文章编号: 1000_0887(2001) 07_0713_06

一种改进的范式方法的应用

张伟亿[1,2], K. 侯赛因[2], 叶 敏[1]

(1 天津大学 力学系, 天津 300072; 2 滑铁卢大学 系统工程系, 加拿大)

(陈予恕推荐)

摘要: 对 ZHANG Wei_yi 和 K. Huseyin 等人提出的改进的范式方法作了进一步发展, 引进了不同的分析过程, 使其更适合于符号推导语言(如 MAPLE) 的应用 与过去的方法相比, 在实际计算范式时, 文中介绍的分析过程更简便、实用, 具有更多的优越性 文中 3 个范例说明了此结论

关 键 词: 非线性系统; 改进的范式方法; 符号推导
中图分类号: O322 文献标识码: A

引 言

在分析一个非线性系统时, 应用范式理论是非常有效的 通过一系列坐标变换, 我们可以用它求得对应于给定微分方程的最简形式[1~3] 而用这种方法得到的最简形式与原方程是拓扑等价的 一般来讲, 范式的形式不难求得, 但其对应系数的计算却很困难, 尤其是对高阶范式或高维系统的范式 文[4, 5] 中提出了一种改进的范式方法来简化这些运算, 前提是其方程的线性部分可以对角化 该方法通过引入一些不同的变换, 使求解过程非常简洁

在本文中, 作者把在文[4, 5] 中提出的改进的范式方法进一步发展, 引进了新的分析过程, 使其更适合于符号推导语言(如 MAPLE) 的应用

文中首先简单的介绍了改进的范式方法, 然后引入与之不同的分析过程(主要应用于符号运算中) , 并在最后介绍了三个例子来说明这种改进后的优点 结果清楚的显示了我们的结果与现有的范式方法的结果是等价的, 然而, 借助于 MAPLE 的帮助, 用本文介绍的方法可以系统的、快速的求得范式以及对应的系数, 只需数秒种 到目前为止, 本文作者还没有发现任何现有的范式方法能象本文介绍的方法这样方便、快速的求得范式及其系数

1 改进的范式方法

考虑下面的非线性方程

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \sum_{m=2}^{k} \boldsymbol{F}^m(x), \tag{1}$$

其中, $\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是特征值, 并且假设 $\mathrm{Re}(\lambda_j) = 0, (j = 1, \cdots, n)$;

收稿日期: 2000_01_12; 修订日期: 2001_01_20
基金项目: 国家自然科学基金资助(10072037); 加拿大 NSERC 资助; 国家自然科学基金重大项目资助(19990510)

作者简介: 张伟亿(1963) , 男, 辽宁人, 博士, 加拿大滑铁卢大学研究助理.

$F^m \in H_n^m$, 而 H_n^m 是 C^n 中由 n 个变量组成的 m 阶齐次多项式空间。为确定方程(1)的 k 阶范式, 将如下一系列接近恒同的变换

$$y_{s-1} = y_s + P^s(y_s), \tag{2}$$

代入方程(1)中得到

$$\dot{y}_2 = Ay_2 + F_1^2(y_2) + \sum_{n=3}^{k} F_1^n(y_2) \quad (s = 2),$$

$$\cdots\cdots$$

$$\dot{y}_k = Ay_k + \sum_{n=2}^{k} F_{n-1}^n(y_k) \quad (s = k), \tag{3}$$

其中 $s = 2, 3, \cdots, k$, 而当 $s = 2$ 时, $y_1 = x$; $y_s = (y_{s1}\ \ y_{s2}\ \ \cdots\ \ y_{sn})^{\mathrm{T}} \in C^n$; $P^s(y_s) \in H_n^s(y_s)$ 是待定多项式函数, 它将所变换后的函数中的所有 s 阶单项式变换为 s 阶共振单项式。其中变换后的函数 F_{m-1}^n 可以从下式求得

$$\dot{y}_m = (I + DP^m)^{-1}\left(Ay_m + AP^m(y_m) + \sum_{s=2}^{k} F_{m-2}^s(y_m)\right) = Ay_m + \sum_{s=1}^{k} F_{m-1}^s(y_m), \tag{4}$$

