

文章编号: 1000-0887(2001) 08_0853_09

单自由度摩擦系统离散模型^{*}

冯 奇, 张相庭

(同济大学 固体力学教育部重点实验室, 上海 200092)

(张景绘推荐)

摘要: 发展了两种随机离散数学模型: 导出了一个以二维平均映射描述的随机模型, 并建立了一个概率预报模型. 通过实例对不同模型进行了比较, 对于平均映射模型, 分岔图指出了外噪声对系统性质的影响, 通过符号动力学方法分析指出概率预报模型的随机性质.

关键词: 随机摩擦系统; Stick_slip 运动; 随机浑沌

中图分类号: O324 文献标识码: A

引 言

摩擦系统能展示浑沌性质, 这一点已通过数值仿真和实验分析得到证实^[1~9]. 在[3]中, Popp 导出一个一维圆周映射用于描述单自由度确定性摩擦系统的 Stick_slip 运动, 并揭示其浑沌性质. 通过大量的研究, Popp 得出如下两个结论: (1) 由不同方法得出的结果, 从定性意义上来说完全相似; (2) 采用映射方法计算所耗费的计算机时间仅是采用数值仿真方法的千分之一. 因此, 采用映射方法有可能确定系统浑沌区的参数空间, 从而能提供给工业设计者作为参考的结果, 由此可见模型的研究是及其重要的课题之一. 但是 Popp 的研究仅限于确定性问题, 而实际上随机性客观存在^[10], 故研究随机摩擦系统更具有实际意义. 对于随机情况, 一个合适的离散模型往往更有用, 因为随机系统的每一次数值仿真只能得到解的一次实现, 如果要取得平均值, 据文献[11]则需要做 200 次以上的仿真, 其耗费的机时是相当可观的; 反之一个好的模型可节省大量的机时, 更重要的是由于它所需的机时较少, 因此一些现象, 如分岔现象、浑沌区的确定, 通往浑沌之路径, 均可以通过计算得到. 这些数据可以提供给工程设计者参考. 本文基于 Popp 的工作, 发展两种随机离散数学模型: 导出一个以二维平均映射描述的随机模型; 并导出以分段迭代方程描述的概率预报模型, 并通过实例分析对三种不同模型(确定性, 随机, 概率模型)进行比较.

1 确定性离散模型

为了导出随机模型, 首先对 Popp 的工作做一简单的回顾, 他考虑的模型如图 1 所示^[3]. 对于 Slip 模式, 其无量纲状态方程如下

* 收稿日期: 1999_11_09; 修订日期: 2001_03_13

基金项目: 上海教育委员会重点学科资助项目

作者简介: 冯奇(1946—), 女, 浙江人, 教授, 博士, 博士生导师, 著有“工程中的浑沌振动”.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_s + F_R(v_r)/c + u_0 \cos(x_3), \\ \dot{x}_3 = \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

在此, 方程中参数如图 1 所示:

$$\left. \begin{aligned} (*)' &= d(*)/d\tau, \quad \tau = \omega_0 t, \\ \omega_0 &= \sqrt{c/m}, \quad \Omega = \Omega/\omega_0, \\ x_1 &= x = x - x_s, \quad x_2 = \dot{x}_1 = \dot{x}', \\ x_s &= \mu(v_0) F_N/c, \quad v_r = \omega_0 x_2 - v_0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

对于 Stick 模式, $v_r = 0$, 由此产生 $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = v_0/\omega = \text{const}$, $\dot{x}_2 = 0$.

该模型遵循如下 Coulomb 摩擦律:

$$F_R(v_r) = -\mu(v_r) F_N \text{sgn}(v_r) \quad v_r \neq 0, \quad (3)$$

$$|F_R(v_r = 0)| \leq \mu_0 F_N' \quad v_r = 0 \quad (4)$$

对应以上 Coulomb 摩擦律, 方程(1)是分段线性, 故能逐段解析地解出, 由此它的解可能表达成显映射形式.

