

文章编号: 1000-0887(2001) 08_0869_10

两自由度非对称三次系统非线性 模态的奇异性质

徐 鉴¹, 陆启韶², 黄克累²

(1 同济大学 工程力学与技术系, 上海 200092; 2 北京航空航天大学 应用数学系, 北京 100083)

(陈予恕推荐)

摘要: 利用非线性模态子空间的不变性和摄动技术, 研究两自由度非对称三次系统在奇异条件下系统的性质。重点考虑子系统之间线性耦合退化时的奇异性质。对于非共振情形, 所得到的解析结果表明, 系统出现单模态运动以及振动局部化现象, 这种现象的强弱不但与非线性耦合刚度有关, 而且与非对称参数有关。并解析地得到了参数的阈值; 对于 1:1 共振情形, 模态随非线性耦合刚度和非对称参数的变化会出现分岔, 得到了参数分岔集以及模态的分岔曲线。

关键词: 非对称系统; 非线性模态; 振动局部化; 模态分岔; 非线性动力学

中图分类号: O322; TU311 **文献标识码:** A

引 言

非线性动力学研究的现代分析方法为非线性科学的发展起到了巨大的推动作用。这些方法包括 L_S 方法^[1]、奇异性方法^[2]、摄动方法^[3]、Melnikov 方法^[4]、C_L 方法^[5] 和中心流形法^[6] 等等。然而, 由于多自由度非线性振动系统内部子系统的耦合, 使动力学行为变得更加复杂, 其解耦问题仍是当今学术界研究的难点之一。Shaw^[7] 受动力系统不变流形概念的启发, 提出了非线性模态子流形具有不变性的观点, 同时给出了使多自由度非线性振动系统(保守和非保守)解耦的构造性方法, 为多自由度非线性振动系统的研究开辟了一条新的途径, 但仍存在两个方面的问题:

1 由于所研究的问题是非线性的, 如果系统存在两个以上的非线性模态, 叠加后的模态解在多大程度范围内能描述原系统的解?

2 当系统参数使非线性模态出现奇异时, 非线性模态有何特点? 对应的系统的动力学行为又如何?

我们就上述第一个问题已在文[8]中进行过研究, 结论表明: 系统在模态非奇异时非线性模态解的有效性不仅与其局部性的限制有关, 而且与模态动力学方程静态解分岔有关。本文是文[8]的继续和发展, 重点考察模态解出现奇异性的动力学行为。

本文考虑如下两自由度非线性自由振动系统(图 1)

收稿日期: 1999_09_27; 修订日期: 2001_03_20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10072039); 国家自然科学基金重大项目资助课题(19990510)

作者简介: 徐鉴(1961), 男, 浙江余姚人, 教授, 博士。

$$\begin{cases} x_1 + f_1(x_1) + f_2(x_1 - x_2) = 0, \\ x_2 - f_2(x_1 - x_2) + f_3(x_2) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

其中 f_1, f_2, f_3 为与位移有关的非线性弹性恢复力,

$$\left. \begin{aligned} f_1(u) &= u + p_1 u^3 + O(u^5), \\ f_2(u) &= ku + qu^3 + O(u^5), \\ f_3(u) &= (1 + \quad)u + p_2 u^3 + O(u^5) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

如果忽略 5 次以上非线性项, 系统(1) 成为三次非线性自由振动系统

$$\begin{cases} x_1 + x_1 + k(x_1 - x_2) + p_1 x_1^3 + q(x_1 - x_2)^3 = 0, \\ x_2 + (1 + \quad)x_2 + k(x_2 - x_1) + p_2 x_2^3 + q(x_2 - x_1)^3 = 0, \end{cases} \quad (3)$$

其中 k, p_1, p_2 和 q 为系统参数 当 $q = 0$ 或 $p_1 = p_2$ 时, 系统(3) 被称为非对称系统, 被称为线性非对称参数 当系统(3) 中子系统线性耦合刚度退化时, 即 $k = 0$, 系统(3) 的非线性模态解出现奇异性^[8], 特别是当 $q = 0$ 和 $q = 8$ 时分别对应 1 1 和 1 3 内共振

