

文章编号: 1000_0887(2001) 08_0839_06

横向流激励下绳索的扩张和回转运动^{*}

金栋平, 胡海岩

(南京航空航天大学 振动工程研究所, 南京 210016)

(黄永念推荐)

摘要: 基于横向流激励下绳索的微段受力分析, 建立了横向流体对绳索作用力的解析表达。借助坐标变换, 将绳索的运动表示为扩张和回转两部分。在此基础上, 分析了小垂跨比绳索的流激振动问题, 对无伸张态临界流速、平衡解稳定性、重力对绳索运动的影响等问题进行了讨论。

关键词: 绳索; 流激振动; 稳定性

中图分类号: O353.1; TV36 文献标识码: A

引 言

绳索在工程中具有广泛应用, 并产生了许多复杂的动力学问题。例如: (1) 船舶起重机作业时, 缆索出现非周期性摆动, 影响装卸准确性与工作效率; (2) 环锭纱线在捻作过程中, 形成气圈, 造成断头过多, 影响进纱速度; (3) 大跨度悬索吊桥拉索的风致振动, 对桥的安全构成威胁; (4) 在不太大的风速下, 冰裹输电导线会产生弛振现象, 造成导线端部疲劳断裂; (5) 借助系绳将卫星展开、状态维持与回收时, 绳系卫星会发生不稳定运动。因此, 对绳索的动力学进行分析和控制显得非常必要。

绳索的精确建模导致无限维非线性系统。引入小垂跨比假设(垂度与跨度之比小于 1:8)可使绳索的动力学模型大为简化。Perkins 和 Mote 应用有限应变理论, 得到了任意垂度、支撑索眼非水平情形下行进绳索的动力学模型^[1]。文[2]总结了绳索的四种分析方法, 并对一端受水平激励的近海绳缆进行了数值与实验研究。此外, 有大量研究涉及没入深水中的系泊系统动力学分析^[3], 悬索的非线性面内振动^[4]以及绳系卫星的动力学与控制问题。

在铺设海底光缆、电缆等跨海作业工程中, 绳索将受到横向流体作用, 其受力及运动情况分析相当重要。本文通过分析横向流体对绳索的作用力, 研究了绳索的流激振动, 讨论了平衡位置的稳定性、重力对绳索运动的影响等问题。

1 绳索受力分析

现研究图 1 所示完全浸没于流体中的悬索。在惯性坐标系 xyz 内, 绳索受到沿 y 方向、流

* 收稿日期: 1999_05_17; 修订日期: 1999_11_01

基金项目: 江苏省“333 人才工程”基金资助项目; 航空高校自选课题资助项目

作者简介: 金栋平(1964—), 男, 安徽人, 副教授, 博士,

胡海岩(1956—), 男, 上海人, 教授, 博士生导师, 校长。

速为 V_f 的横向稳定流体作用。绳索受外力分别为 f_x, f_y 和 f_z 。图中以 $P^i(x, v_0, w_0)$ 和 $P^f(x + u, v, w)$ 描述绳索任意质点的运动, s 表示绳索的弧长, 虚线为绳索静平衡位置, 此时绳长为 L 。

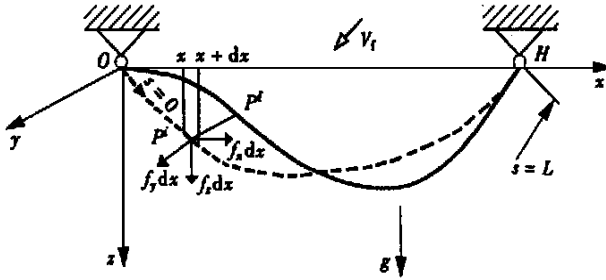


图1 弹性绳索简图

任取长度为 ds 的微段绳索 AB , 其受力状态如图 2 所示。若不计绳沿 x 方向运动, 流体相对于绳索的流速 V_f 与 Oxy 面夹角为 β_1 , 并满足矢量关系 $V_f = \dot{w} + (V_f - \dot{v})$ 。绳索沿流向及其垂向受力分别为单位长度流体阻力 F_D 和升力 F_L 。设迎流面绳索有效受力长度为 \overline{BC} , 位于绳索与 V_f 流向张成的面内, 并与 V_f 正交, 偏角为 β_3 。升力 F_L 有效受力长度为 \overline{BD} , 由 AB 向流面投影得到, 偏角为 β_2 。考虑小垂跨比, 则偏角分别为 $\beta_2 \approx w' \ll 1$ 和 $\beta_3 \approx v' \ll 1$, 这里定义“ \cdot ” = $\partial/\partial t$ 和“ $'$ ” = $\partial/\partial x$ 。