在 Stick 模式上, $B \rightarrow A$ 有以下关系

$$x(t) - x_B = v_0(t - t_B), \quad (5)$$

$$-x_0 + u_0 \cos x_3 \leq x(t) \leq x_0 + u_0 \cos x_3, \quad (6)$$

在此, $x_0 = \mu_0 F_N/c$.

在 Slip 模式上, $A \rightarrow B$ 有以下解

$$x(t) = x_s + C \cos(\omega_0 t - \varphi) + \frac{u_0}{1 - \Omega^2} \cos \alpha \quad \Omega = \frac{\Omega}{\omega_0}, \quad (7)$$

$$x(t) \leq v_0 \quad (8)$$

当方程(6)和方程(8)取等号时, 两种模式均达到边界, 边界点称为跃迁点或称停振点. 本文中着重考虑由 Slip 模式跃迁到 Stick 模式的跃迁点 B , 其状态为 $(x_{Bj+1}, \dot{x}_{Bj+1} = v_0, t_{Bj})$. 在满足粘着条件(6)后, 根据方程(5)及(7), 这些跃迁点的相继状态能被计算. 一般情况下, 将初值选在 Stick 模式上. 根据 Popp 的假定^[10], 在奇异线上的跃迁点 A 和 B 关于平衡点 x_s 对称, 即, $x_{Bj} - x_s = -(x_{Aj} - x_s)$.

考虑由 Slip 模式跃迁到 Stick 模式的跃迁点 B 的相继状态, 导出如下关于 B 点状态的二维映射.

$$\begin{aligned} x_{Bj+1} &= x_s + \sqrt{\left[x_s - x_{Bj} - \frac{u_0}{1 - \Omega^2} \cos \Omega(t_{Bj} + \Delta_{1j}) \right]^2 + \left[\frac{v_0}{\omega_0} + \frac{u_0 \Omega}{1 - \Omega^2} \sin \Omega(t_{Bj} + \Delta_{1j}) \right]^2} \times \\ &\quad \cos \left[\omega_0 \Delta_{2j} + \text{atan} \left(- \frac{\frac{v_0}{\omega_0} + \frac{u_0 \Omega}{1 - \Omega^2} \sin \Omega(t_{Bj} + \Delta_{1j})}{x_s - x_{Bj} - \frac{u_0}{1 - \Omega^2} \cos \Omega(t_{Bj} + \Delta_{1j})} \right) \right] + \\ &\quad \frac{u_0}{1 - \Omega^2} \cos \Omega(t_{Bj+1}), \quad (9) \\ t_{Bj+1} &= t_{Bj} + \Delta_{1j} + \Delta_{2j}, \end{aligned}$$

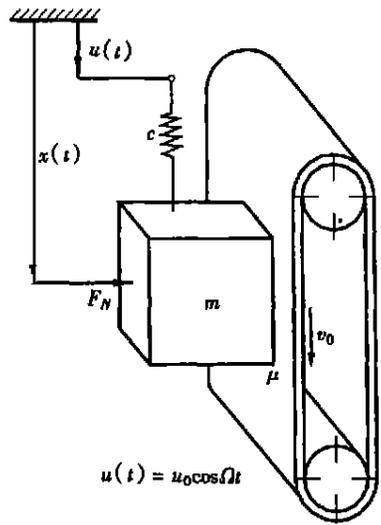


图 1 单自由度强迫振子

其中 Δ_{1j} 由(5) 式得出, Δ_{2j} 是由在奇异线上 $v_A = v_B = v_0$ 的条件导出的超越方程的解·

$$\Delta_{1j} = \frac{2x_s - 2x_B}{v_0},$$

$$\Delta_{2j} \cong \frac{2 \left[C\omega_0^2 \cos(\omega_0 t_{Aj} - \varphi) + \frac{u_0 \Omega^2}{1 - \eta^2} \cos \Omega t_{Aj} \right]}{\frac{u_0 \Omega^3}{1 - \eta^2} \sin \Omega t_{Aj} + C\omega_0^3 \sin(\omega_0 t_{Aj} - \varphi)},$$