其中

$$\sum_{s=2}^{k} F_{m-2}^s(y_m) = \sum_{s=2}^{k} F_{m-2}^s(y_m + P^m(y_m)) = \sum_{s=2}^{k}\sum_{r=1}^{s} \frac{D^r F_{m-2}^s(y_m)}{r!}(P^m(y_m))^r;$$

当 $k = 3$ 时结果为:

$$F_1^2 = F^2 + AP^2 - DP^2Ay_2, \quad F_1^3 = F^3 + DF^2P^2 - DP^2F_1^2,$$

$$F_2^3 = F_1^3 + AP^3 - DP^3Ay_3。$$

设方程(3)中的第 k 个方程可以写成:

$$\dot{y} = Ay + \sum_{i=2}^{k} F_{i-1}^i(y) \tag{5}$$

在文[4,5]中已经证明了: 这个方程可以变换成对应于方程(1)的范式方程

$$\dot{x} = Ax + \sum_{s=2}^{k} G_{NF}^s(x), \tag{6}$$

其中 $G_{NF}^s(x)$ 是 s 阶共振单项式, 可以由下式直接求得

$$G_{NF}^s(x) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{\langle s,\lambda\rangle-\lambda_1=0} a^{s-2}_{s_1s_2\cdots s_n(1)} x_1^{s_1}x_2^{s_2}\cdots x_n^{s_n} \\ \vdots \\ \sum\limits_{\langle s,\lambda\rangle-\lambda_n=0} a^{s-2}_{s_1s_2\cdots s_n(n)} x_1^{s_1}x_s^{s_2}\cdots x_n^{s_n} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

其中 $s = s_1 + s_2 + \cdots + s_n$; $\langle s,\lambda\rangle = s_1\lambda_1 + s_2\lambda_2 + \cdots + s_n\lambda_n$; $s \ge 2$。而 $a^{s-2}_{s_1s_2\cdots s_n(m)}$ 是变换后的函数 $F_{s-2}^s(x)$ 中的第$(s-2)$阶单项式的系数。变换函数 $P^s(x)$ 可以直接由下式求得[4,5]:

$$P^s(x) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{\langle s,\lambda\rangle-\lambda_1\neq 0} \dfrac{1}{\langle s,\lambda\rangle-\lambda_1} a^{s-2}_{s_1s_2\cdots s_n(1)} x_1^{s_1}x_2^{s_2}\cdots x_n^{s_n} \\ \vdots \\ \sum\limits_{\langle s,\lambda\rangle-\lambda_n\neq 0} \dfrac{1}{\langle s,\lambda\rangle-\lambda_n} a^{s-2}_{s_1s_2\cdots s_n(n)} x_1^{s_1}x_s^{s_2}\cdots x_n^{s_n} \end{pmatrix}, \tag{8}$$

由上面分析可见: 第 s 阶范式以及系数可以直接从第$(s-2)$次变换函数中得到

值得注意的是上面过程涉及了一些复数矩阵求逆的计算(如方程(4)中) 这在实际的 MAPLE 计算中,需要较长的时间以及占用较大的内存,尤其在计算高阶范式及系数时,欲求的范式阶数越高就越不方便 虽然我们可以象文[4]那样,在 MAPLE 计算中显式表达变换后的函数 F_m^n,这样就不再需要计算矩阵的逆,然而这样的分析过程并不是基于方便的迭代,因而在某些情况下,文[4,5] 介绍的方法在实际计算中并不怎么简便 为使上面的分析结果能与符号运算更好的结合,我们引入下面的分析过程

2 新的分析过程

考虑如下恒等式[3]

$$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{DP}^m)^{-1}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{DP}^m(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{DP}^m)^{-1} \tag{9}$$

把方程(9)代入方程(4)得到

$$\boldsymbol{y}_m=\boldsymbol{Ay}_m+\boldsymbol{AP}^m(\boldsymbol{y}_m)+\sum_{n=2}^{k}\boldsymbol{F}_{m-2}^n(\boldsymbol{y}_m)-\boldsymbol{DP}^m\left(\boldsymbol{Ay}_m+\sum_{n=2}^{k}\boldsymbol{F}_{m-1}^n(\boldsymbol{y}_m)\right) \tag{10}$$

