-m}(m - i)!\begin{pmatrix} m \\ i \end{pmatrix}\sum_{j=1}^{2(m-i)+1}\alpha a_j \frac{(\alpha x + \beta y)^{2(m-i)+1-j}}{(2(m - i) + 1 - j)!}\right](t - t_0)^i}{M(x, y, t)}, \tag{28}$$

$$H(x, y, t) = \frac{2\sum_{i=0}^{m}\left[(-\alpha^2)^{i-m}(m - i)!\begin{pmatrix} m \\ i \end{pmatrix}\sum_{j=1}^{2(m-i)}\alpha\beta a_j \frac{(\alpha x + \beta y)^{2(m-i)-j}}{(2(m - i) - j)!}\right](t - t_0)^i}{M(x, y, t)} - \frac{1}{2}u^2(x, y, t) - 1, \tag{29}$$

其中

$$M(x, y, t) = \sum_{i=0}^{m}\left[(-\alpha^2)^{i-m}(m - i)!\begin{pmatrix} m \\ i \end{pmatrix}\sum_{j=1}^{2(m-i+1)} a_j \frac{(\alpha x + \beta y)^{2(m-i+1)-j}}{(2(m - i + 1) - j)!}\right](t - t_0)^i•$$

当 $m = 1, 2, \cdots$时, 可得到方程(18) 的很多有理分式解•

情况 3 我们也能推出方程(20) ~ (22) 的如下形式的解

$$\phi_3(x, y, t) = c_0(y) + \sum_{i=1}^{m}\sin[\sqrt{\lambda}\alpha_i(y)x]\exp[\lambda\alpha_i^2(y)t + \gamma_i(y)] \qquad (A = 0), \tag{30}$$

$$\phi_4(x, y, t) = c_0(y) + \sum_{i=1}^{m}\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\lambda - A^2}x\right)\exp\left[-\frac{A}{2}x + \gamma_i(y) + \lambda t\right] \qquad (A \neq 0), \tag{31}$$

$$\phi_5(x, y, t) = c_0(y) + \sum_{i=1}^{m}\cos[\sqrt{\lambda}\alpha_i(y)x]\exp[\lambda\alpha_i^2(y)t + \gamma_i(y)] \qquad (A = 0), \tag{32}$$

$$\phi_6(x, y, t) = c_0(y) + \sum_{i=1}^{m}\cos\left[\frac{1}{2}\sqrt{4\lambda - A^2}x\right]\exp\left[-\frac{A}{2}x + \gamma_i(y) + \lambda t\right] \qquad (A \neq 0), \tag{33}$$

其中 $c_0(y)$、$\alpha_i(y)$、$\gamma_i(y)$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ 为 y 的任意函数; λ为常数• 因此将(30)、(31) 分别代入 B¾cklund 变换(19), 得到方程(18) 的两组新的周期解

$$u_3(x, y, t) = \frac{2\sum_{i=1}^{m}\sqrt{\lambda}\alpha_i(y)\cos[\sqrt{\lambda}\alpha_i(y)x]\exp[\lambda\alpha_i^2(y)t + \gamma_i(y)]}{c_0(y) + \sum_{i=1}^{m}\sin[\sqrt{\lambda}\alpha_i(y)x]\exp[\lambda\alpha_i^2(y)t + \gamma_i(y)]} \qquad (A = 0),$$

$$H_3 = 2\left\{\sum_{i=1}^{m}\sqrt{\lambda}[\alpha_{iy}\cos\sqrt{\lambda}\alpha_i(y)x - \sqrt{\lambda}\alpha_i(y)\alpha_{iy}x\sin\sqrt{\lambda}\alpha_i(y)x + \alpha_i(y)(2\lambda\alpha_i\alpha_{iy}t + \gamma_{iy})\cos\sqrt{\lambda}\alpha_i(y)x]\exp[\lambda\alpha_i^2(y)t + \gamma_i(y)]\right\}\left[c_0(y) + \sum_{i=1}^{m}\sin\sqrt{\lambda}\alpha_i(y)x \times \exp(\lambda\alpha_i^2(y)t + \gamma_i(y))\right]^{-1} - 2u_3(x,y,t)\times\left\{c_{0y} + \sum_{i=1}^{m}[\sqrt{\lambda}\alpha_{iy}\cos\sqrt{\lambda}\alpha_i(y)x + [2\lambda\alpha_i\alpha_{iy}t + \gamma_{iy}]\sin\sqrt{\lambda}\alpha_i(y)x]\exp[\lambda\alpha_i^2(y)t + \gamma_i(y)]\right\}\times \left\{c_0(y) + \sum_{i=1}^{m}\sin\sqrt{\lambda}\alpha_i(y)x\exp(\lambda\alpha_i^2(y)t + \gamma_i(y))\right\}^{-1} - 1;$$

$$u_4 = \left\{2\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{1}{2}\sqrt{4\lambda - A^2}\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\lambda - A^2}x\right) - \frac{A}{2}\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\lambda - A^2}x\right)\right]\times \exp\left(-\frac{A}{2}x + \lambda t + \gamma_i(y)\right)\right\}\times\left\{c_0(y) + \sum_{i=1}^{m}\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\lambda - A^2}x\right)\times \exp\left(-\frac{A}{2}x + \lambda t + \gamma_i(y)\right)\right\}^{-1} + A,$$