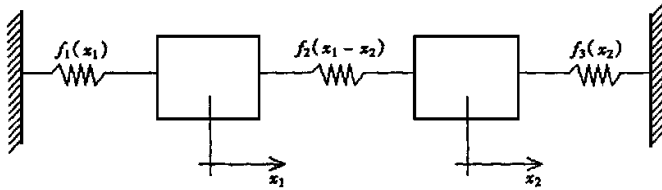


图 1 系统(1) 的结构图

针对上述第二个问题, 本文利用非线性模态方法和摄动法研究系统(3) 在 $k = 0$ 时的动力学行为以及非线性模态的性质和特点

1 非共振时模态的奇异性质: 单模态运动和振动局部化

局部化的概念是由 Anderson^[9] 在固体物理的研究中提出的, 他的研究结果表明导体中电子运动能量可以集聚在一个很小的范围内, 其程度不仅依赖于系统内部子系统之间耦合的强弱, 而且还与导体材料自身的缺陷有关 尽管 Hodges^[10] 已经提出固体物理这一研究成果可以应用于航空和结构动力学, 但到目前为止并没有受到动力学特别是非线性动力学研究领域太多的关注 Pierre^[11, 12, 13] 可以说是少数应用这一研究成果的学者代表, 对于线性多自由度振动系统模态的局部化问题, 他给出了大量的理论和数值结果, 说明实际中大量存在着局部化现象

由文[8]的方法(详见附录), 将 $k = 0$, $q = 0$ 和 $q = 8$ 代入附录 (A4) ~ (A12), 只能解出一组解

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = 0, \\ a_6 &= \frac{(-6)q}{(-8)}, a_7 = 0, a_8 = -\frac{6q}{(-8)}, a_9 = 0, \\ b_6 &= 0, b_7 = \frac{3(-3)q}{(-8)}, b_8 = 0, b_9 = a_8 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

对应的系统(3) 的动力学行为是单模态运动, 并且非线性模态不变曲面是系统的中心流形的二维子流形^[1]

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= u, \quad x_2 = v, \\ x_2 &= \frac{(-6)q}{(-8)}u^3 - \frac{6q}{(-8)}uv^2, \\ x_2 &= \frac{3(-2)q}{(-8)}u^2v + \frac{(-8)q}{(-8)}v^3 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

将(5)代入(3), 得到模态动力学方程(5次近似)

$$u + u + (p_1 + q)u^3 - 3u^3(a_6u^2 + a_8u^2) = 0 \quad (6)$$

通过应用 Lindstead_Poincaré 方法^[14], 我们可以得到(6)的解

$$\begin{aligned} u &= a \cos(\omega t + \phi) + \frac{1}{32} a^3 (p_1 + q) \cos(3\omega t + 3\phi) - \\ &\frac{5a^5}{1024(-8)} [3(-192q + (40q + \\ &7(-8)(p_1 + q)^2)) \cos(3\omega t + 3\phi) + \\ &(8q - (-8)(p_1 + q)^2) \cos(5\omega t + 5\phi)], \end{aligned} \quad (7)$$

其中, a 和 ϕ 由系统(3)的初值 $u|_{t=0} = u_0$ 和 $v|_{t=0} = v_0$ 确定, 是非线性振动频率,

$$\begin{aligned} \omega &= 1 + \frac{3a^2}{8} (p_1 + q) - \frac{3a^4}{256(-8)} (-576q + 5^2(p_1 + q)^2 - \\ &40(p_1^2 + 2p_1q + (q - 2)q)) \end{aligned} \quad (8)$$

为方便起见, 将初值 u_0 和 v_0 写成极坐标的形式

$$u_0 = a_0 \cos \phi_0, \quad v_0 = -a_0 \sin \phi_0, \quad (9)$$

其中 $\phi_0 = 1$ 于是得到

$$a_0 = \sqrt{u_0^2 + v_0^2}, \quad \phi_0 = \arccos\left(\frac{u_0}{a_0}\right) = \arcsin\left[-\frac{v_0}{a_0}\right], \quad (10)$$

$$\begin{cases} a_0 \cos \phi_0 = a \cos \phi + \frac{1}{32} a^3 c_1 \cos(3\phi) + \frac{5}{1024} a^5 [c_2 \cos(3\phi) + c_3 \cos(5\phi)], \\ -a_0 \sin \phi_0 = -a \sin \phi - \frac{3}{1024} a^3 c_1 \sin(3\phi) - \\ \frac{5}{1024} a^5 [3c_2 \sin(3\phi) + 5c_3 \sin(5\phi)], \end{cases} \quad (11)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{32} (p_1 + q), \\ c_2 &= -\frac{3}{1024(-8)} [(40q + 7(-8)(p_1 + q)^2) - 192q], \\ c_3 &= -\frac{1}{1024(-8)} (8q - (-8)(p_1 + q)^2) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

