

文章编号: 1000\_0887(2001) 07\_0695\_06

# 具有动应力和动位移约束的离散变量 结构拓扑优化设计方法\*

石连栓<sup>1</sup>, 孙焕纯<sup>2</sup>, 冯恩民<sup>3</sup>

(1. 天津职业技术师范学院 计算机系, 天津 300222; 2. 大连理工大学 工程力学系, 大连 116023;  
3. 大连理工大学 应用数学系, 大连 116023)

(本刊编委孙焕纯来稿)

**摘要:** 讨论了动应力、动位移约束下离散变量结构拓扑优化设计问题。首先给出问题的数学模型, 然后用拟静力算法, 将结构惯性力极值作为静载荷施加到结构上, 求得结构的动位移和动内力, 将考虑动应力约束和动位移约束的离散变量结构拓扑设计问题化为静应力和静位移约束的优化问题, 然后利用两类变量统一考虑的离散变量结构拓扑优化设计的综合算法进行求解

**关键词:** 离散变量; 结构优化; 拓扑优化; 动应力约束; 动位移约束  
**中图分类号:** O221.4      **文献标识码:** A

## 引 言

国内外研究结构拓扑优化设计这一问题采用的方法主要是基结构法, 即根据预先给定的支承条件、载荷情况、结点位置及其它要求, 形成一个基结构。结构所允许的所有拓扑形式都可以由基结构删除某个或某些单元而成。在求解过程中, 通过删除截面为零的单元或基于某些准则删除或恢复某些杆件实现结构的拓扑变更。优点是相对较少的计算量和比较高的计算效率。然而, 拓扑变量和截面变量之间有较强的耦合关系, 如果忽略这种耦合关系, 最优解可能得不到, 特别是会出现“极限应力”和“最优解奇异”等问题。

文[2]将离散变量优化设计的相对差商法推广应用到离散变量结构拓扑优化设计, 建立了包含截面和拓扑两类变量的离散变量结构拓扑优化设计的数学模型, 并采用统一的算法求解。由于在建模及求解中充分考虑了两类变量的耦合作用, 反映了拓扑优化的本质, 因而该方法具有较高的计算精度。

对于包含有动载荷作用下的离散变量结构拓扑优化问题, 由于动位移约束函数不易求得及求动位移和动应力极值时动力重分析工作量很大, 加之离散变量结构拓扑优化本身发展还不太完善, 包含动应力和动位移约束的离散变量结构拓扑优化问题考虑的较少。有些设计规范中要求动应力动位移不能超过许用值, 因此必须考虑动应力和动位移约束。

\* 收稿日期: 2000\_05\_23; 修订日期: 2001\_02\_25

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19871009, 10002005), 天津教委科研项目(20010210)

作者简介: 石连栓(1964—), 男, 内蒙古丰镇人, 副教授, 博士后, 主要从事离散变量优化设计算法的研究。

本文考虑了既有静载荷作用又有动载荷的作用下的离散变量结构拓扑优化设计问题。首先给出了问题的数学模型,然后利用拟静力方法将结构惯性力极值作为静载荷施加到结构上,求得结构的动位移幅值,通过和静位移的叠加,求出结构位移,进而求得各杆件的内力,然后利用离散变量结构拓扑优化设计的综合算法求最优解,为解决具有动应力和动位移约束的离散变量结构拓扑问题提供了一种实用可行的方法。

## 1 既有静载荷又有简谐动载荷作用下的结构拓扑优化问题的数学模型

包含动应力约束和动位移约束的离散变量结构拓扑优化设计问题的数学模型为:

$$P \text{ 求 } \mathbf{A} = [A_1, A_2, \dots, A_m]^T, \quad \boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m]^T,$$

$$\min W = \sum_{i=1}^m \rho_i A_i \alpha_i \sum_{j \in G_i} j,$$

$$\text{s. t. } \alpha_i \cdot \sigma_{il}^+(\mathbf{A}, \boldsymbol{\alpha}) \leq \sigma_i, \quad \sigma_{il}^+(\mathbf{A}, \boldsymbol{\alpha}) = \max_{j \in G_i} (Q_{jl}(\mathbf{A}, \boldsymbol{\alpha}) \geq 0),$$

$$\alpha_i \cdot \sigma_{il}^-(\mathbf{A}, \boldsymbol{\alpha}) \geq \underline{\sigma}_i, \quad \sigma_{il}^-(\mathbf{A}, \boldsymbol{\alpha}) = \min_{j \in G_i} (Q_{jl}(\mathbf{A}, \boldsymbol{\alpha}) < 0), \quad (1)$$

