应用数学和力学, 第 22 卷 第 7 期(2001 年 7 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2001) 07_0735_08

求解广义中立型系统的线性多步方法的 NGP$_G$_稳定性*

丛玉豪

(上海师范大学 数学科学学院, 上海 200234)

(程昌钧推荐)

摘要: 建立了广义中立型延迟系统理论解渐近稳定的充分条件, 分析了用线性多步方法求解广义中立型延迟系统数值解的稳定性, 在一定的 Lagrange 插值条件下, 证明了数值求解广义中立型系统的线性多步方法 NGP$_G$_稳定的充分必要条件是线性多步方法是 A _稳定的•

关 键 词: 广义中立型系统; 渐近稳定性; 线性多步方法; NGP$_G$_稳定性

中图分类号: O241.8 文献标识码: A

引 言

考察如下广义中立型系统:

$$\boldsymbol{y}'(t) = \boldsymbol{L}\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{M}\boldsymbol{y}(t\tau) + \boldsymbol{N}\boldsymbol{y}'(t\tau) \qquad (t \geqslant 0), \tag{1}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \phi(t) \qquad (t \leqslant 0), \tag{2}$$

其中, $\boldsymbol{L}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{N} \in \mathbf{C}^{d\times d}$ 为已知矩阵, $\phi(t) \in \mathbf{C}^d$ 为已知向量函数, $\boldsymbol{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \cdots, y_d(t))^{\mathrm{T}}$ 当 $t > 0$ 时为未知函数, $\boldsymbol{y}(t\tau) = (y_1(t-\tau_1), y_2(t-\tau_2), \cdots, y_d(t-\tau_d))^{\mathrm{T}}(0 < \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant \cdots \leqslant \tau_d)$ 为常数延时量•

对于 $t-\tau_i = t-\tau(i = 1, 2, \cdots, d)$, 1967 年, Brayton[1] 基于 $\boldsymbol{L}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}$ 为实对称矩阵, 以及 $\boldsymbol{I} \pm \boldsymbol{N}$ 和 $-\boldsymbol{L} \pm \boldsymbol{M}$ 为正定矩阵时, 讨论了(1) 渐近稳定的充分条件; 1984 年, Jackiewicz[2] 基于 $\boldsymbol{L}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}$ 为复系数时, 研究了理论解的渐近稳定性及单步方法的数值稳定性; 1988 年, Bellen, Jackiewicz 和 Zennaro[3] 基于 $\boldsymbol{L}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}$ 为复系数时, 讨论了隐式 Runge_Kutta(IRK) 方法的数值处理, 1994 年, Kuang, Xiang 和 Tian[4] 讨论了 θ_方法的数值稳定性; 1995 年, Hu 和 Mitsui[5] 讨论了 Runge_Kutta 方法的数值稳定性, 得到了显式 Runge_Kutta 方法的绝对稳定区域• 1996 年, Guangdi Hu 和 Guangda Hu[6] 研究了理论解的渐近解稳定性, 得到了一些判定准则, 1999 年, Qiu, Yang 和 Kuang[7] 讨论了 IRK 方法的渐近稳定性, 证明了 IRK 方法 NGP_稳定的充要条件是 A_稳定的; C J Zhang 和 S Z Zhou[8] 也研究了线性多步方法求解多重延迟量微分方程的数值稳

---

* 收稿日期: 2000_03_03; 修订日期: 2001_03_30
基金项目: 上海市教委青年科学基金资助项目(99QA80); 上海市科学技术发展基金资助项目(00JC14057)
作者简介: 丛玉豪(1965—), 男, 山东人, 博士, 副教授.

定性•

对于 $N=0$，1994 年，Koto[9] 证明了 A_ 稳定的 Runge_Kutta 方法是渐近稳定的；1997 年，In't Hout[10] 也对 $N=0$ 讨论 了 Runge_Kutta 方法的渐近稳定性，得到了一个比[9] 中结果更好的结论•

本文目的是考察广义中立型系统(1) 的渐近稳定性，以及用线性多步方法求解广义中立型系统的初值问题(1)～(2) 的数值稳定性• 我们将给出广义中立型系统(1) 渐近稳定的条件，证明线性多步方法 $\mathrm{NGP_G}$_稳定的充要条件是 A_ 稳定的•