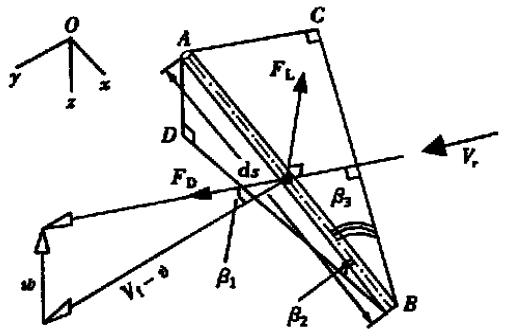


图2 绳索的微段受力分析

考虑定常流, 并设流速远高于索体运动速度, 则流体对于绳索的相对速度为

$$V_r = \sqrt{\dot{w}^2 + (V_f - \dot{v})^2} \approx V_f \tag{1}$$

根据水动力学的 Morison 公式, 流体施于微段绳索的作用力为

$$\begin{cases} F_D ds = \frac{1}{2} \rho_f C_D D_C V_r^2 \overline{BC} \approx \frac{1}{2} \rho_f V_f^2 D_C C_D ds, \\ F_L ds = \frac{1}{2} \rho_f C_L D_C V_r^2 \overline{BD} \approx \frac{1}{2} \rho_f V_f^2 D_C C_L ds, \end{cases} \tag{2}$$

式中 ρ_f 为流体密度, D_C 为绳索截面直径, $C_{D(L)}$ 表示绳索阻力系数(或升力系数)。考虑到 $\sin \beta_1 = \dot{w}/V_r$ 和 $\cos \beta_1 = (V_f - \dot{v})/V_r$, 沿坐标方向单位长度索受力可表示为

$$\begin{cases} F_y = -\frac{1}{2} \rho_f D_C V_r^2 (C_L \sin \beta_1 - C_D \cos \beta_1) = \\ \quad -\frac{1}{2} \rho_f D_C V_f [C_L \dot{w} - C_D (V_f - \dot{v})], \\ F_z = -\frac{1}{2} \rho_f D_C V_r^2 (C_L \cos \beta_1 + C_D \sin \beta_1) = \\ \quad -\frac{1}{2} \rho_f D_C V_f [C_D \dot{w} + C_L (V_f - \dot{v})]. \end{cases} \tag{3}$$

定义绳索的纵向应变^[4]

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2H} \int_0^H [(v')^2 + (w')^2 - (w_0')^2] dx, \tag{4}$$

其中 $w_0 = D \sin(\pi x/H)$ 表示绳索静悬挂状态构形, D 为索无重力时的垂度, H 为索的跨度. 计入附加流体质量和重力并运用 Hamilton 原理, 得到绳索运动方程

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\bar{\varepsilon} E}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = - \frac{\rho_f V_f D_c}{2\rho A} \left[C_L \frac{\partial w}{\partial t} - C_D \left(V_f - \frac{\partial v}{\partial t} \right) \right], \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\bar{\varepsilon} E}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = - \frac{\rho_f V_f D_c}{2\rho A} \left[C_D \frac{\partial w}{\partial t} + C_L \left(V_f - \frac{\partial v}{\partial t} \right) \right] + \bar{g}, \end{cases} \tag{5}$$

式中 $\rho = \rho_c + C_1 \rho_f$, $\bar{g} = g \rho_c / \rho$. C_1 为附加流体质量系数, ρ_c 和 A 分别为绳索质量密度和横截面面积, E 为弹性模量.