$$\delta_{il}(\mathbf{A}, \boldsymbol{\alpha}) \leq \delta_j, \quad (2)$$

$$\alpha_i \cdot \sigma_{iID}^+(\mathbf{A}, \boldsymbol{\alpha}) \leq \sigma_i, \quad \sigma_{iID}^+(\mathbf{A}, \boldsymbol{\alpha}) = \max_{j \in G_i} (Q_{jID}(\mathbf{A}, \boldsymbol{\alpha}) \geq 0),$$

$$\alpha_i \cdot \sigma_{iID}^-(\mathbf{A}, \boldsymbol{\alpha}) \geq \underline{\sigma}_i, \quad \sigma_{iID}^-(\mathbf{A}, \boldsymbol{\alpha}) = \min_{j \in G_i} (Q_{jID}(\mathbf{A}, \boldsymbol{\alpha}) < 0), \quad (3)$$

$$\delta_{iID}(\mathbf{A}, \boldsymbol{\alpha}) \leq \delta_j, \quad (4)$$

$$\alpha_i \in \{0, 1\}, \quad A_i \in S_i = \{A_{i,1}, A_{i,2}, \dots, A_{i,n_i}\},$$

$$i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n_{Dis}; \quad l = 1, 2, \dots, n_L,$$

$\mathbf{A}$  和  $\boldsymbol{\alpha}$  分别为截面变量和拓扑变量所构成的向量,  $S_i$  是第  $i$  个截面变量的许用离散集,  $n_i$  是集合  $S_i$  的元素个数;  $n_L, m, n_{Dis}$  分别是工况数、截面变量数、位移约束总数,  $G_i$  是单元分组以后第  $i$  组单元的单元号所构成的集合。其中, (1) ~ (2) 式为静应力和静位移约束,  $\sigma_{il}^+$  是  $l$  工况下并且无动载荷作用下的第  $i$  组杆的拉应力的最大值,  $\sigma_{il}^-$  是  $l$  工况下并且无动载荷作用下的第  $i$  组杆的压应力的最小值,  $\delta_{il}$  是  $l$  工况并且无动载荷作用下的第  $j$  个约束位移; (3) ~ (4) 式为动应力和动位移约束,  $\sigma_{iID}^+$  是既有动载荷作用又有静载荷 ( $l$  工况) 作用下的第  $i$  组杆的拉应力的最大值,  $\sigma_{iID}^-$  是既有动载荷作用又有静载荷 ( $l$  工况) 作用下的第  $i$  组杆的压应力的最小值,  $\delta_{iID}$  是既有动载荷作用又有静载荷 ( $l$  工况) 作用下的第  $j$  个约束位移。

数学模型(1)式包含应力约束和位移约束,是一多约束优化设计问题,考虑到各种约束条件可能因为量纲不一致而使约束值相差甚远,因此,首先将(1)式的约束条件进行无量纲归一化处理,应力约束化为

$$\sigma_{il}^+(\mathbf{A}, \boldsymbol{\alpha}) = 1 - \alpha_i \sigma_{il}^+(\mathbf{A}, \boldsymbol{\alpha}) / \sigma_i \geq 0,$$

$$\sigma_{il}^-(\mathbf{A}, \boldsymbol{\alpha}) = 1 - \alpha_i \sigma_{il}^-(\mathbf{A}, \boldsymbol{\alpha}) / \underline{\sigma}_i \leq 0,$$

$$\sigma_{iID}^+(\mathbf{A}, \boldsymbol{\alpha}) = 1 - \alpha_i \sigma_{iID}^+(\mathbf{A}, \boldsymbol{\alpha}) / \sigma_i \geq 0,$$

$$\sigma_{iID}^-(\mathbf{A}, \boldsymbol{\alpha}) = 1 - \alpha_i \sigma_{iID}^-(\mathbf{A}, \boldsymbol{\alpha}) / \underline{\sigma}_i \leq 0.$$

位移约束化为

$$\delta_{il}(\mathbf{A}, \boldsymbol{\alpha}) = 1 - \delta_{il}(\mathbf{A}, \boldsymbol{\alpha}) / \delta_j \geq 0,$$

$$\delta_{iD}(A, \alpha) = 1 - \delta_{iD}(A, \alpha) / \delta_j \geq 0$$

在一轮优化中, 由于截面变化对单元内力的影响较小, 由静定化假设, 各杆件内力保持不变, 各组单元的最大拉应力和最小压应力可分别表示为

$$\sigma_{iL}^+(A_i) = \max_{j \in C_i} \left\{ \frac{N_{iL}}{A_i} \mid N_{iL} \geq 0 \right\} \text{ 和 } \sigma_{iL}^-(A_i) = \min_{j \in C_i} \left\{ \frac{N_{iL}}{A_i} \mid N_{iL} < 0 \right\}.$$

