应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2001) 08_0879_06

一类变截面管内轴对称螺旋流的衰减规律分析*

熊鳌魁， 魏庆鼎

(北京大学 力学与工程科学系, 湍流国家重点实验室, 北京 100871)

(周显初推荐)

摘要： 针对一类变截面管内的轴对称弱螺旋流情况, 讨论了其沿下游的演变规律• 对于层流情况得到了指数衰减性的结论• 对于湍流情况, 则在 Boussinesq 涡粘性假设下得到了局部环量放大的必要条件•

关 键 词: 螺旋流; 衰减; 流动分析
中图分类号: O335 文献标识码: A

引 言

螺旋流在工业方面的应用范围极广, 如在射流技术、燃烧技术、气力输送、旋风分离及水力浮选等方面均广泛应用了螺旋流• 在发动机燃烧或其它火炉中, 常通过引入螺旋流来稳定火焰及强化燃料及空气的混合, 同时起到加强热量以及质量的交换• 螺旋流技术也进入了人们日常生活领域, 如螺旋流节能煤气灶等• 以往的研究主要集中在平直管道内的螺旋流流动, 在这一方面, 理论分析、实验研究及数值模拟都进行得较为充分• 本文则针对于一类变截面管道内的螺旋流情况进行了理论分析•

1 衰减规律的理论分析

考虑不可压、定常轴对称 $(\partial/\partial t = \partial/\partial\theta = 0)$、无外力作用的流体层流流动问题, 其柱坐标系$(x, r, \theta)$ 下的基本控制方程为:

连续方程:

$$\frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial r} = 0; \tag{1}$$

动量方程:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right), \tag{2a}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{w^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right), \tag{2b}$$

---

* 收稿日期: 1999_03_12; 修订日期: 1999_11_01
作者简介: 熊鳌魁(1960—) , 男, 南昌人, 副教授, 博士.

$$u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{vw}{r}=\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{w}{r^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right); \tag{2c}$$

其中 v、w、u 分别为径向(r), 周向(θ) 及轴向(x) 方向上的无量纲速度分量, p 为无量纲静压, Re 为雷诺数• 由于本文研究的是轴对称螺旋流沿下游的演变, 可引入环量 $\Gamma = rw$ 作为研究螺旋流的对象, 而将方程组(2) 式中的第三式表为:

$$u\frac{\partial \Gamma}{\partial x}+v\frac{\partial \Gamma}{\partial r}=\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial \Gamma}{\partial r}+\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2}\right)\bullet \tag{3}$$

对于变截面管道流动而言, 各变量都将是径向及轴向坐标的函数• 而且在管壁应满足不可滑移条件• 在这种情况下, 严格的解析解形式一般表达不出来• 但在引入合理的量级假设下, 对方程进行必要的简化后, 仍有可能找到某种形式的精确解来说明管内螺旋流的变化规律• 为此引入如下量级关系:

$$\frac{[u\partial/\partial x]}{[Re^{-1}\partial^2/\partial x^2]}=Re[u][x]=Re\gg 1, \tag{4}$$

$$[v]\ll[u],\quad [w]\ll[u]\bullet \tag{5}$$

这里[ ] 表示量级大小, 且规定无量纲的$[u]=[x]=O(1)$• 量级关系(4) 的物理意义是指因粘性引起的轴向扩散与因流体轴向主流速度所引起的轴向迁移相比可忽略不计• 而量级关系(5) 中的前一部分是基于充分长($[r]\ll 1$) 缓变截面管流中一般径向速度分量远小于轴向速度分量的特点, 后一部分则说明本文的讨论仅限于弱螺旋流情况• 通过基于量级关系(4)、(5) 的量级分析(如压力项作为被动量应有$[p]=O(1)$, 由连续方程应有$[\partial v/\partial r](=[\partial w/\partial r]=[\partial u/\partial x]$ 等) 可知在各个分量动量方程中均可略去轴向扩散项, 而且径向和周向动量方程与轴向动量方程相比要小一个量级• 这样, 在一级近似上有:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial(ru)}{\partial x}+\dfrac{\partial(rv)}{\partial r}=0,\\ u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial r}=-\dfrac{\partial p}{\partial x}+\dfrac{1}{Re}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}\right),\\ \dfrac{\partial p}{\partial r}=0;\end{cases} \tag{6}$$

但为研究螺旋流情况, 还必须在二级近似上考虑螺旋流分量的简化控制方程:

$$u\frac{\partial \Gamma}{\partial x}+v\frac{\partial \Gamma}{\partial r}=\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial \Gamma}{\partial r}\right)\bullet \tag{7}$$