式中系数如下,

$$t_{Aj} = t_{Bj} + \Delta_{1j},$$

$$C = \sqrt{\left[x_s - x_{Bj} - \frac{u_0}{1 - \eta^2} \cos \Omega(t_{Bj} + \Delta_{1j}) \right]^2 + \left[\frac{v_0}{\omega_0} + \frac{u_0 \eta}{1 - \eta^2} \sin \Omega(t_{Bj} + \Delta_{1j}) \right]^2},$$

$$\varphi = \omega_0(t_{Bj} + \Delta_{1j}) + \arctan \left(- \frac{\frac{v_0}{\omega_0} + \frac{u_0 \eta}{1 - \eta^2} \sin \Omega(t_{Bj} + \Delta_{1j})}{x_s - x_{Bj} - \frac{u_0}{1 - \eta^2} \cos \Omega(t_{Bj} + \Delta_{1j})} \right).$$

2 随机离散模型

由于随机性普遍存在, 故研究随机系统更具有实际意义· 为此, 本文的一个重要的目的是导出一个以均值表示的离散模型· 在此考虑三种随机性: (1) 支承运动的随机性^[10]; (2) 皮带传动速度略有有点随机性的波动; (3) 跃迁点位置的随机性· 首先, 假定支承运动加速度为随机过程, 因此由随机加速度引起的惯性力也为随机过程, 考虑方程的一般性, 采用白噪声扰动图 1 描述的系统; 其次, 假定皮带传动速度由两部分组成: 常数平均值及平均值为零的随机波动; 同时, 跃迁点位置也由两部分组成: 平均值叠加随机波动, 并假定其平均值依然满足 [3] 中的对称性假定· 为了计算方便, 并考虑粘性小阻尼, 由此, 得到以下一般运动方程·

对于 Slip 模式, 无量纲状态方程如下

$$\begin{cases} \dot{x}_{1\epsilon} = x_{2\epsilon} \\ \dot{x}_{2\epsilon} = -x_{1\epsilon} - \beta x_{2\epsilon} - x_s + FR(v_r)/c + u_0 \cos x_3 + Q_w(\tau) \\ \dot{x}_{3\epsilon} = \eta \end{cases} \quad (10)$$

式中, $x_{1\epsilon} = x_{\epsilon} - x_s$, x_{ϵ} 是被扰系统质块的位移, β 表示无量纲阻尼系数, $w(\tau)$ 是强度为 σ 的标准高斯白噪声, 它满足如下关系:

$$E[w(\tau)] = 0, E[w(\tau)w(s)] = \delta(\tau - s), \quad (11)$$

其它参数同前· 在 Stick 模式上, 相对速度与加速度均必须为零· 在随机情况, 假设皮带传动速度由两部分组成, 常平均速度 v_0 以及均值为零的随机扰动 δ_0 , 并设 δ_0 的最大值为 δ_m , 因此有

$$\dot{x}_{1\epsilon} = x_{2\epsilon} = v_0 + \delta_0, \quad \dot{x}_{2\epsilon} = 0 \quad (12)$$

为了解析地解方程(10) 和(12) 描述的随机系统, 引进如下关系:

$$x_{1\epsilon} = x_1 + \xi_1(\tau), \quad x_{2\epsilon} = x_2 + \xi_2(\tau), \quad (13)$$

式中 x_1 和 x_2 为未扰系统的解, ξ_1 和 ξ_2 为随机变量· 假设在跃迁点 A 和 B, ξ_1 有最大值 d_A 及 d_B · 将关系(13) 代入方程(10) 和(12) 中, 由于方程(10) 中存在非线性摩擦项, 它不可解耦·