各组单元的最大动拉应力和最小动压应力可分别表示为

$$\sigma_{iD}^+(A_i) = \max_{j \in C_i} \left\{ \frac{N_{iD}}{A_i} \mid N_{iD} \geq 0 \right\} \text{ 和 } \sigma_{iD}^-(A_i) = \max_{j \in C_i} \left\{ \frac{N_{iD}}{A_i} \mid N_{iD} < 0 \right\}.$$

$$\text{结构的静位移可由 Mohr 公式表示为 } \delta_L(A) = \sum_{k=1}^M \frac{1}{E_k A_k} \sum_{i \in C_k} N_{iL} N_{i\bar{j}},$$

$$\text{结构的动位移也可由 Mohr 公式表示为 } \delta_{iD}(A) = \sum_{k=1}^M \frac{1}{E_k A_k} \sum_{i \in C_k} N_{iD} N_{i\bar{j}},$$

其中:  $N_{iL}$  是  $i$  单元在静载荷 ( $l$  工况) 作用下的内力,  $N_{iD}$  是  $i$  单元在动载荷和静载荷 ( $l$  工况) 作用下的内力,  $N_{i\bar{j}}$  是  $i$  单元对应于  $j$  位移方向所加单位载荷的虚工况的内力. 这样, 数学模型  $P$  就变成显示的形式.

## 2 动载荷作用下的结构的动内力的计算方法

这里采用拟静力方法, 考虑简谐动载荷作用下的情况. 在工程结构振动中, 考虑到自由振动项由于结构的阻尼作用, 很快就消失了, 而初始条件的影响主要表现在自由振动项中, 所以在求解过程中一开始就忽略自由振动的影响而只考虑强迫振动项的影响, 这一项是引起结构振动的主要因素. 由于阻尼对强迫振动的影响很小, 忽略阻尼的影响, 结构强迫振动微分方程为:

$$M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Ku = F_D \sin pt.$$

采用拟静力方法, 将以上方程化为

$$Ku = F_D \sin pt - M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

其中,  $-M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  为惯性力. 上式表示的就是将惯性力加到结构上的静力问题.

$$\text{设 } u = U_D \sin pt, \text{ 则有 } KU_D = F_D + Mp^2 U_D,$$

$$\text{移项得 } (K - Mp^2) U_D = F_D,$$

式中,  $K - Mp^2$  为结构的相当刚度矩阵,  $U_D$  为结构的动位移幅值, 求解上式即可求得结构的动位移幅值.

在动载荷和静载荷同时作用时, 设在静载荷作用下的位移值为  $U_S$ , 则将静位移和动位移的幅值叠加  $U = U_D + U_S$ , 然后利用叠加值  $U$  和结构的刚度矩阵即可求得结构构件  $i$  的动内力  $N^{(i)} = K^{(i)} U^{(i)}$ . 其中,  $N^{(i)}$ ,  $K^{(i)}$ ,  $U^{(i)}$  分别为  $i$  单元内力幅值向量、局部坐标系下的单元刚度矩阵和单元对应节点在局部坐标系下的位移向量.

内力求出以后, 就得到了一个显式的数学模型, 然后可以利用两类变量综合处理的拓扑优化的综合算法进行求解.

### 3 利用拓扑优化的综合算法求解

利用综合算法求解时, 要求两类变量的相对差商, 要求将多约束问题转化为单约束问题, 可以用文[2]提出的统一约束函数的处理方法, 也可利用文[4]的凝聚函数将多约束问题转化为单约束问题。设单约束函数为  $g(A, \alpha) (\leq 0)$ , 它是关于截面变量和拓扑变量的函数。

在优化设计中, 设计变量的改变, 同时会引起目标函数的改变及约束函数的改变。当设计变量  $A_i$  由  $A_{ij}$  变化到  $A_{i,j-1}$  时, 截面变量所构成的向量  $A$  由  $A^j$  变为  $A^{j-1}$ , 则约束函数对目标函数关于设计变量  $A_i$  的相对差商为

$$r_{A_i} = \frac{g(A^{j-1}, \alpha) - g(A^j, \alpha)}{|W_i(A_{i,j-1}) - W_i(A_{ij})|}$$