为解方程组(6), 作如下坐标变换:

$$R=\frac{1}{2}\left(\frac{r}{r_w}\right)^2\qquad X=x, \tag{8}$$

其中 r_w 为无量纲管壁半径• 再由连续方程引入 Stokes 流函数 $\psi(x,r)=\psi(X,R)$, 且有关系:

$$ru=\frac{\partial\psi}{\partial r}=\frac{r}{r_w^2}\frac{\partial\psi}{\partial R},\quad rv=-\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{r_w'}{r_w}2R\frac{\partial\psi}{\partial R}-\frac{\partial\psi}{\partial X}, \tag{9}$$

其中 $r_w'=\mathrm{d}r_w/\mathrm{d}x$• 令 $U=\partial\psi/\partial R$, $V=-\partial\psi/\partial X$, $P=r_w^4 p$, $W=r_w\Gamma$, 则有:

$$u=\frac{1}{r_w^2}U,\quad v=\frac{1}{r}\left(\frac{r_w'}{r_w}2RU+V\right) \tag{10}$$

及方程:

$$\frac{\partial U}{\partial X}+\frac{\partial V}{\partial R}=0,\qquad \frac{\partial P}{\partial R}=0\bullet \tag{11}$$

现寻求具备如下形式的相似性解:

$$U = U(R),\quad V = 0,\quad P = P(X)\cdot \tag{12}$$

将上述关系代入(6)式中的第二个方程可得:

$$-2\frac{r_w'}{r_w}U^2 = -\frac{dP}{dX} + 4\frac{r_w'}{r_w}P + \frac{2}{Re}\frac{d}{dR}\left(R\frac{dU}{dR}\right)\cdot \tag{13}$$

由上式可见,若要存在相似性解,必须 $r_w'/r_w = k = \text{const}$,即 $r_w = ce^{kx}$(c 为常数)· 此时(13)式分解为两个独立的常微分方程:

$$\frac{1}{Re}\frac{d}{dR}\left(R\frac{dU}{dR}\right) + kU^2 + A = 0, \tag{14}$$

$$\frac{dP}{dX} = 4kP - 2A, \tag{15}$$

其中 A 亦为一常数,由流量条件确定· (14)式的边界条件为:

$$U(0) < \infty,\quad U\left(\frac{1}{2}\right) = 0\cdot \tag{16}$$

因(14)为非线性常微分方程,不易求得解析表达式· 但可用数值方法求解[1]· 在确定 $U(R)$ 的分布后,便可对关于 Γ 的方程(7)进行分析·

在(8)式变换条件下,(7)式可表为:

$$\frac{\partial W}{\partial X} - kW = \frac{2}{Re}\frac{R}{U}\frac{\partial^2 W}{\partial R^2}\cdot \tag{17}$$

注意到(17)式右端系数只是 R 的函数而左端系数为常数,其求解区域又为矩形域,可进行分离变量· 若令 $W = W^X(X)W^R(R)$,则有:

$$\frac{dW^X}{dX} = (-\lambda + k)W^X \tag{18}$$

及特征值问题:

$$\frac{d^2W^R}{dR^2} + \lambda\frac{Re}{2}\frac{U}{R}W^R = 0, \tag{19}$$

其中 λ 为特征值· 从(18)式可解得:

$$W^X = ce^{(-\lambda + k)X}, \tag{20}$$

其中 c 为常数· 将结果复原回原变量并将 $r_w = ce^{kx}$ 代入可知:

$$\Gamma \sim e^{-\lambda x}\cdot \tag{21}$$

现证明 λ 是恒大于零的· 为此可用 W^R 乘以(19)式两端,然后对 R 从0到1/2进行积分,则有:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{1/2} W^R\frac{d^2W^R}{dR^2}dR + \lambda\frac{Re}{2}\int_0^{1/2}\frac{U}{R}(W^R)^2dR = \\
&\quad W^R\frac{dW^R}{dR}\Big|_0^{1/2} - \int_0^{1/2}\left(\frac{dW^R}{dR}\right)^2dR + \lambda\frac{Re}{2}\int_0^{1/2}\frac{U}{R}(W^R)^2dR = \\
&\quad -\int_0^{1/2}\left(\frac{dW^R}{dR}\right)^2dR + \lambda\frac{Re}{2}\int_0^{1/2}\frac{U}{R}(W^R)^2dR = 0\cdot
\end{aligned}$$

上述推导过程中应用了边界条件:

$$W^R(0) = W^R\left(\frac{1}{2}\right) = 0\cdot \tag{22}$$

因为

$$\int_0^{1/2}\left(\frac{\mathrm{d}W^R}{\mathrm{d}R}\right)^2\mathrm{d}R > 0 \text{ 及 } \frac{Re}{2}\int_0^{1/2}\frac{U}{R}(W^R)^2\mathrm{d}R > 0,$$