为了得到一个近似的离散模型, 进一步引入假定 $v_r \approx x_2 - v_0$, 于是系统分解为确定性和随机

两部分·

1. Slip 模式

A. 确定性部分

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - \beta x_2 - x_s + FR(v_r = x_2 - v_0)/c + u_0 \cos x_3, \\ \dot{x}_3 = \eta, \end{cases} \quad (14)$$

$$x_{2\epsilon} < v_0 + \delta_m \quad (15)$$

B. 随机部分

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2, \quad \dot{\xi}_2 = -\xi_1 - \beta \xi_2 + qv(\tau), \quad (16)$$

$$x_{2\epsilon} < v_0 + \delta_m \quad (17)$$

由于 β 很小, 在方程(14)中忽略阻尼力项 βx_2 , 则方程与(1)相同, 其解如(7)和(8)· 而方程(16)是随机线性的, 因此可解·

2. Stick 模式

由式(12)取平均得

$$E[x_{2\epsilon}] = x_2 + E[\xi_2] = v_0,$$

可以证明在奇异线上 $E[\xi_2]$ 为零· 由于式(16)为随机线性的, 则 ξ_1 、 ξ_2 的概率密度函数满足

正态分布^[12]· 在奇异线上, 由于 $E[\xi_2] = \int_{-\delta_m}^{\delta_m} y_2 p(y_2) dy_2 = 0$ 得出

$$E[x_{2\epsilon}] = x_2 = v_0, \quad (18)$$

$$E[x_{2\epsilon}] = 0 \quad (19)$$

在 Slip 模式上, 积分 ξ_1 、 ξ_2 的概率密度函数, 可得方程(16)解的均值·

$$E[\xi_1] = \frac{\sigma_1}{2\sqrt{\pi}} \left[\exp\left[-\frac{d_A^2}{2\sigma_1^2}\right] - \exp\left[-\frac{d_B^2}{2\sigma_1^2}\right] \right] = \phi_{AB}, \quad (20)$$

$$E[\xi_2] = -\frac{\sigma_2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{q_m^2}{2\sigma_2^2}\right] = \phi_{AB} \quad (21)$$

由于(19)的关系, 式(15)同(8), 则在忽略阻尼后式(14)的解同(7)· 综合式(20)、(21)和(7), 得到在 Slip 模式中的解·

假定跃迁点的平均值仍满足[3]中的 Popp 假设的对称性关系, 则 $E[x_{\epsilon j+1}] = 2x_s - E[x_{\epsilon j}]$, 消去 $E[x_{\epsilon j+1}]$, 得到关于跃迁点 B 的二维平均映射方程·

$$\begin{aligned} E[x_{\epsilon j+1}] = & \left\{ \left[x_s - E[x_{\epsilon j}] - \frac{u_0}{1-\eta^2} \cos \Omega(t_{Bj} + \Delta_{1j}) - \phi_{AB} \right]^2 + \right. \\ & \left. \left[\frac{v_0 - \phi_B}{\omega_0} + \frac{u_0 \eta}{1-\eta^2} \sin \Omega(t_{Bj} + \Delta_{1j}) \right]^2 \right\}^{1/2} \times \\ & \cos \left[\omega_0 \Delta_{2j} + a \tan \left[-\frac{\frac{v_0 - \phi_{AB}}{\omega_0} + \frac{u_0 \eta}{1-\eta^2} \sin \Omega(t_{Bj} + \Delta_{1j})}{x_s - E[x_{\epsilon j}] - \frac{u_0}{1-\eta^2} \cos \Omega(t_{Bj} + \Delta_{1j}) - \phi_{AB}} \right] \right] + \\ & \frac{u_0}{1-\eta^2} \cos \Omega(t_{Bj+1}) + x_s + \phi_{AB}, \\ t_{Bj+1} = & t_{Bj} + \Delta_{1j} + \Delta_{2j} \quad (22) \end{aligned}$$

与确定性模型式相同可导出 Δ_{1j} 和 Δ_{2j} ,

$$\Delta_{1j} = \frac{2x_s - 2E[x_{\Phi j}]}{v_0},$$

$$\Delta_{2j} = \frac{2 \left[C\omega_0^2 \cos(\omega_0 t_{Aj} - \varphi) + \frac{u_0 \Omega^2}{1 - \Gamma^2} \cos \Omega t_{Aj} \right]}{\frac{u_0 \Omega^3}{1 - \Gamma^2} \sin \Omega t_{Aj} + C\omega_0^3 \sin(\omega_0 t_{Aj} - \varphi)},$$