2 绳索扩张振动和回转运动

引入如下参数

$$\begin{cases} \eta = \frac{x}{H}, \quad V = \frac{v}{D}, \quad W = \frac{w}{D}, \quad \tau = \frac{D \sqrt{E/\rho}}{H^2} t, \quad \mu^2 = \frac{Q \bar{H}^4}{ED^3}, \quad c_f = \frac{C_L}{C_D}, \\ \varepsilon = \left(\frac{H}{D} \right)^2 \bar{\varepsilon}, \quad v_f = \left(\frac{H}{D} \right)^2 \sqrt{\frac{\rho_f}{E}} V_f, \quad D_f = \frac{\rho_f C_D D_c D}{2\rho A} v_f = k v_f. \end{cases} \tag{6}$$

将方程(5)简化为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2} - \varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} = - D_f \left(c_f \frac{\partial W}{\partial \tau} + \frac{\partial V}{\partial \tau} - v_f \right), \\ \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} - \varepsilon \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} = - D_f \left(\frac{\partial W}{\partial \tau} - c_f \left(\frac{\partial V}{\partial \tau} - v_f \right) \right) + \mu^2, \end{cases} \tag{7}$$

式中 $W_0 = \sin \pi \eta$, $\varepsilon = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial V}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial \eta} \right)^2 - \left(\frac{\partial W_0}{\partial \eta} \right)^2 \right] d\eta$

基于绳索的面内外振型的一阶展开

$$V(\eta, \tau) = \sin(\pi \eta) q_1(\tau), \quad W(\eta, \tau) = \sin(\pi \eta) q_2(\tau). \tag{8}$$

将方程(7)表为

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + \varepsilon(q_1, q_2) q_1 = - D_f \left(c_f \dot{q}_2 + \dot{q}_1 - \frac{4}{\pi} v_f \right), \\ \ddot{q}_2 + \varepsilon(q_1, q_2) q_2 = - D_f \left(\dot{q}_2 - c_f \dot{q}_1 + \frac{4c_f}{\pi} v_f \right) + \frac{4\mu^2}{\pi}, \end{cases} \tag{9}$$

式中

$$\varepsilon(q_1, q_2) = \frac{\pi^4}{4} (q_1^2 + q_2^2 - 1). \tag{10}$$

基于对式(8)~(10)的分析, 绳索各质点运动轨迹是图3所示以 x 为轴心的圆弧. 因此, 取坐标变换

$$q_1 = q_{10} + n_1(\varphi) \xi(\tau), \quad q_2 = q_{20} + n_2(\varphi) \xi(\tau), \tag{11}$$

并根据 $\theta(q_{10}, q_{20}) = 0$ 来定义 $q_{10} = \sin(\varphi)$ 和 $q_{20} = \cos(\varphi)$. 其中 $n_1(\varphi)$ 和 $n_2(\varphi)$ 分别为法矢量 n 沿坐标 q_1 和 q_2 的方向余弦, 并通过归一化条件定义为

$$n_1(\varphi) = \sin(\varphi), \quad n_2(\varphi) = \cos(\varphi), \tag{12}$$

将方程(9)代换以坐标 ξ 和 φ 表示, 并略去 ξ 二阶高次小量得到

$$\begin{cases} \xi + D_f \xi + \frac{\pi^4}{2} \xi - (c_f D_f - \dot{\varphi})(1 + \xi) \dot{\varphi} - \frac{dF(\varphi)}{d\varphi} = 0, \\ (1 + \xi) \dot{\varphi} + D_f(1 + \xi) \dot{\varphi} + (c_f D_f + 2\dot{\varphi}) \xi + F(\varphi) = 0, \end{cases} \quad (13)$$

式中

$$F(\varphi) = \frac{4\mu^2}{\pi} \sin \varphi - \frac{4D_f v_f}{\pi} (\cos \varphi + c_f \sin \varphi). \quad (14)$$