所以必有 $\lambda > 0$• 由此可知螺旋流沿轴向是呈指数型衰减的•

实际情况中,当雷诺数大到一定程度后,流体的流动呈湍流状态• 这时理应考虑到湍流对螺旋流的影响• 设讨论的基本前提仍为变截面管道内时均意义下的定常、轴对称、无外力作用的不可压缩流动,并设雷诺应力可用 Boussinesq 涡粘性假设模化• 则此时周向动量方程为:

$$u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{vw}{r}=\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[\nu_{\mathrm{eff}}r\left(\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{w}{r}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_{\mathrm{eff}}r\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right\}+\nu_{\mathrm{eff}}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{w}{r}\right), \tag{23}$$

其中 $\nu_{\mathrm{eff}}=\nu+\nu_t$ 为有效运动粘性系数,ν 为分子运动粘性系数,ν_t 为 Boussinesq 假设下的涡旋运动粘性系数,其值一般而言不是常数• 从(23) 式应力作用项中分离出柱坐标下的标量变系数扩散项可得:

$$u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{vw}{r}=\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\nu_{\mathrm{eff}}r\frac{\partial w}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_{\mathrm{eff}}\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]-\nu_{\mathrm{eff}}\frac{w}{r^2}+\left[\nu_{\mathrm{eff}}\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\nu_{\mathrm{eff}}w)\right]• \tag{24}$$

仍用环量 $\Gamma = rw$ 代替周向速度分量 w 作为研究对象,则可将上述表达式重新整理为:

$$u\frac{\partial\Gamma}{\partial x}+v\frac{\partial\Gamma}{\partial r}=\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\nu_{\mathrm{eff}}r\frac{\partial\Gamma}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_{\mathrm{eff}}\frac{\partial\Gamma}{\partial x}\right)\right]-2\nu_{\mathrm{eff}}\frac{1}{r}\frac{\partial\Gamma}{\partial r}-\frac{2}{r}\frac{\partial\nu_{\mathrm{eff}}}{\partial r}\Gamma• \tag{25}$$

上式右端第二项亦是一迁移项,其作用是改变环量的迁移方向及快慢,但仍不改变环量的大小• 为说明这点,可将该项移至左端:

$$u\frac{\partial\Gamma}{\partial x}+\left(v+\frac{2\nu_{\mathrm{eff}}}{r}\right)\frac{\partial\Gamma}{\partial r}=\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\nu_{\mathrm{eff}}r\frac{\partial\Gamma}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_{\mathrm{eff}}\frac{\partial\Gamma}{\partial x}\right)\right]-\frac{2}{r}\frac{\partial\nu_{\mathrm{eff}}}{\partial r}\Gamma, \tag{26}$$

显然上式左端表示环量以新的等效速度 $\boldsymbol{v}=(u, v+2\nu_{\mathrm{eff}}/r)$ 进行迁移• 而右端方括号内的标量扩散项代表环量的沿程扩散损失,其作用是使环量趋于平衡• 右端最后一项则显而易见为反应项,当 $\partial\nu_{\mathrm{eff}}/\partial r < 0$ 时为源,当 $\partial\nu_{\mathrm{eff}}/\partial r > 0$ 时为汇• 由此可见,在层流情况或湍流涡旋粘性系数为常数时,环量在耗散作用下理应衰减下来•

为进一步分析非常数湍流涡旋粘性系数情况,可仍忽略轴向扩散,此时则有:

$$u\frac{\partial\Gamma}{\partial x}+v\frac{\partial\Gamma}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\nu_{\mathrm{eff}}\left(r\frac{\partial\Gamma}{\partial r}-2\Gamma\right)• \tag{27}$$

由连续方程引入 Stokes 流函数 $\psi(x, r)$ 并作变换:

$$R=\psi(x, r) \qquad X=x, \tag{28}$$

则可将(27) 式变换为(坐标变换后,因变量符号应作相应改变• 为简洁、符合习惯起见,下文仍沿用原符号 Γ):

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial X}=\frac{\partial}{\partial R}\nu_{\mathrm{eff}}\left(r^2u\frac{\partial\Gamma}{\partial R}-2\Gamma\right)• \tag{29}$$

对 R 积分一次上式有:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}\int_0^{R_{\mathrm{w}}}\Gamma\mathrm{d}R=\nu_{\mathrm{eff}}r\frac{\partial\Gamma}{\partial r}\bigg|_{r_{\mathrm{w}}}, \tag{30}$$

其中 R_{w} 为管壁处的流函数值,代表了管内流量的大小• (29) 式在形式上关于环量是线性齐

次的, 且由边界条件知 Γ 在壁面处为零• 因此总可以定义环量在边壁是由正值趋于零的, 即:

$$\left.\frac{\partial \Gamma}{\partial r}\right|_{r_{\mathrm{w}}} < 0, \tag{31}$$

这样就有:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}\int_0^{R_{\mathrm{w}}} \Gamma \mathrm{d}R < 0• \tag{32}$$