$$t_{Aj} = t_{Bj} + \Delta_{1j}.$$

式中参数 C 及 φ 由下式得出,

$$C = \left\{ \left[x_s - E[x_{\Phi j}] - \frac{u_0}{1 - \Gamma^2} \cos \Omega(t_{Bj} + \Delta_{1j}) - \phi_{AB} \right]^2 + \left[\frac{v_0 - \varphi_{AB}}{\omega_0} + \frac{u_0 \Gamma}{1 - \Gamma^2} \sin \Omega(t_{Bj} + \Delta_{1j}) \right]^2 \right\}^{1/2},$$

$$\varphi = \omega_0(t_{Bj} + \Delta_{1j}) + \operatorname{atan} \left[- \frac{\frac{v_0 - \varphi_{AB}}{\omega_0} + \frac{u_0 \Gamma}{1 - \Gamma^2} \sin \Omega(t_{Bj} + \Delta_{1j})}{x_s - E[x_{\Phi j}] - \frac{u_0}{1 - \Gamma^2} \cos \Omega(t_{Bj} + \Delta_{1j}) - \phi_{AB}} \right].$$

比较映射 (22) 和 (9) 可见前者多了两修正项 ϕ_{AB} 、 φ_{AB} , 实例分析将指出, 这两项修正项将有可能抑制系统混沌运动的发生。

3 概率预报模型

前两节导出的离散模型都是基于 Stick_slip 运动存在的前提下得到的。其中, 在推导随机模型时, 引进了粘着条件是在奇异线上加速度均值为零, 这一点是不严格的。因为严格来说加速度 $x'_{2\epsilon} = E[x'_{2\epsilon}] + \int_{-\infty}^{\infty} Q(\omega) d\omega$, 当 $E[x'_{2\epsilon}] = 0$ 时, $x'_{2\epsilon}$ 不一定为零。但是对于任何一个随机过程, 其响应统计量可以确定, 而随机响应本身是不确定的, 即 $Q(\omega)$ 是未知的。由此可见, 当 $E[x'_{2\epsilon}] = 0$ 时, 严格的粘着条件 $x'_{2\epsilon} = 0$ 不一定能保证。只有当 $\int_{-\infty}^{\infty} Q(\omega) d\omega$ 也为零时, Stick_slip 运动才可能存在。因此, 对于随机系统, 则可能出现 Stick_slip 运动和 Slip_slip 运动共存的情况。在本节中将讨论这种共存的情况。由于在本文中采用 Coulomb 摩擦律, 对于 Slip_slip 运动, 无论是 $v_r > 0$ 或 $v_r < 0$, 运动方程均是线性的, 因此可以仿照前节方法解析地写出迭代方程(公式略)。

假定在相平面 (x, \dot{x}) 上, 考虑跃迁点 B 的平均运动 $E[x_{\Phi}]$ 、 $E[\dot{x}_{\Phi}]$, 它由点 B_0 开始启动, 点 B_0 的平均值坐标为 $E[x_{\Phi}(0)]$ 、 $E[\dot{x}_{\Phi}(0)]$ 。在此我们研究平均庞加莱映射, 考虑在时间 $t_{B_{j+1}}$ 时的点 B_{j+1} 的平均运动, 在此 $j = 0, 1, 2, \dots$ 。设从 B_j 变换到 B_{j+1} 的映射为 T , 那么 $B_{j+1} = TB_j$ 。由于本节中考虑两种可能发生的运动模式, 为了加以区别, 设对于 Stick_slip 模式, T 记为 T_1 ; 而对于 Slip_slip 模式, T 记为 T_2 。对于总的平均运动, 映射可以写成以下形式

$$B_{j+1} = T_2^{(N_n)} \circ T_1^{(M_n)} \circ \dots \circ T_2^{(N_1)} \circ T_1^{(M_1)} B_0, \quad j = \sum_{i=1}^n N_i + M_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (23)$$

在此, N_i 及 M_i 为自然数, 对于一个随机过程来说, N_i 及 M_i 是不可知的。在此采用概率预报的方法预报随机系统的运动^[13], 为此, 首先构造一个马尔柯夫链, 如果假设将来的运动模式取决于当前运动和过去运动的模式, 那么问题可以归结为一个马尔柯夫链。由于该马尔柯夫链完

全类同于天气预报模型, 因此数值选自天气预报模型^[13]. 令系统运动模式为一个二项随机过程, 它能容易地作为 Bernoulli 变量进行仿真.