为了解(11)中的 a 和 ϕ , 将 a 和 ϕ 展开为以 a_0 的幂的形式

$$\begin{aligned} a &= A_1 a_0 + A_3 a_0^3 + A_5 a_0^5 + O(a_0^7), \\ &= B_0 + B_2 a_0^2 + B_4 a_0^4 + O(a_0^6) \end{aligned} \quad (13)$$

将(13)代入(11)并比较方程两边 a_0 的同次幂可得到

$$\begin{aligned} A_1 &= 1, \\ A_3 &= c_1 (\cos 4\phi_0 + 4\cos 4\phi_0 - 6), \\ A_5 &= \frac{1}{4} (605c_1^2 - 2d - 2(268c_1^2 + 4c_2 - d)) \cos 2\phi_0 - 4(10c_1^2 - \end{aligned}$$

$$c_2 + 3c_3) \cos 4_0 + 8(c_3 - 2c_1^2) \cos 6_0 - c_1^2 \cos 8_0$$

$$B_0 = 0,$$

$$B_2 = -c_1(8\sin 2_0 + \sin 4_0),$$

$$B_4 = \frac{1}{2}[(248c_1^2 - 4c_2 - d)\sin 2_0 + (32c_1^2 - 2c_2 - 6c_3)\sin 4_0 + 4(3c_1^2 - c_3)\sin 6_0 + c_1^2 \sin 8_0],$$

其中 c_1, c_2, c_3 满足(12), 而

$$d = -\frac{3}{256} \left(\frac{-}{-8} \right) [-576q + 5^2(p_1 + q)^2 - 40(p_1^2 + 2p_1q + q(q - 2))]$$

特别当 $v_0 = 0$ 时, $a_0 = u_0$, 则

$$a = a_0 - \frac{1}{32} a_0^3 (p_1 + q) - \frac{a_0^5}{1024} \left(\frac{-}{-8} \right) (19^2 p_1^2 - 152 p_1^2 - 576q + 112 q - 304 p_1 q + 38^2 p_1 q - 152 q^2 + 192^2 q^2) \tag{14}$$

记系统(3)两个子系统的振幅分别是 x_1 和 x_2 , 则当 $v_0 = 0, a_0 = u_0$ 时, 由(5)、(7)和(14)可以得到

$$x_1 = a_0 + O(a_0^3), \quad x_2 = \left(\frac{-6}{-8} \right) q a_0^3 + O(a_0^5) \tag{15}$$

根据非线性模态方法有效性研究的结果^[8], 要求 $a_0 < 1$ 因此, 当

$$\left(\frac{-6}{-8} \right) q < O\left(\frac{1}{a_0} \right)$$

时, 系统(3)的振动能量集中在子系统 x_1 处, 即出现振动的局部化现象 记

$$\left(\frac{-6}{-8} \right) q_{\text{Threshold}}$$

是振动局部化的阈值, 则它应满足

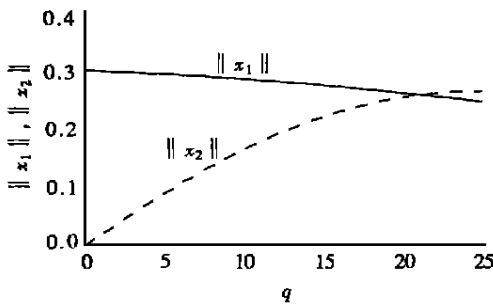
$$\left(\frac{-6}{-8} \right) q_{\text{Threshold}} = O\left(\frac{1}{a_0} \right) \tag{16}$$

重新回忆系统参数: q 表示系统内部子系统之间的耦合, 是线性非对称参数 因此, 振动的局部化不仅与系统内部的耦合有关, 而且与系统的对称性有关 令人感兴趣的是对称性是否破缺总是与对应系统是否有缺陷相联系, 对称破缺对非线性系统动力学行为有重大影响, 它可以导致非线性系统失稳、分岔, 甚至出现混沌运动^[15] 对于本文考虑的系统, 当 $= 0, p_1 = p_2$ 时, 如果 (\hat{x}_1, \hat{x}_2) 是解, 则 (\hat{x}_2, \hat{x}_1) 和 $(-\hat{x}_1, -\hat{x}_2)$ 也是(3)的解 显然, 当 0 或 $p_1 = p_2$ 时, 这种对称性就不存在了, 这种对称性的破缺可以导致非线性系统振动的局部化