因此,一般情况下我们有:

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{F}_{m-1}^s=\boldsymbol{F}_{m-2}^s\qquad(s<m),\\&\boldsymbol{F}_{m-1}^s=\boldsymbol{F}_{m-2}^s+\boldsymbol{AP}^m-\boldsymbol{DP}^m\boldsymbol{Ay}_m\qquad(s=m),\\&\boldsymbol{F}_{m-1}^s=\boldsymbol{F}_{m-2}^s-\boldsymbol{DP}^m\boldsymbol{F}_{m-1}^{s-m+1}\qquad(s>m)\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

上面方程表述了一个迭代过程,其中不涉及矩阵求逆运算 因此,利用这个迭代过程求解范式与系数是很方便的 显然,由方程(11)中的第二个方程可以求得 m 阶范式

上述迭代过程可以从下面表达式开始直到任意阶

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{F}_1^2=\boldsymbol{F}^2+\boldsymbol{AP}^2-\boldsymbol{DP}^2\boldsymbol{Ay}_2\\&\boldsymbol{F}_1^s=\boldsymbol{F}^2-\boldsymbol{DP}^2\boldsymbol{F}_1^{s-1}(s>2)\end{aligned}\ \text{以及}\ \boldsymbol{P}^2(\boldsymbol{y}_2)=\begin{pmatrix}\displaystyle\sum_{s=2,\ -\ _1\ 0}\frac{1}{-\quad 1}a_{s_1s_2\ \ s_n}(1)\,y_{21}^{s_1}\ \ y_{2n}^{s_n}\\ \\ \displaystyle\sum_{s=2,\ -\ _n\ 0}\frac{1}{-\quad n}a_{s_1s_2\ \ s_n}(n)\,y_{21}^{s_1}\ \ y_{2n}^{s_n}\end{pmatrix}$$

这样,范式以及系数可以从方程(8)与(11)中求得 易见,方程(8)与(11)只涉及简单的迭代过程,非常适合于符号推导运算 下面介绍三个范例

3 应 用

例 1 确定下面二维系统的范式

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y},\\&\boldsymbol{y}=-\boldsymbol{x}+a\boldsymbol{x}^2\boldsymbol{y}\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

首先把方程(12)变换成复数形式得

$$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{Az}+\boldsymbol{F}^3(\boldsymbol{z}) \tag{13}$$

其中 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(\mathrm{i},-\mathrm{i})$;$\boldsymbol{z}=(z_1\quad z_2)^{\mathrm{T}}$ 以及 $z_2=z_1$

根据前面的分析,方程(13)的前 7 阶范式形式上可以表示为

$$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{Az}+\boldsymbol{G}_{NF}^3(\boldsymbol{z})+\boldsymbol{G}_{NF}^5(\boldsymbol{z})+\boldsymbol{G}_{NF}^7(\boldsymbol{z}),$$

其中范式 G_{NF}^m 以及变换函数F_s^m 可以从方程(8) 以及(11) 中求得 把上式变换成极坐标形式得到

$$\left.\begin{aligned} r &= a_1 r^3 + a_2 r^5 + a_3 r^7, \\ &= 1 + b_1 r^2 + b_2 r^4 + b_3 r^6, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

其中的系数 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ 可以借助于 MAPLE 从迭代方程(11) 以及方程(8) 中求得 用 PC266 计算机, 可以在 0 24 秒中得到上述系数 前七阶范式可以表示为:

$$\begin{aligned} r &= \frac{a}{8} r^3 + \frac{13 a^3}{8192} r^7 + O(r^9), \\ &= 1 - \frac{11 a^2}{256} r^4 + O(r^8) \end{aligned} \tag{15}$$

例 2　求解下面含有一个零根, 一对纯虚根的余维二系统的范式及系数

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= - x_2 - (x_3 - x_1)^2, \\ x_2 &= x_1, \\ x_3 &= - (x_3 - x_1)^2 \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