积分 $\int_0^{R_{\mathrm{w}}} \Gamma \mathrm{d}R$ 可理解为一种断面平均, 另一方面由于 $\int_0^{R_{\mathrm{w}}} \Gamma \mathrm{d}R = \int_0^{\phi_{\mathrm{w}}} \Gamma \mathrm{d}\phi = \int_0^{r_{\mathrm{w}}} ru\Gamma \mathrm{d}r$, 正是环量通量• 所以这里证明了环量通量或断面环量平均值将沿轴向衰减• 然而这一结论却不能排除环量分布 $\Gamma(r)$ 在某一半径处的值随流动而增长的可能性, 为解答这个问题还需作深入的分析•

将(29)式乘以 Γ 后再对 R 积分则得:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{R_{\mathrm{w}}} \frac{1}{2}\frac{\partial \Gamma^2}{\partial X}\mathrm{d}R = \int_0^{R_{\mathrm{w}}} \Gamma \frac{\partial}{\partial R}\nu_{\mathrm{eff}}\left(r\frac{\partial \Gamma}{\partial r} - 2\Gamma\right)\mathrm{d}R = \\
&\quad \Gamma\nu_{\mathrm{eff}}\left(r\frac{\partial \Gamma}{\partial r} - 2\Gamma\right)\Bigg|_0^{r_{\mathrm{w}}} - \int_0^{R_{\mathrm{w}}} \nu_{\mathrm{eff}}\left(r\frac{\partial \Gamma}{\partial r} - 2\Gamma\right)\frac{\partial \Gamma}{\partial R}\mathrm{d}R = \\
&\quad -\int_0^{r_{\mathrm{w}}} \nu_{\mathrm{eff}} r\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial r}\right)^2 \mathrm{d}r + \int_0^{r_{\mathrm{w}}} \nu_{\mathrm{eff}}\frac{\partial \Gamma^2}{\partial r}\mathrm{d}r = \\
&\quad -\int_0^{r_{\mathrm{w}}} \nu_{\mathrm{eff}} r\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial r}\right)^2 \mathrm{d}r + \nu_{\mathrm{eff}}\Gamma^2\Big|_0^{r_{\mathrm{w}}} - \int_0^{r_{\mathrm{w}}} \Gamma^2\frac{\partial \nu_{\mathrm{eff}}}{\partial r}\mathrm{d}r = \\
&\quad -\int_0^{r_{\mathrm{w}}} \left[\nu_{\mathrm{eff}} r\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial r}\right)^2 \Gamma^2 \frac{\partial \nu_{\mathrm{eff}}}{\partial r}\right]\mathrm{d}r,
\end{aligned}$$

这里运用了边界条件 $\Gamma(0) = \Gamma(r_{\mathrm{w}}) = 0$• 由上式中其他参量的非负性可知, 当 $\partial\nu_{\mathrm{eff}}/\partial r$ 在半径区间 $[0, r_{\mathrm{w}}]$ 上也非负时, 必有:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}\int_0^{R_{\mathrm{w}}} \Gamma^2 \mathrm{d}R < 0• \tag{33}$$

此式充分说明了此时环量沿流线的衰减性•

2 结　　论

通过本文分析可得出如下结论:

在本文所讨论的情况下, 层流状态的螺旋流沿下游将呈指数型衰减• 这一结论与 Talbot[2] 在分析平直管内的螺旋流时, 利用在 Hagen_Poiseuille 流上迭加小扰动螺旋流的方式所进行的线化分析结果一致•

对于湍流情况, 尽管断面平均环量(或环量通量)沿下游总是衰减的, 但在局部位置上环量沿流向仍有放大的可能, 其必要条件是在区间 $[0, r_{\mathrm{w}}]$ 上, 存在 $\partial\nu_{\mathrm{eff}}/\partial r < 0$ 的子域•

[参　考　文　献]

[1] 熊鳌魁, 齐东文, 魏庆鼎. 渐变截面圆管道内粘性流动的相似性解[J]. 力学与实践, 1999, **21**(1): 34—36.

[2] Ward_Smith A J. Internal Fluid Flow: The Fluid Dynamics of Flow in Pipes and Ducts[M]. Oxford: Clarendon Press, 1980.

The Decay of Swirling Flows in a Type of Cross_Section_Varying Pipes

XIONG Ao_kui, WEI Qing_ding
(Department of Mechanics and Engineering Science, Peking University, Beijing 100871, P R China)

Abstract: The decay of weakly swirling flows in a type of cross_section_varying pipes was discussed analytically. For laminar swirling flow, the feature of exponential decay was demonstrated. For turbulent swirling flow, in spite of the decay of circulation flux, a necessary condition for local circulation to amplify along downstream was obtained under the Boussinesq's hypothesis.

Key words: swirling flow; decay; analysis of fluid flows