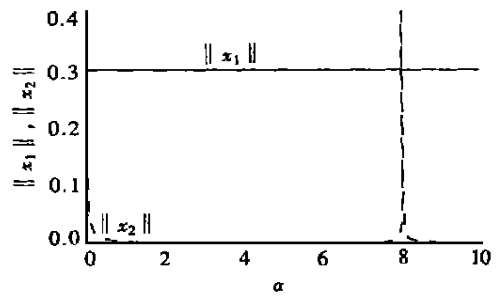
为了直观地描述我们所得到的理论分析结果, 同时对其进行数值验证和模拟, 本节给出一个数值例子, 取相关参数分别为 $= 1, p_1 = 0.5, p_2 = 0.7, q = 0.2, u_0 = 0.3, v_0 = 0$

图2描绘了 x_1 和 x_2 在忽略 $O(a_0^7)$ 量级上随 q 和 的变化情况 从图2(a)中可以看出, 在 q 小于阈值时, $x_2 / x_1 < O(1)$, 并且 q 越小, x_2 越小, 说明子系统之间的非线性耦合越弱, 振动的局部化程度越强 随着子系统之间非线性耦合增强, 子系统 x_1 的振动能量通过非线性耦合构件传递给子系统 x_2 , 使得振动的局部化消失; 图2(b)说明只有当 0 或 8 时, 振动的局部化现象才能消失, 观察(3)当 $k = 0$ 时的特征值是 i 和 $\sqrt{1+}$, 于是 0 或 8 恰恰是系统(3)发生 1 1 或 1 3 内共振 图3是数值解与近似解析解(7)和(5)的比较: 第一行是采用 R_K 法得到的数值解; 第二行是近似解析解; 第

三行是两种解的比较 图3的结果说明近似解析解与数值解吻合得很好, 同时也可看到局部化现象

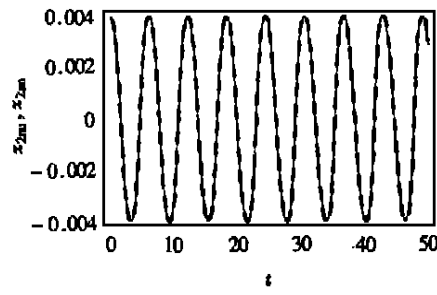
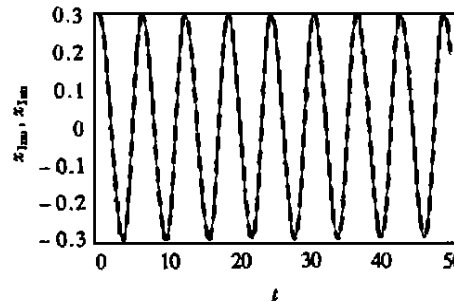
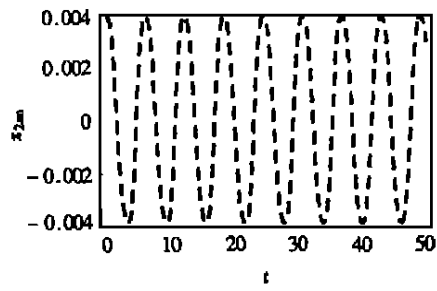
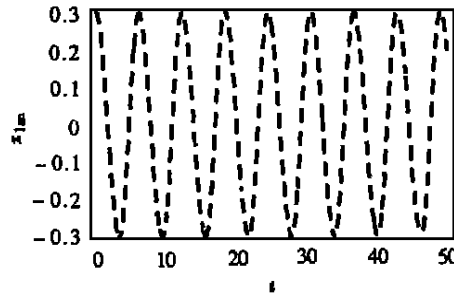
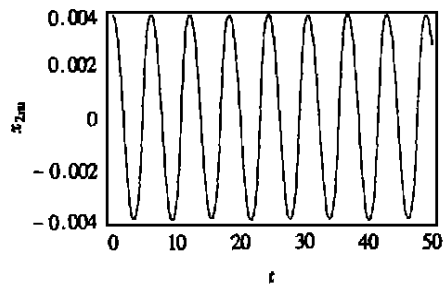
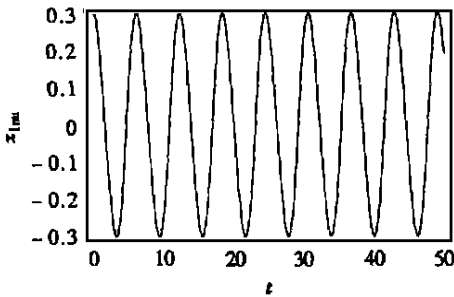