把 $x_1 = \dfrac{z_1 + z_2}{2}, x_2 = \dfrac{z_1 - z_2}{2\mathrm{i}}, x_3 = z_3$ 代入方程(16), 得到其对应的复坐标方程

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{A z} + \boldsymbol{F}^2(\boldsymbol{z}), \tag{17}$$

其中 $\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}(\mathrm{i}, -\mathrm{i}, 0); \boldsymbol{z} = (z_1 \quad z_2 \quad z_3)^{\mathrm{T}}$ 以及 $z_2 = z_1$

方程(17) 的范式可以形式上表示为

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{A z} + \boldsymbol{G}^2(\boldsymbol{z}) + \boldsymbol{G}^3(\boldsymbol{z}) + \boldsymbol{G}^4(\boldsymbol{z})$$

根据方程(7) 得到

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= \mathrm{i} z_1 + a_{101} z_1 z_3 + a^1_{102} z_1 z_3^2 + a^1_{210} z_1^2 z_2 + a^2_{211} z_1^2 z_2 z_3 + a^2_{103} z_1 z_3^3, \\ z_3 &= c_{110} z_1 z_2 + c_{002} z_3^2 + c^1_{111} z_1 z_2 z_3 + c^1_{003} z_3^3 + c^2_{112} z_1 z_2 z_3^2 + c^2_{004} z_3^4 + c^2_{220} z_1^2 z_2^2 \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

其对应的范式系数可以从下面简单的迭代中得到:

$$\boldsymbol{F}_1^2 = \boldsymbol{F}^2 + \boldsymbol{A P}^2 - \boldsymbol{D P}^2 \boldsymbol{A z}; \quad \boldsymbol{F}_1^3 = \boldsymbol{F}^3 + \boldsymbol{D F}^2 \boldsymbol{P}^2 - \boldsymbol{D P}^2 \boldsymbol{F}_1^2;$$

$$\boldsymbol{F}_1^4 = \boldsymbol{F}^4 + \frac{1}{2} \boldsymbol{D}^2 \boldsymbol{F}^2 (\boldsymbol{P}^2)^2 + \boldsymbol{D F}^3 \boldsymbol{P}^2 - \boldsymbol{D P}^2 \boldsymbol{P}_1^3; \quad \boldsymbol{F}_2^4 = \boldsymbol{F}_1^4 + \boldsymbol{D F}_1^2 \boldsymbol{P}^3 - \boldsymbol{D P}^3 \boldsymbol{F}_1^2,$$

其中 $\boldsymbol{P}^2, \boldsymbol{P}^3$ 可以从方程(8) 中得到

借助于 MAPLE, 可以在 0 3 秒中求得这些系数 把 $z_1 = r e^{\mathrm{i}}, z_2 = r e^{-\mathrm{i}}, z_3 = y$ 代入方程(18) 得到其极坐标形式为:

$$\left.\begin{aligned} r &= r y + \frac{41}{36} r^3 y - \frac{17}{4} r y^3, \\ y &= - \frac{1}{2} r^2 - y^2 - \frac{271}{288} r^4 + \frac{9}{8} y^2 r^2 + 4 y^4, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

这个结果与文[6]的结果等价, 文[6]用的是 MACSYMA 软件 更进一步, 方程(17) 的前 6 阶范式为

$$\begin{aligned} r &= r y + \frac{41}{36} r^3 y - \frac{17}{4} r y^3 + \frac{3191}{48} r y^5 + \frac{235207}{41472} r^5 y - \frac{9995}{288} r^3 y 3, \\ &= 1 + \frac{3}{2} y^2 - \frac{1}{24} r^2 - \frac{69}{4} y^4 + \frac{2255}{864} r^2 y^2 + \frac{2639}{6912} r^4, \\ y &= - \frac{1}{2} r^2 - y^2 - \frac{271}{288} r^4 + \frac{9}{8} y^2 r^2 + 4 y^4 - \frac{770377}{165888} r^6 - 46 y^6 + \frac{493}{5184} y^2 r^4 + \frac{487}{32} y^4 r^2, \end{aligned} \tag{20}$$