$$H_4 = \left\{2\sum_{i=1}^{m}\gamma_{iy}\left[\frac{1}{2}\sqrt{4\lambda - A^2}\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\lambda - A^2}x\right) - \frac{A}{2}\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\lambda - A^2}x\right)\right]\exp\left(-\frac{A}{2}x + \lambda t + \gamma_i(y)\right)\right\}\times \left\{c_0(y) + \sum_{i=1}^{m}\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\lambda - A^2}x\right)\exp\left(-\frac{A}{2}x + \lambda t + \gamma_i(y)\right)\right\}^{-1} - 2u_4(x,y,t)\frac{c_{0y} + \sum_{i=1}^{m}\gamma_{iy}\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\lambda - A^2}x\right)\exp\left(-\frac{A}{2}x + \lambda t + \gamma_i(y)\right)}{c_0(y) + \sum_{i=1}^{m}\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\lambda - A^2}x\right)\exp\left(-\frac{A}{2}x + \lambda t + \gamma_i(y)\right)} - 1 \quad (A \neq 0).$$

对于方程(20) ~ (22) 的解(32)、(33), 利用 Bäcklund 变换(19), 我们也能获得另两组新的精确解 (u_5, H_5) 和 (u_6, H_6), 它们与解 (u_3, H_3) 和 (u_4, H_4) 类似, 这儿略去.

此外, 易证方程(20) ~ (22) 的 6 组解 $\phi_i(i = 1, 2, \cdots, 6)$ 的下面的组合形式仍是方程(20) ~ (22) 的解, 即

$$\phi(x, y, t) = c_0(y) + \sum_{i=1}^{6}c_i(y)\phi_i(x, y, t) \qquad A = 0, \tag{34}$$

其中 $c_j(y)$ $(j = 0, 1, 2, \cdots, 6)$ 为 y 的任意函数. 则利用 Bäcklund 变换(19), 我们又能得到方程(18) 的另一解.

作为方程(18a) 和(18b) 的特例, 我们也可以考虑(1+1)_维第一变更 Boussinesq 方程[12]

$$u_t + H_x + uu_x = 0, \tag{35a}$$

$$H_t + (uH)_x + u_{xxx} = 0. \tag{35b}$$

根据上述所得到的方程(18a) 和(18b) 的解, 我们也能获得方程(35a) 和(35b) 的若干精确解.

3 结 论

总之, 基于改进的齐次平衡法, 获得了两个非线性发展方程组的若干类型的精确解, 其中

包含已知的孤波解和新的有理分式解• 这些解对于解释一些物理现象或许是有用的• 这种途径也可以应用于其它的非线性微分方程组和非线性方程中, 如(2+ 1)_维 Burgers 方程, Whitham_Broer_Kaup 方程[13]等•

[参 考 文 献]

[1] Ablowitz M J, Clarkson P A. Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.
[2] Gu C H, Li Y S. Tian C, et al. Solitons Theory and Its Applications[M]. Berlin: Springer_Verlag, 1995.
[3] 郭柏林, 庞小峰. 孤立子[M]. 北京: 科学出版社, 1987.
[4] Wang M L, Zhou Y B, Li Z B. Application of a homogeneous balance method to exact solutions of nonlinear equations in mathematical physics[J]. Phys Lett A, 1996, **216**(1): 67—75.
[5] Whitham G M. Variational methods and applications to water wave[J]. Proc Roy Soc London Ser A, 1967, **299**(1): 6—25.
[6] Broer L J. Approximate equations for long water waves[J]. Appl Sci Res, 1975, **31**(5): 377—395.
[7] Kupershmidt B A. Mathematics of dispersive water waves[J]. Comm Math Phys, 1985, **99**(1): 51—73.
[8] Ruan H Y, Lou S Y. Similarity analysis and Painleve property of the Kupershmidt equation[J]. Comm Theoret Phys, 1993, **20**(1): 73—80.
[9] 闫振亚, 张鸿庆. 浅水长波近似方程组的显式精确解[J]. 物理学报, 1999, **48**(11): 1962—1967.
[10] 张解放. 长水波近似方程的多孤子解[J]. 物理学报, 1998, **47**(9): 1416—1421.
[11] ZHANG Jie_fang. Multiple solitons_like solutions for (2+ 1)_dimensional dispersive long_wave equations[J]. Intern J Theoret Phys, 1998, **37**(9): 2449—2455.
[12] Sach R L. On the integrable variant of the Boussinesq system, Painleve property, rational solutions, a related many body system, and equivalence with the AKNS hierarchy[J]. Physica D, 1988, **30**(1): 1—27.
[13] 范恩贵, 张鸿庆. Whitham_Broer_Kaup 浅水波方程的 B¾cklund 变换和精确解[J]. 应用数学和力学, 1998, **19**(8): 667—670.

Study on Exact Analystical Solutions for Two Systems of Nonlinear Evolution Equations

YAN Zhen_ya, ZHANG Hong_qing
(Department of Applied Mathematics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, P R China)

Abstract: The homogeneous balance method was improved and applied to two systems of nonlinear evolution equations. As a result, several families of exact analytic solutions are derived by some new ansatzs. These solutions contain Wang' s and Zhang' s results and other new types of analytical solutions, such as rational fraction solutions and periodic solutions. The way can also be applied to solve more nonlinear partial differential equations.

Key words: nonlinear evolution equations; improved homogeneous balance method; exact analytical solution; solitary wave solution; rational solution