(a) 固定 $\alpha = 1$



(b) 固定 $q = 0.2$

图2 系统(3)振幅与 q 和 α 的关系 ($u_0 = 0.3, v_0 = 0, p_1 = 0.5, p_2 = 0.7$)



细实线 (3) 数值解; 虚线 近似解析解(7)和(5)

($u_0 = 0.5, v_0 = 0, p_1 = 0.5, p_2 = 0.7, \alpha = 3, q = 0.2$)

图3 系统(3)的振动局部化现象: 数值解与近似解析解比较

2 1 1 共振时模态的奇异性质: 模态分岔

如果 $k = 0$ 、 $\omega = 0$, 则系统(3)发生 1 1 内共振, 代入附录的(A4)~ (A12)可得到

$$\left. \begin{aligned} a_1 = b_2, \quad a_2 = b_1 = a_3 = a_4 = a_5 = b_3 = b_4 = b_5 = 0, \\ a_6 = b_9, \quad a_7 = -b_8, \quad a_8 = -b_8, \quad b_6 = b_8, \quad b_7 = b_9 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

和

$$qa_1^4 + (p_2 - 2q)a_1^3 + (2q - p_1)a_1 - q = 0 \quad (18)$$

在解方程组(17)和(18)的过程中有两个自由变量, 特别地, 当取 $b_8 = b_9 = 0$ 时, 系统(3)存在着相似模态, 其形式为

$$x_2 = a_1 x_1, \quad y_2 = b_2 y_1, \quad (19)$$

其中 a_1 和 b_2 满足方程(17)和(18)

从(18)得知, 可能存在 4 个实数解, 即有可能存在 4 阶模态. 因此, 存在模态分岔. 为了讨论(18)实数解存在的条件, 设 $q \neq 0$ 并作变换 $a_1 = z - (p_2 - 2q)/4q$, 则(18)成为

$$z^4 + mz^2 + nz + r = 0, \quad (20)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} m = -\frac{3}{8} \left(\frac{p_2 - 2q}{2} \right)^2, \quad n = \frac{2q - p_1}{q} + \frac{1}{8} \left(\frac{p_2 - q}{q} \right)^3, \\ r = -1 + \frac{1}{4} \frac{(p_1 - 2q)(p_2 - q)}{q^2} - \frac{3}{256} \left(\frac{p_2 - 2q}{q} \right)^4 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

设

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{3}(m^2 - 4r) - \frac{4}{9}m^2, \quad w = \frac{8}{27}m^3 - \frac{1}{3}m(m^2 - 4r) - \frac{1}{2}n^2, \\ &= s^2 + w^3, \end{aligned}$$

则当 $s > 0$ 时, (20) 有两个实根; 当 $s < 0$ 时, (20) 有 4 个实根. 因此, $s = 0$ 是模态分岔的边界或分岔集. 因此, 分岔集可以被表示为

$$= \left\{ (p_1, p_2, q) \mid s = 0 \right\} \quad (22)$$

特别地, 当系统(3)是对称系统(即 $p_1 = p_2 = p$) 时, $s = -p^2(p^2 - 4pq)^3/27q^6$, 则对于 $p^2 - 4pq < 0$, (18) 有两个实根 $a_1^{(1)} = 1, a_1^{(2)} = -1$; 对于 $p^2 - 4pq > 0$, (18) 有 4 个实根 $a_1^{(1)} = 1, a_1^{(2)} = -1, a_1^{(3,4)} = (2q - p \pm \sqrt{p^2 - 4pq})/2q$

图 4 表明对称系统当 $p = 0.50$ 时, 模态系数 a_1 与非线性耦合系数 q 的依赖关系. 从图中可以看出, 当 $q < 0.0125$ 时, 附加模态才会出现, 该模态是从反对称模态中分岔出来的, 分岔点的坐标是 $(0.0125, -1)$; 当 p 为零时, 系统不存在着附加模态, 这些结论与文[16]用匹配法所得到的结果完全一致.