4 实例分析

为了与 Popp 的工作进行比较, 选择与[3]相同的参数: $\mu_0 = 0.4$, $\mu = 0.23$, $v_0 = 1.0 \text{ m/s}$, $FN/c = 10.0 \text{ m}$, $\omega_0 = 1.0 \text{ rad/s}$, $\Gamma = 2.1$; 对于确定性情况初值选 $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1.0$; 相应的随机情况 $E[x_1(0)] = 0$, $E[x_2(0)] = 1.0$; 同时令 $\sigma = \sqrt{u_0}$, 下面给出某些代表性的结果.

1 分岔图

适度的外噪声有可能用以消除混沌, 这并不奇怪, 在[11]中已经指出, 随机系统混沌的发生取决于外激励白噪声方差 σ . 当 σ 较小时, 随机情况与确定性情况相类似, 但当 σ 增加到一定值时, 混沌区减少直至最后消失. 图2和图3分别给出确定模型和随机模型的分岔图, 图中横标为 u_0 , 纵标为 x_{Bj} 或 $E[x_{Bj}]$. 这两张图指出不同的通往混沌的路径. 在图2中几乎看不出周期窗口, 而3却相反, 有很长的明显的周期窗口; 从 $u_0 = 0.3 \sim 0.42 \text{ m}$ 很长一段中, 系统呈很长一段规则运动; 分岔图再次证实可以利用外噪声消除系统的复杂性, 乃至混沌, 同时也指出用离散模型可以方便地确定混沌区参数空间. 由噪声控制噪声的思想在物理领域早已被发现^[13], 本文的结果再一次证实以上阐述.

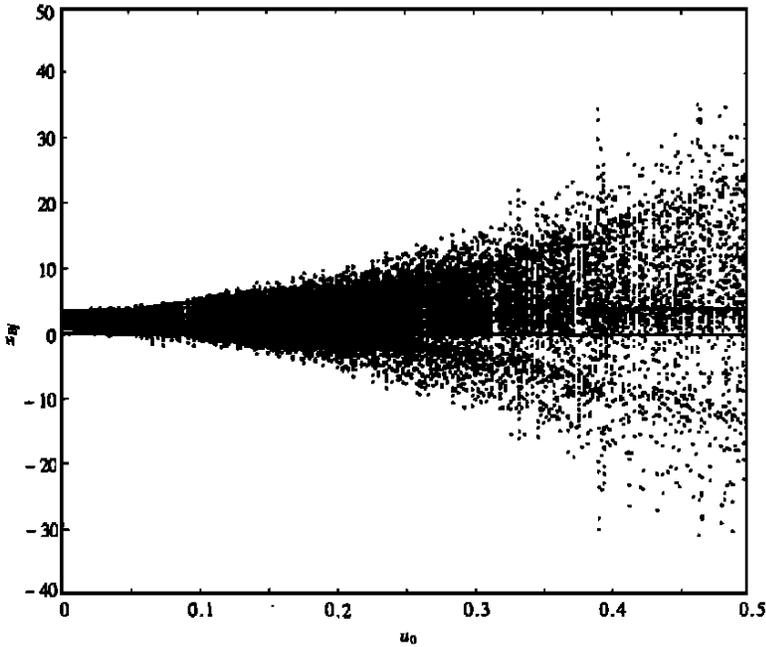


图2 确定模型的分岔图

2 概率预报模型

采用符号动力学方法描述概率预报模型的运动. 假如以 1 表示 Stick_slip 模式; 0 表示 Slip_slip 模式, 那么我们能得到一长串无序字符 11001110 ...; 为了判别过程性质, 需要观察很长一串数字序列, 这显然是不方便的. 为了用符号动力学方法表示结果, 本章中设计了以下图形. 图4表示每个循环的性质, 横标表示迭代次数, 在纵标上以白色表示 Stick_slip 模式; 黑