方程(13)描述了绳索的径向扩张振动和回转运动。

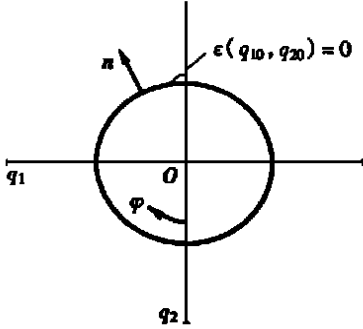


图3 坐标变换简图

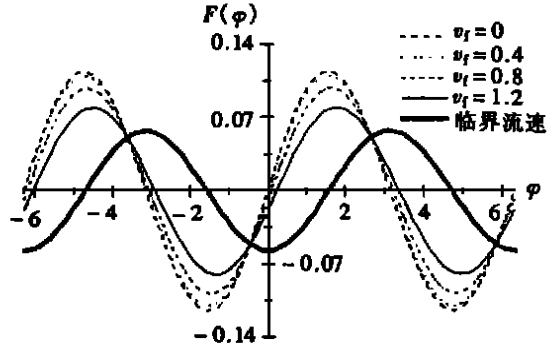


图4 不同流速对应的函数 $F(\varphi)$

3 临界流速和平衡解稳定性

3.1 临界流速

本文称使绳索恰好达到上悬垂位置,而回转角速度为零的流体速度为临界流速,它满足 $\varphi = \pi$ 和 $\dot{\varphi} = 0$, $\xi = \dot{\xi} = \ddot{\xi} = 0$ 。此时,绳索处于无扩张状态,升力与重力保持平衡,该状态是不稳定的。由式(13)可以确定临界流速

$$v_f^* = \frac{\mu}{\sqrt{k c_f}}. \quad (15)$$

对于给定的一组参数值: $\mu = 0.3$, $k = 0.01$ 和 $c_f = 2$, 相应的临界流速为 2.121。在临界流速下, $F(\varphi)$ 简化为

$$F(\varphi) = -\frac{4\mu^2}{\pi c_f} \cos \varphi, \quad (16)$$

流速对函数 $F(\varphi)$ 的影响如图4所示。

3.2 平衡解的稳定性

绳索在横向流作用下的平衡位置 (ξ_0, φ_0) 由下式确定

$$F(\varphi_0) = 0, \quad \frac{\pi^4}{2} \xi_0 - \frac{dF(\varphi_0)}{d\varphi_0} = 0. \quad (17)$$

在平衡位置 (ξ_0, φ_0) , 系统(13)的Jacobi矩阵的特征值满足方程

$$\lambda^4 + a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0, \quad (18)$$

其中

$$\begin{cases} a_0 = \frac{\pi^8}{4} \frac{\xi_0}{1 + \xi_0}, & a_1 = \frac{\pi^4}{2} D_f \left[1 + \frac{\xi_0}{1 + \xi_0} \right], \\ a_2 = D_f^2 (1 + c_f^2) + \frac{\pi^4}{2} \left[1 + \frac{\xi_0}{1 + \xi_0} \right], & a_3 = 2D_f \end{cases} \quad (19)$$

根据 Routh-Hurwitz 准则, 所有特征值在左半复平面的条件为

$$a_3 > 0, a_2 > 0, a_1 > 0, a_0 > 0, J = a_1^2 - a_1 a_2 a_3 + a_0 a_3^2 < 0 \quad (20)$$

对条件(20)进行验证知, 绳索的平衡位置渐近稳定, 无分叉发生。

4 重力对回转运动的影响

随着重力的减小, 流体升力会引起绳索的回转运动, 直接影响绳索系统的工作状况。设绳索的流体升力大于流体阻力, 研究垂跨比为 1:10 的绳索结构。给定一组参数 $k = 0.01, c_f = 2$ 和 $v_f = 0.1$, 从方程(13)数值求解了不同重力参数下, 绳索中部点($\eta = 0.5$)在流体作用下的运动轨迹, 如图 5(a) ~ (e) 所示。当流速和升力系数较高, 而重力参数较小时, 回转运动响应如图 5(f) 所示。从图中可见, 随着重力参数的逐渐减轻, 绳索运动从最初的摆动, 发展为绕 x 轴的回转。可以预见, 在微重力环境下, 绳索发生大幅回转运动的可能性很大。通过仿真发现, 通过协调绳索参数, 如垂度、跨度、质量密度、弹性模量即可避免这种现象。