对于非对称系统(即 $p_1 \neq p_2$), 不妨设 $p_2 = p_1 + \delta$. 图 5 表明了模态的分岔集曲线, 在其内部存在着附加模态; 图 6(a) 和图 6(b) 分别为 a_1 随 q 和 δ 的变化. 从图中我们可以看出, 非线性耦合越弱和非对称因素增强, 越容易出现模态分岔. 另外, 非对称系统的附加模态结构与对称系统的有本质区别, 这是由于非对称参数的扰动造成的.

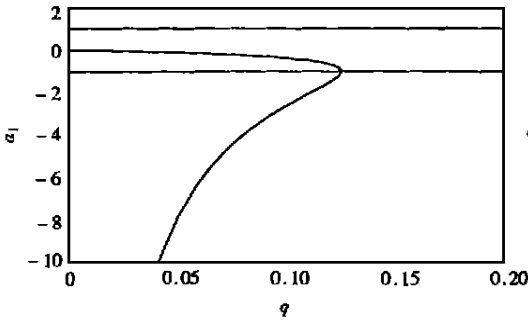


图4 对称系统的模态分岔 ($p_1 = p_2 = p = 0.50$)

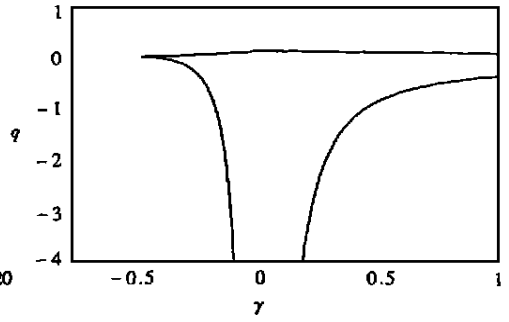
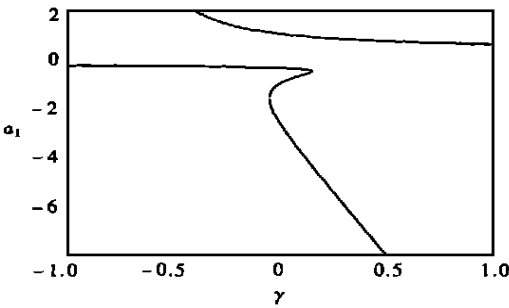
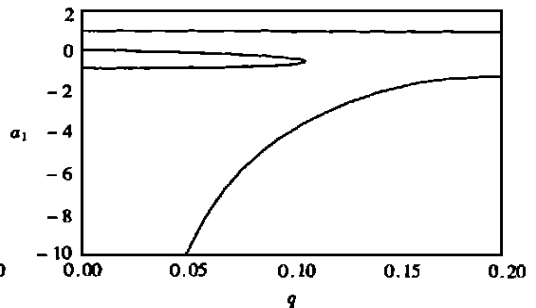


图5 非对称系统(3)的模态分岔参数集



(a) $q = 0.1$



(b) $q = 0.1$

图6 非对称系统(3)的模态分岔图 ($p_1 = 0.5$)

3 结 论

(1) 当系统(3)内部的子系统仅存在非线性耦合时,对于非共振情形,系统只有单模态运动。这种单模态运动存在着局部化现象,它不仅与非线性耦合有关,而且与非对称参数有关。局部化现象的消失是通过子系统之间的能量传递和或内共振完成的。

(2) 当系统(3)出现1:1内共振时,模态会出现分岔而形成附加模态,非线性耦合越弱和非线性对称因素增加,越容易出现模态分岔。

(3) 由于对称性理论无助于非对称系统的研究,非线性模态方法和摄动法的联合应用也许是解决非对称非线性振动系统有关问题的方法之一。

附录: 系统(3)的非线性模态方法

对于动力系统(3),定义相空间的一个不变子集 S ,使得如果系统初始条件在 S 中,则系统的运动永远保持在 S 中。依据 Shaw^[7] 给出的非线性模态的构造方法,我们知它们是非线性运动方程的不变子空间,且在平衡点处与对应的线性不变子空间相切。将系统(3)改写为

$$z = [A_0 + A_2(z)]z, \tag{A1}$$

其中

$$\left. \begin{aligned}
 \mathbf{z} &= [x_1, y_1, x_2, y_2], \quad y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2, \\
 \mathbf{A}_0 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(1+k) & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k & 0 & -(1+k) & 0 \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{A}_2(\mathbf{z}) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(p_1+q)x_1^2 - 3qx_2^2 & 0 & 3qx_1^2 + qx_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3qx_2^2 + qx_1^2 & 0 & -(p_2+q)x_1^2 - 3qx_2^2 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A2})$$