色表示 Slip_slip 模式。在图 4 中可以看出白色和黑色的分布是随机的, 因此可见两种不同模式的运动的发生是随机的。

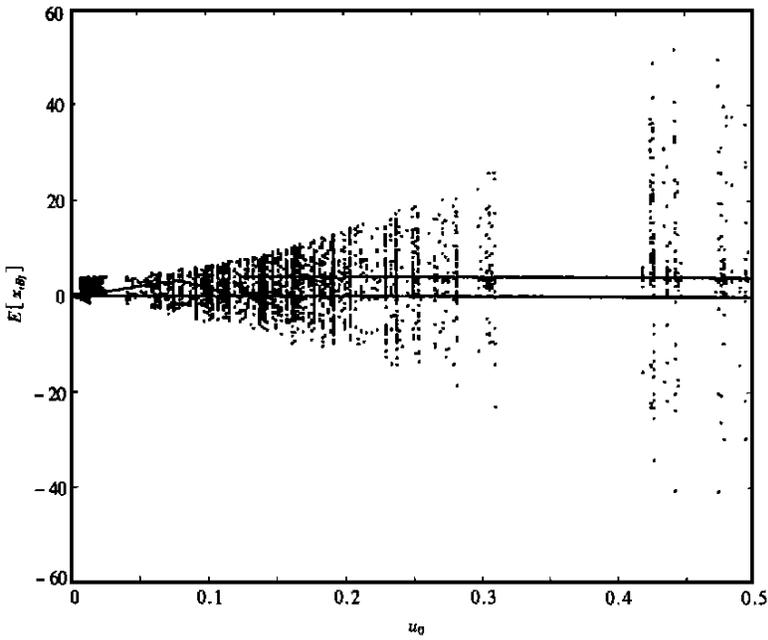
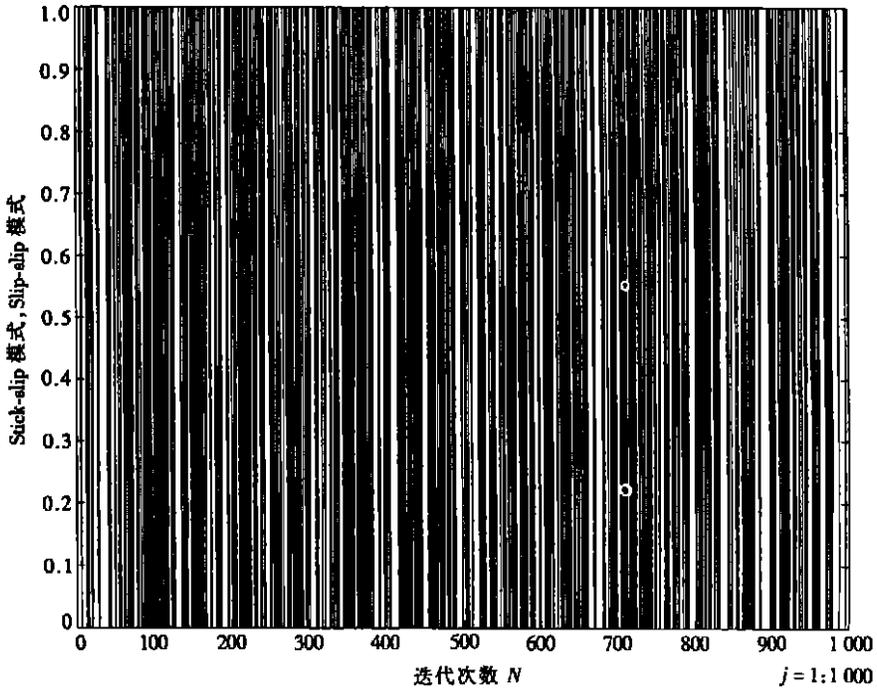