设计变量  $\alpha_i$  由 1 变化到 0 时, 约束函数对目标函数关于设计变量  $\alpha$  的相对差商为

$$r_{\alpha_i} = \frac{g_i(A, 0) - g_i(A, 1)}{\rho_{A_i} \sum_{j \in C_i} A_j}$$

其中:  $W_i(A_{i,j-1})$  是设计变量  $A_i$  的值为  $A_{i,j-1}$  时的目标函数值,  $W_i(A_{ij})$  是  $A_i$  的值为  $A_{ij}$  时的目标函数值。

最轻重量结构优化设计的目的就是在满足结构各项约束条件的前提下, 设计重量最轻的结构。为达此目的, 应逐次改变相对差商最小的设计变量, 因为初始设计点的目标函数是最大的。先求出全部相对差商值  $r_{\alpha_i}$  和  $r_{A_i} (i = 1, \dots, m)$ , 然后求出其最小值  $r^*$ 。如果该最小值对应于第  $i$  组截面变量, 则第  $i$  组截面赋予新值, 而其它变量保持不变, 这样得到一组新的设计点。再以这组新设计点为基础, 继续求差商; 若最小值对应于第  $i$  组拓扑变量, 删去  $i$  组变量对应的杆件以后结构非几何可变, 则删去该组变量所对应的杆件, 形成新的结构, 进行结构重分析并继续进行迭代。

### 4 算 例

例 1 十二杆平面桁架如图 1 所示, 有 6 个节点, 12 个设计变量, 材料是铝。容重为  $\rho = 27\ 150.68 \text{ N/m}^3$ ,  $E = 6.897 \times 10^6 \text{ N/cm}^2$ , 许用应力均为  $\sigma = 17\ 243.5 \text{ N/cm}^2$ ,  $\underline{\sigma} = -17\ 243.5 \text{ N/cm}^2$ 。荷载工况有两个, 静载荷分别是: 工况 1:  $P_{2y} = -4.45 \times 10^5 \text{ N}$ ; 工况 2:  $P_{4y} = -4.45 \times 10^5 \text{ N}$ ; 在两种工况下, 在 2 号节点作用有  $-40 \cos(50t) \text{ kN}$  的简谐动载荷。位移约束是两个工况下节点 2, 4 在  $y$  方向上的变化不允许超过  $5.08 \text{ cm}$ 。截面许用离散变量集为:  $\{6.45, 19.35, 32.26, 51.61, 67.74, 77.42, 96.77, 109.68, 141.94, 154.84, 167.74, 180.64, 187.10, 200, 225.81\} \text{ cm}^2$ 。

表 1 12 杆桁架在静力作用下和静力与动力同时作用下优化结果的比较

	W/N	杆 截 面 积 (cm <sup>2</sup> )											
		$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$	$A_7$	$A_8$	$A_9$	$A_{10}$	$A_{11}$	$A_{12}$
静力	19 728.7	167.74	19.35	109.68	77.42	0	19.35	32.26	109.68	109.68	32.26	0	0
静动力	20 702.69	167.74	32.26	141.94	67.74	0	32.26	51.61	96.77	32.26	32.26	0	0

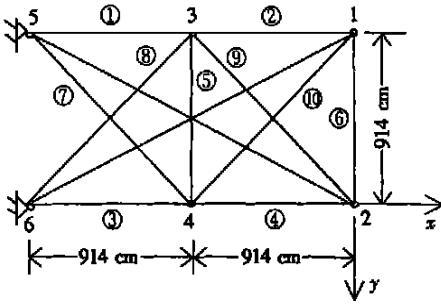


图 1 平面 12 杆桁架

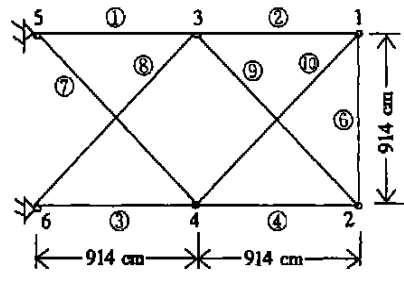


图 2 平面 10 杆桁架最优拓朴

考虑动力作用的优化结果和只有静载荷作用下的优化结果分别列在表 1, 可以看出, 优化重量同样增加了, 其中  $W$  为桁架的重量, 单位为牛顿(N)。

例 2 15 杆桁架如图 3 所示, 分组数  $M = 8$ , 分组情况列在表 2 中,  $\rho = 27\ 150.68\text{N/cm}^3$ ,  $E = 6.897 \times 10^6\text{N/cm}^2$ , 许用应力均为  $\sigma = 17\ 243.5\text{N/cm}^2$ ,  $\underline{\sigma} = -17\ 243.5\text{N/cm}^2$ 。静载荷工况有两个, 工况 1:  $P_{3y} = P_{5y} = P_{7y} = -4.45 \times 10^5\text{N}$ ; 工况 2:  $P_{4y} = P_{6y} = P_{8y} = -4.45 \times 10^5\text{N}$ , 同时在两种工况下, 在 4、6、8 号节点沿  $y$  方向分别作用有  $-40\cos(50t)\text{kN}$  的简谐动载荷。截面许用离散集:  $S = \{6.45, 9.68, 22.58, 32.26, 45.16, 70.97, 83.87, 103.23, 129.03, 161.29, 193.55\}\text{cm}^2$ , 结点 5 的  $y$  方向有  $\pm 1.524\text{cm}$  的位移约束。