令 $x_1 = u, y_1 = v$, 并且将 x_2, y_2 展开成关于明天模态坐标 u, v 的函数

$$\left. \begin{aligned}
 x_2 &= a_1u + a_2v + a_3u^2 + a_4uv + a_5v^2 + a_6u^3 + a_7u^2v + a_8uv^2 + a_9v^3 + \\
 y_2 &= b_1u + b_2v + b_3u^2 + b_4uv + b_5v^2 + b_6u^3 + b_7u^2v + b_8uv^2 + b_9v^3 +
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A3})$$

将(A3)代入(A1), 可通过 u 和 v 各次幂系数的比较, 得到一系列恒等式, 可确定(A3)中的系数, 下面的推导都是通过计算机代数语言 MATHEMATICA 得到的:

u 项

$$\left. \begin{aligned}
 a_2 + b_1 + a_2k - a_1a_2k &= 0, \\
 -a_1 - a_1 + b_2 + k + b_2k - a_1k - a_1b_2k &= 0;
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A4})$$

v 项

$$\left. \begin{aligned}
 -a_1 + b_2 + a_2^2k &= 0, \\
 -a_2 - a_2 - b_1 - a_2k - a_2b_2k &= 0;
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A5})$$

u^2 项

$$\left. \begin{aligned}
 a_4 + b_3 - a_2a_3k + a_4k - a_1a_4k &= 0, \\
 -a_3 - a_3 + b_4 - a_3k - a_3b_2k + b_4k - a_1b_4k &= 0;
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A6})$$

uv 项

$$\left. \begin{aligned}
 -2a_3 + 2a_5 + b_4 - 2a_2a_4k + 2a_5k - 2a_1a_5k &= 0, \\
 -a_4 - a_4 - 2b_3 + 2b_5 - a_4k - a_4b_2k - a_2b_4k + 2b_5k - 2a_1b_5k &= 0;
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A7})$$

v^2 项

$$\left. \begin{aligned}
 -a_4 + b_5 - 3a_2a_5 &= 0, \\
 -a_5 - a_5 - b_4 - a_5k - a_5b_2k - 2a_2b_5k &= 0;
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A8})$$

u^3 项

$$\left. \begin{aligned}
 a_7 + a_6 - a_3a_4k - a_2a_6k + a_7k - a_1a_7k + a_2p_1 + a_2q - 3a_1a_2q + \\
 3a_1^2a_2q - a_1^3a_2q &= 0, \\
 -a_6 - a_6 + b_7 - a_6k - a_6b_2k - a_3b_4k + b_7k - a_1b_7k + b_2p_1 - a_1^3p_2 + q - \\
 3a_1q + 3a_1^2q - a_1^3q + b_2q - 3a_1b_2q + 3a_1^2b_2q - a_1^3b_2q &= 0;
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A9})$$

u^2v 项

$$\left. \begin{aligned}
 -3a_6 + 2a_8 + b_7 - a_2^2k - 2a_3a_5k - 2a_2a_7k + 2a_8k - 2a_1a_8k - 3a_2^2q + \\
 6a_1a_2^2q - 3a_1^2a_2^2q &= 0, \\
 -a_7 - a_7 - 3b_6 + 2b_8 - a_7k - a_7b_2k - a_4b_4k - 2a_3b_5k - a_2b_7k + 2b_8k - \\
 2a_1b_8k - 3a_1^2a_2p_2 - 3a_2q + 6a_1a_2q - 3a_1^2a_2q + 3a_2b_2q + \\
 6a_1a_2b_2q - 3a_1^2a_2b_2q &= 0;
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A10})$$

uv^2 项

$$\left. \begin{aligned}
 & - 2a_7 + 3a_9 + b_8 - 3a_4a_5k - 3a_2a_8k + 3a_9k - 3a_1a_9k + 3a_2^3q - \\
 & \quad 3a_1a_2^3q = 0, \\
 & - a_8 + a_8 - 2b_7 + 3b_9 + a_8k - a_8b_2k - a_5b_4k - 2a_4b_5k - 2a_2b_8k + 3b_9k - \\
 & \quad 3a_1b_9k - 3a_1a_2^2p_2 + 3a_2^2q - 3a_1a_2^2q + 3a_2^2b_2q - 3a_1a_2^2b_2q = 0;
 \end{aligned} \right\} \quad (A11)$$