1 理论解的渐近稳定性

为了求得广义系统(1) 的特征方程，观察其指数形式的解 $\boldsymbol{y}(t)=\mathrm{e}^{st}\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_d)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{C}^d$ 为待定向量• 于是，我们有

$$\boldsymbol{y}(t)=(\mathrm{e}^{st}x_1,\mathrm{e}^{st}x_2,\cdots,\mathrm{e}^{st}x_d)^{\mathrm{T}},\tag{3}$$

$$\boldsymbol{y}(t\tau)=(\mathrm{e}^{s(t-\tau_1)}x_1,\mathrm{e}^{s(t-\tau_2)}x_2,\cdots,\mathrm{e}^{s(t-\tau_d)}x_d)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{e}^{-s\mathrm{T}}\mathrm{e}^{st}\boldsymbol{x},\tag{4}$$

$$\boldsymbol{y}'(t)=s\mathrm{e}^{st}\boldsymbol{x},\tag{5}$$

$$\boldsymbol{y}'(t\tau)=s\boldsymbol{e}^{-s\mathrm{T}}\mathrm{e}^{st}\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{e}^{-s\mathrm{T}}=\mathrm{diag}\left\{\mathrm{e}^{-s\tau_1},\mathrm{e}^{-s\tau_2},\cdots,\mathrm{e}^{-s\tau_d}\right\},\tag{6}$$

代入(1) 得

$$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L}-\boldsymbol{M}\boldsymbol{e}^{-s\mathrm{T}}-s\boldsymbol{N}\boldsymbol{e}^{-s\mathrm{T}})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}•\tag{7}$$

为使得(1) 有非平凡的指数解，我们得如下特征方程:

$$\det\left\{s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L}-\boldsymbol{M}\boldsymbol{e}^{-s\mathrm{T}}-s\boldsymbol{N}\boldsymbol{e}^{-s\mathrm{T}}\right\}=\mathbf{0}•\tag{8}$$

其中，$\boldsymbol{e}^{-s\mathrm{T}}=\mathrm{diag}\left\{\mathrm{e}^{-s\tau_1},\mathrm{e}^{-s\tau_2},\cdots,\mathrm{e}^{-s\tau_d}\right\}$•

为了下面论证的需要，我们引进矩阵的对数范数•

定义 1.1 (见[11]) 对于任一复矩阵 $\boldsymbol{W}\in\mathbf{C}^{d\times d}$，其对数范数 $\mu(\boldsymbol{W})$ 定义为

$$\mu(\boldsymbol{W})=\lim_{\Delta\to 0^+}(\|\boldsymbol{I}+\Delta\boldsymbol{W}\|-1)/\Delta•\tag{9}$$

$\mu(\boldsymbol{W})$ 严格地依赖于所选用的矩阵范数，我们用 $\mu_p(\boldsymbol{W})$ 表示(9) 式中用的是 p_范数，$p=1,2,\infty$•

下面的引理 1.1 及引理 1.2 能在[11] 中找到•

引理 1.1 $\boldsymbol{W}$ 的每个特征值 $\lambda_i(\boldsymbol{W})\,(i=1,2,\cdots,d)$ 满足

$$-\mu_p(-\boldsymbol{W})\leqslant\mathrm{Re}(\lambda_i(\boldsymbol{W}))\leqslant\mu_p(\boldsymbol{W})\qquad(i=1,2,\cdots,d)•\tag{10}$$

引理 1.2 对数范数 $\mu_p(\boldsymbol{W})$ 满足

$$\mu_p(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant\mu_p(\boldsymbol{A})+\mu_p(\boldsymbol{B}),\tag{11}$$

$$\mu_p(\boldsymbol{A})\leqslant\|\boldsymbol{A}\|_p,\tag{12}$$

$$\begin{cases}\mu_1(\boldsymbol{W})=\max\limits_k\left\{\mathrm{Re}(w_{kk})+\sum\limits_{i,i\neq k}|w_{ik}|\right\},\\[2ex] \mu_2(\boldsymbol{W})=\dfrac{1}{2}\lambda_{\max}(\boldsymbol{W}+\boldsymbol{W}^*),\\[2ex] \mu_\infty(\boldsymbol{W})=\max\limits_i\left\{\mathrm{Re}(w_{ii}+\sum\limits_{k,k\neq i}|w_{ik}|\right\}•\end{cases}\tag{13}$$

令

$$P(s,\boldsymbol{Z})=\det\left\{s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L}-(\boldsymbol{M}+s\boldsymbol{N})\boldsymbol{Z}\right\},$$