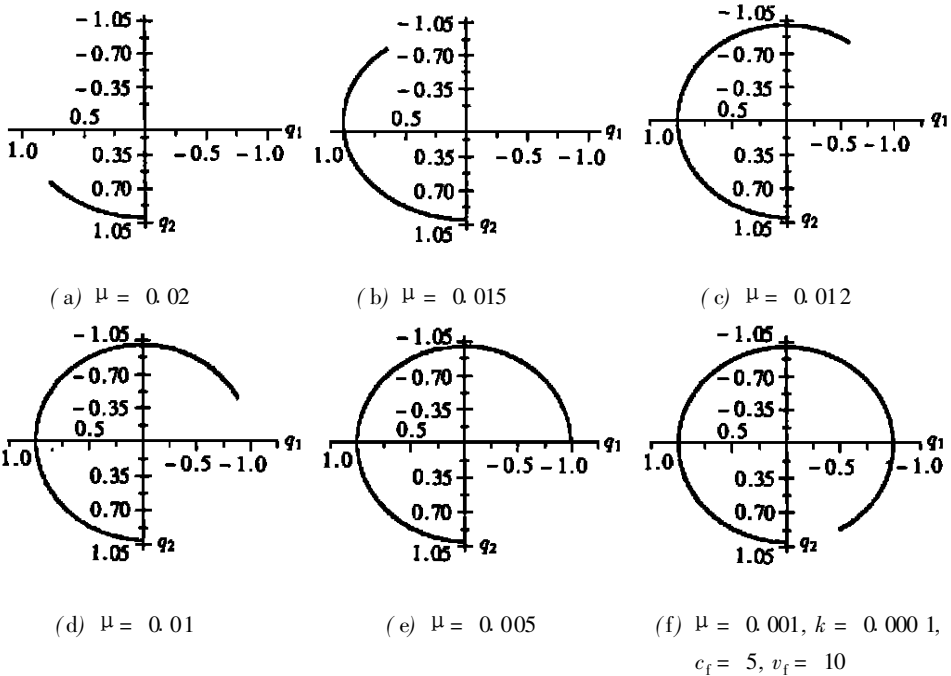


图 5 不同重力参数下, 绳索中部质点运动轨迹

5 结 论

通过小垂跨比绳索流激振动分析, 可以断言受横向流激励的绳索具有渐近稳定的平衡位置。随着重力参数的逐渐减小, 绳索运动会从最初的摆动, 发展到大幅回转。在微重力环境中, 绳索会频繁发生这类现象。调节绳索的结构参数可以避免绳索发生大幅回转运动。

[参 考 文 献]

[1] Perkins N, Mote C D Jr. Three-dimensional vibration of travelling elastic cables[J]. Journal of Sound and Vibration, 1987, 114(2): 325-340.

- [2] Vassalos D, Huang S. Dynamics of small_sagged taut_slack marine cable[J]. Computers & Structures, 1996, **58**(3): 557—562.
- [3] Mavrakos S A, Chatjigeorgiou J. Dynamic behaviour of deep water mooring lines with submerged buoys[J]. Computers & Structures, 1997, **64**(1_4): 819—835.
- [4] Chang W K, Pilipchuk V, Ibrahim R A. Fluid flow_induced nonlinear vibration of suspended cables [J]. Nonlinear Dynamics, 1997, **14**(4): 377—406.

Stretch and Rotation of a Suspended Cable Subject to Transverse Fluid Excitation

JIN Dong_ping, HU Hai_yan

(Institute of Vibration Engineering Research, Nanjing University of
Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, P R China)

Abstract: On the basis of analysis of the fluid drag acting on a suspended cable subjected to transverse fluid excitation, an expression is established for the fluid forces applied on the cable. By using a coordinate transform, the equations of motion of the cable are simplified into those in terms of the stretch and rotation coordinates. In the case of small ratio of sag_to_span, a study is made on the fluid_induced vibration behavior of the cable, including the critical fluid flow speed, the stability of equilibrium position, as well as the influences of gravitational parameter on the cable dynamics.

Key words: cable; fluid_induced vibration; stability