用 PC266 计算机可以在 11 秒内求得这些系数

例 3　确定下面含 6 个参数的二维系统的范式及系数

$$\left.\begin{aligned} x &= - y + {}_1 x - {}_3 x^2 + (2 {}_2 + {}_5) xy + {}_6 y^2, \\ y &= x + {}_1 y + {}_2 x^2 + (2 {}_3 + {}_4) xy - {}_2 y^2 \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

把上面方程变换成复数坐标形式得到

$$z = \boldsymbol{A} z + \boldsymbol{F}^2(z),$$

其中

$$\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}(\mathrm{i}, -\mathrm{i}), \quad \boldsymbol{F}^2(x) = \begin{pmatrix} a_{20} z_1^2 + a_{11} z_1 z_2 + a_{02} z_2^2 \\ b_{20} z_1^2 + b_{11} z_1 z_2 + b_{02} z_2^2 \end{pmatrix},$$

$$a_{mn} = a_{mn}({}_1, {}_2, {}_3, {}_4, {}_5, {}_6)$$

把方程(21)变换成极坐标式得到

$$\begin{aligned} r &= a_1 r^3 + a_2 r^5 + a_3 r^7, \\ &= 1 + O(|r|^2) \end{aligned} \tag{22}$$

经过简单的迭代,可以求得上面方程的系数为

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= -\frac{1}{8} {}_5({}_3 - {}_6), \quad {}_1 = 0, \\ a_2 &= \frac{1}{48} {}_2 {}_4({}_3 - {}_6)[{}_4 + 5({}_3 - {}_6)], \quad {}_1 = {}_5 = 0, \\ a_3 &= \frac{25}{64} {}_2({}_3 - {}_6)^3({}_3 {}_6 - {}_2^2 - 2 {}_6^2), \quad {}_1 = {}_5 = 0, \quad {}_4 = -5({}_3 - {}_6), \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

这些结果与文[7]结果一致,文[7]用的是L_S理论 用PC266计算机,可以在2秒种内求得方程(23)中的系数

[参 考 文 献]

[1] Chow S N, Hale J K. Methods of Bifurcation Theory[M]. New York: Springer_Verlag, 1982.

[2] Arnold V I. Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations[M]. New York: Springer_Verlag, 1983.

[3] Chow S N, Li C Z, Wang D. Normal Forms and Bifurcation of Planar Vector Fields[M]. New York: Cambridge University Press, 1994.

[4] ZHANG Wei_yi, Huseyin K, CHEN Yu_shu. A new approach for obtaining normal form of nonlinear systems[J]. Journal of Sound &Vibration, 1998, (210): 609 625.

[5] ZHANG Wei_yi, Huseyin K, CHEN Yu_shu. On the analysis of certain high dimensional systems with inner resonances[J]. Journal of Sound &Vibration, 1998, (213): 739 756.

[6] Chow S N, Drachman B, Wang D. Computation of normal forms[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 1990, **29**(2): 129 143.

[7] Farr W W, Li C Z, Labouriau I S, Langford W F. Degenerate Hopf bifurcation formulas and Hilbert s 16th problem[J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 1988, **20**(1): 13 30.

[8] CHEN Yu_shu, Leund Andrew Y T. Bifurcation and Chaos in Engineering[M]. London: Springer_Verlag, 1998.

The Application of a Modified Normal Form Approach

ZHANG Wei_yi[1,2], Koncay Huseyin[2], YE Min[1]
(1 Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 300072, P R China;
2 Department of Systems Design Engineering, University of Waterloo,
Waterloo, Ontario N2L 3G1, Canada)

Abstract: The modified normal form approach presented by ZHANG Wei_yi, K Huseyin and CHEN Yu_shu is further extended and a different procedure is introduced which lends itself readily to symbolic calculations, like MAPLE. This provides a number of significant advantages over the previous approach, and facilitates the associated calculations. To illustrate the new approach, three examples are presented.

Key words: nonlinear dynamical system; modified normal form approach; symbolic calculations