为参数 s 的函数，其中 $\boldsymbol{Z}=\mathrm{diag}\left\{z_1,z_2,\cdots,z_d\right\}$ 为对角阵• 显然

$$P(s, \boldsymbol{e}^{-s\mathrm{T}}) = \mathbf{0} \tag{14}$$

便是(1)的特征方程•

定义 1.2 广义中立型系统(1)称为渐近稳定的,倘使其任一解 $\boldsymbol{y}(t)$ 满足

$$\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{y}(t) = \mathbf{0}• \tag{15}$$

为了今后的证明,需要如下矩阵特征值的解析扰动定理•

定理 1.1 (见[12]),设 $\boldsymbol{A}(\zeta)$ 是 $\boldsymbol{A}(0)$ 的扰动矩阵, $\boldsymbol{A}(\zeta)$ 的每个元素是 ζ 的解析函数•则

a) 若 λ_i 是 $\boldsymbol{A}(0)$ 的单重特征值, $\lambda_i(\zeta)$ 是 $\boldsymbol{A}(\zeta)$ 的一个特征值, $\lambda_i(\zeta)\to\lambda_i(\zeta\to 0)$• 于是, $\lambda_i(\zeta)$ 是 $\zeta = 0$ 的某邻域内的解析函数,即

$$\lambda_i(\zeta) = \lambda_i(0) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\zeta^n• \tag{16}$$

b) 若 λ_j 是 $\boldsymbol{A}(0)$ 的 m 重特征值, $\lambda_k(\zeta)$ 是 $\boldsymbol{A}(\zeta)$ 的特征根, $\lambda_k(\zeta)\to\lambda_j(\zeta\to 0)$, $k = j_1, j_2, \cdots, j_m$• 于是, $\lambda_k(\zeta)$ 是 $\sqrt[l]{\zeta}$ 的解析函数,这里 $l \leqslant m$, $\sqrt[l]{\zeta}$ 是多值函数 $\zeta^{1/l}$ 的某分支之一• 此时

$$\lambda_k(\zeta) = \lambda_j(0) + \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,k}(\sqrt[l]{\zeta})^n• \tag{17}$$

考虑如下陈述:

$$\text{a)}\begin{cases}\|\boldsymbol{N}\| < 1,\\ \dfrac{1}{2}\lambda_{\max}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}^*) + \|\boldsymbol{M}\| + \dfrac{\|\boldsymbol{N}\|(\|\boldsymbol{L}\| + \|\boldsymbol{M}\|)}{1 - \|\boldsymbol{N}\|} < 0;\end{cases}$$

$$\text{b)}\begin{cases}\rho(\boldsymbol{N}\xi) < 1,\ \forall\xi,\ \|\xi\| \leqslant 1,\\ \mathrm{Re}\left\{\lambda_i[(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{N}\xi)^{-1}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{M}\xi)]\right\} < 0 \qquad (\forall\xi,\ \|\xi\| \leqslant 1),\end{cases}$$

c) $P(s, \boldsymbol{e}^{-s\mathrm{T}}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathrm{Re}(s) \leqslant -r < 0$;

d) 中立型系统(1)是渐近稳定的•

上列陈述中出现的矩阵范数表示谱范数,而

$$\lambda_{\max}(\boldsymbol{A}) = \max\{\lambda: \lambda \in \sigma[\boldsymbol{A}]\},$$

$$\xi = \mathrm{diag}\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_d\}$$

为对角矩阵•

定理 1.2 对于上面的四个陈述有如下关系:

a) ⇒b) ⇒c) ⇒d)•

证明 由 b) 中的第一个条件知

$$P(s, \xi) = \det\{s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{L} - (\boldsymbol{M} + s\boldsymbol{N})\xi\} = \det\{\boldsymbol{I} - \boldsymbol{N}\xi\}\det\{s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{N}\xi)^{-1}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{M}\xi)\},$$

从而

$$P(s, \xi) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \det\{s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{N}\xi)^{-1}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{M}\xi)\} = 0•$$

如果 c) 中有一个零点 s_0, 即 $P(s_0, \boldsymbol{e}^{-s_0\mathrm{T}}) = 0$, 使得 $\mathrm{Re}(s_0) \geqslant 0$, 令 $\xi_0 = \boldsymbol{e}^{-s_0\mathrm{T}}$, 有 $\|\xi_0\| \leqslant 1$, 则 $P(s_0, \xi_0) = 0$, 但这与 b) 中第二个条件是违背的, 从而

$$P(s, \boldsymbol{e}^{-s\mathrm{T}}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathrm{Re}(s) < 0• \tag{18}$$