$$\left. \begin{aligned}
 & - a + b_9 - 2a_5^2k - 4a_2a_9k - a_2^4q = 0, \\
 & - a_9 - a_9 - b_8 - a_9k - a_9b_2k - 2a_5b_5k - 3a_2b_9k - a_2^3p_2 - a_2^3q - a_2^3b_2q = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (A12)$$

v^3 项

[参 考 文 献]

[1] Guckenheimer J, Holmes P. Nonlinear Oscillation, Dynamical System and Bifurcation of Vector Fields [M]. New York: Springer_Verlag, 1983.

[2] 陆启韶. 分岔和奇异性[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1995.

[3] Nayfeh A H, Mook D T. Nonlinear Oscillations [M]. New York: John Wiley & Sons Inc, 1979.

[4] Wiggins S. Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos [M]. New York: Springer_Verlag, 1990.

[5] Chen Y S, Langford W F. The subharmonic bifurcation solution of nonlinear Mathieu's equation and Euler dynamically buckling problem[J]. Acta Mech Sinica, 1998, 19(3): 522-532.

[6] Iooss G, Joseph D D. Elementary Stability and Bifurcation Theory [M]. New York: Springer_Verlag, 1980.

[7] Shaw S W, Pierre C. Normal modes for nonlinear vibration systems[J]. Journal of Sound and Vibration, 1993, 164(1): 85-124.

[8] 徐鉴, 陆启韶, 黄克累. 两自由度非对称三次系统非奇异时的非线性模态及叠加性[J]. 应用数学和力学, 1998, 19(12): 1077-1086.

[9] Anderson P W. Absence of diffusion in certain random lattices[J]. Physical Review, 1958, 109(12): 1492-1505.

[10] Hodges C H. Confinement of vibration by structural chains[J]. Journal of Sound and Vibration, 1982, 82(2): 411-424.

[11] Pierre C, Dowell E H. Localization of vibration by structural irregularity[J]. Journal of Sound and Vibration, 1987, 114(3): 549-564.

[12] Pierre C. Model localization and eigenvalue loci veering phenomena in disordered structures[J]. Journal of Sound and Vibration, 1988, 126(3): 485-502.

[13] Pierre C. Weak and strong vibration localization in disordered structures: a statistical investigation [J]. Journal of Sound and Vibration, 1990, 139(1): 111-132.

[14] 陈予恕. 非线性振动[M]. 天津: 天津科学技术出版社, 1983.

[15] Golubisky M, Stewart I, Schaeffer D G. Singularities and Groups in Bifurcation Theory [M]. Vol and Vol . New York: Springer_Verlag, 1988.

[16] Caughey T K, Vakakis A, Sivo J M. Analytical study of similar normal modes and their bifurcations in class of strongly non_linear systems[J]. Int J Non Linear Mechanics, 1990, 25(5): 521-533.

Singular Characteristics of Nonlinear Normal Modes in a Two Degrees of Freedom Asymmetric System With Cubic Nonlinearities

XU Jian¹, LU Qi_shao¹, HUANG Ke_Lei²

(1 Department of Engineering Mechanics and Technology, Tongji
University, Shanghai 200092, P R China;

2 Department of Applied Mathematics, Peking University of Aeronautics and Astronautics,
Beijing 100083, P R China)

Abstract: Nonlinear normal modes in a two degrees of freedom asymmetric system with cubic nonlinearities as singularity occurs in the system are studied, based on the invariant space in nonlinear normal modes and perturbation technique. Emphasis is placed on singular characteristics as the linear coupling between subsystems degenerates. For non-resonances, it is analytically presented that a single-mode motion and localization of vibrations occur in the system, and the degree of localization relates not only to the coupling stiffness between oscillators, but also to the asymmetric parameter. The parametric threshold value of localization is analytically given. For 1:1 resonance, there exist bifurcations of normal modes with nonlinearly coupling stiffness and asymmetric parameter varying. The bifurcating set on the parameter and bifurcating curves of normal modes are obtained.

Key words: asymmetric system; nonlinear normal mode; localization of vibration; bifurcation of normal mode; nonlinear dynamics