图 3 随机模型的分岔图



横标表示迭代次数: 在纵标上, 白色表示 Stick_slip 模式, 黑色表示 Slip_slip 模式

图 4 循环的性质图

5 结 论

实例分析的结果指出,三种不同的离散模型具有三种不同的性质;根据[3],确定性离散模型具有混沌性质。根据二维非线性映射性质,本文导出的随机离散模型对应适当参数可能存在混沌随机运动;而概率预报模型则呈纯随机的性质,这三种模型可用于不同的建模目的。其次,适度叠加外噪声后,可能减小系统的复杂性,乃至于混沌。第三,由于直接建立了离散模型,节省了大量的计算机时间,使计算分岔图成为可能,通过绘制该图可找出混沌区的参数空间,从而设计者在选择参数时能避开混沌区,因此本文导出的二种随机模型可供设计者设计结构或机械时参考。

[参 考 文 献]

- [1] Popp K, Stelter P. Nonlinear oscillations of structures induced by dry friction[A]. In: IUTAM Symposium on Nonlinear Dynamics in Engineering Systems [C]. Stuttgart, 1989.
- [2] Feeny B F, Moon F C. Autocorrelation on symbol dynamics for a chaotic dry friction oscillator[J]. Phys Lett A, 1989, **141**: 397—400.
- [3] Popp K. Some model problems showing stick slip motion and chaos[A]. In: Ibrahim R A, Soom A Eds. Friction Induced Vibration, Chatter, Squeal, and Chaos [C]. ASME D E, 1992, **49**, 1—12.
- [4] Popp K. Nichtlineare Schwingungen mechanischer Strukturen mit Fuge und Kontaktstellen[J]. Z Angew Math Mech, 1994, **74**(3): 147—165.
- [5] Popp K, Stelter P. Stick slip vibrations and chaos[J]. Philos Trans Roy Soc London Ser A, 1990, **332**: 89—105.
- [6] Popp K, Hinrichs N, Oestreich M. Analysis of a self excited friction oscillator with external excitation[A]. In: Guran A, Pfeiffer F, Popp K Eds. Dynamics With Friction [C]. Singapore: World Scientific, 1996.
- [7] Feeny B F. The nonlinear dynamics of oscillators with stick slip friction[A]. In: Guran A, Pfeiffer F, Popp K Eds. Dynamics With Friction [C]. Singapore: World Scientific, 1996.
- [8] Feeny B F, Liang J W. Phase space reconstructions of stick slip systems[A]. In: Proc of 1995 Design Engineering Tech Conf, Vol, 3A[C]. ASME D E, 1995, **84_1**, 1049—1060.
- [9] Feeny B F, Liang J W. A decrement method for the simultaneous estimation of Coulomb and viscous damping[J]. J Sound Vib, 1996, **195**(1): 149—154.
- [10] Nagarajaiah S, Reinhorn A M, Constantinou M C. Torsional coupling in sliding base isolated structures [J]. ASCE J Struc Engrg, 1993, **119**(1): 130—149.
- [11] Kapitaniak T. Chaos in System With Noise[M]. Singapore: World Scientific, 1988.
- [12] Ibrahim R A. Parametric Random Vibration [M]. New York: John Wiley & Sons, 1985.
- [13] Sheldon M Ross. Introduction to Probability Models [M]. New York, London: Academic Press INC, 1989.
- [14] Moss F, McVintock P V E. Noise in Nonlinear Dynamical Systems [M]. Vol 2. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.

The Discrete Models on a Frictional Single Degree of Freedom System

FENG Qi, ZHANG Xiang_ting

(Key Laboratory of Solid Mechanics of MOE, Tongji University,
Shanghai 200092, P R China)

Abstract: Two stochastic models on simple random system with friction were developed. One of them was a discrete model by a two-dimensional mean map applied to describe random stick-slip motion. The numerical examples show that external noise can reduce the complexity of the system behavior. Secondly, a probability model described was established with coexistence of stick-slip and slip motions. The numerical results point out that this model possesses pure stochastic behavior.

Key words: stochastic frictional system; stick-slip motion; stochastic chaos