表 2 变量连结

组号	1	2	3	4	5	6	7	8
杆号	1, 2	3, 4	5, 6	7, 8	9, 10	11, 12	13, 14	15

考虑动力作用的优化结果和只有静载荷作用下的优化结果分别列在表 3, 可以看出, 优化重量同样增加了, 其中  $W$  为桁架的重量, 单位为牛顿(N)。

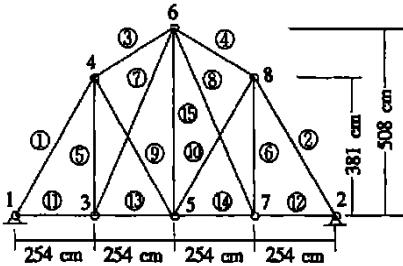


图 3 15 杆平面桁架

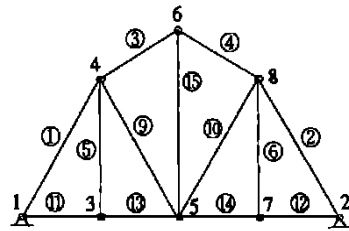


图 4 15 杆平面桁架最优拓朴

表 3 平面 15 杆桁在静力作用下和静力与动力同时作用下优化结果的比较

变量	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$	$A_7$	$A_8$	$W/N$
静力	83.87	45.16	32.26	0	6.451	6.451	6.451	70.97	4859
静力和动力	83.87	70.97	32.26	0	6.451	6.451	6.451	70.97	5265.13

## 5 结 论

采用“拟静力”处理方法,在考虑动应力、动位移约束的离散变量结构拓扑优化设计中,避免了结构的动力重分析工作量太大以及动位移约束函数关于设计变量的表达式也无法求得这两个困难,为利用综合方法求解具有动应力、动位移约束的离散变量结构拓扑优化设计问题提供了可能。由于动力作用的瞬时性,结构优化时,许用动位移可以略大于许用静位移。对于任意函数形式的动载荷,可以通过傅立叶展开将其展开成若干个简谐动载荷的形式,然后利用综合算法求解。

### [参 考 文 献]

- [1] CHAI Shan, SHI Lian\_shuan, SUN Huan\_chun. An application of relative difference quotient algorithm to topology optimization of truss structures with discrete variables[J]. Struct Optim, 1999, 18(1): 48—55.
- [2] 李兴斯. 解非线性规划的凝聚函数法[J]. 中国科学, 1991, A(12): 1283—1288.
- [3] 孙焕纯, 石连栓, 柴山. 考虑动应力、动位移约束的离散变量结构优化设计[J]. 计算力学学报, 1997, 14(增刊): 723—726.
- [4] CHAI Shan, SUN Huan\_chun. A relative difference quotient algorithm for discrete optimization[J]. Struct Optim, 1996, 12(1): 45—56.
- [5] Salajegheh E, Vanderplaats G N. Optimum design of trusses with discrete sizing and shape variables [J]. Struct Optim, 1993, 6(1): 79—85.

## A Method for Topological Optimization of Structures with Discrete Variables under Dynamic Stress and Displacement Constraints

SHI Lian\_shuan<sup>1</sup>, SUN Huan\_chun<sup>2</sup>, FENG En\_min<sup>3</sup>

(1. Department of Computer, Tianjin Vocational Technical Teacher'  
College, Tianjin 300222, P R China;

2. Department of Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116023, P R China;

3. Department of Mathematics, Dalian University of Technology, Dalian 116023, P R China)

**Abstract:** A method for topological optimization of structures with discrete variables subjected to dynamic stress and displacement constraints is presented. By using the quasi-static method, the structure optimization problem under dynamic stress and displacement constraints is converted into one subjected to static stress and displacement constraints. The comprehensive algorithm for topological optimization of structures with discrete variables is used to find the optimum solution.

**Key words:** discrete variables; structure optimization; topological optimization; dynamic stress constraint; dynamic displacement constraint