又

$$P(s, \xi) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \det\{s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{I} - \boldsymbol{N}\xi)^{-1}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{M}\xi)\} = 0,$$

从定理 1.1 可以看出方程 $P(s, \xi) = 0$ 之零点 s 是 ξ 的连续函数, 即 $s = s(\xi)$ 于紧集上连续,

从而 $\mathrm{Re}(s(\xi))$ 在该紧集上达到最大值

$$\max_i \max_{\|\xi\|\leqslant 1} \mathrm{Re}(s_i(\xi)) = -\delta < 0. \tag{19}$$

利用获得(19)式的同样理由，对于充分小的 $\varepsilon > 0$，有

$$\max_i \max_{\|\xi\|\leqslant 1+\varepsilon} \mathrm{Re}(s_i(\xi)) = -\delta_1 < 0. \tag{20}$$

这里 $\delta_1 < \delta$. 又若

$$\sup\left\{\mathrm{Re}(s): P(s, \boldsymbol{e}^{-s\mathrm{T}}) = 0\right\} = 0,$$

于是存在序列 $\left\{s_n\right\}$, $P(s_n, \boldsymbol{e}^{-s_n\mathrm{T}}) = \mathbf{0}$ 且

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(s_n) = 0. \tag{21}$$

从(21)式，对于充分小的正数 $\delta_2 < \delta_1$，必然存在自然数 N 使得

$$\|\boldsymbol{e}^{-s_N\mathrm{T}}\| \leqslant 1+\varepsilon, \quad |\mathrm{Re}(s_N)| < \delta_2.$$

令 $\xi = \boldsymbol{e}^{-s_N\mathrm{T}}$，那么 $\|\xi\| \leqslant 1+\varepsilon$，即得

$$\mathrm{Re}(s_N(\xi)) > -\delta_2 > -\delta_1,$$

但这是与(20)式违背的. 至此我们完成了 b) ⇒c) 之证明.

再设 a) 成立，由 a) 中第一个条件推出

$$\rho(\boldsymbol{N}\xi) < 1 \qquad (\forall \|\xi\| \leqslant 1).$$

令 $\boldsymbol{Q}(\xi) = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{N}\xi)^{-1}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{M}\xi)$, $\|\xi\| \leqslant 1$. 利用引理1.1及引理1.2中的(11)、(12)、(13)得

$$\mathrm{Re}\,\lambda_i(Q(\xi)) \leqslant \mu[(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{N}\xi)^{-1}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{M}\xi)].$$

令 $\boldsymbol{N}\xi = \boldsymbol{T}$，得

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,\lambda_i(Q(\xi)) &\leqslant \mu[(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{T} + \boldsymbol{T}^2 + \cdots)(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{M}\xi)] = \\ &\mu\left\{(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{M}\xi) + (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{T} + \boldsymbol{T}^2 + \cdots)(\boldsymbol{TL} + \boldsymbol{TM}\xi)\right\} \leqslant \\ &\mu(\boldsymbol{L}) + \|\boldsymbol{M}\| + (1 + \|\boldsymbol{T}\| + \|\boldsymbol{T}\|^2 + \cdots)(\|\boldsymbol{TL}\| + \|\boldsymbol{TM}\|) \leqslant \\ &\mu(\boldsymbol{L}) + \|\boldsymbol{M}\| + \frac{\|\boldsymbol{N}\|(\|\boldsymbol{L}\| + \|\boldsymbol{M}\|)}{1 - \|\boldsymbol{N}\|} < 0.\end{aligned}$$

由此证明了 a) ⇒b).

至于 c) ⇒d) 可参阅文献[4]. 这就完成了定理1.2的证明.

2 线性多步方法的 $\mathrm{NGP_G}$-稳定性

考察线性多步方法

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = h\sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j}, \tag{22}$$

这里 $\alpha_j, \beta_j\ (j = 0, 1, 2, \cdots, k)$ 为常系数，且 $\alpha_0^2 + \beta_0^2 \neq 0$. 将线性多步方法用于线性常微分方程

$$\boldsymbol{y}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(t), \tag{23}$$

这里 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{d\times d}$ 是常矩阵，$\boldsymbol{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \cdots, y_d(t))^{\mathrm{T}}$ 是未知向量函数，我们有

$$\sum_{j=0}^{k}(\alpha_j \boldsymbol{I} - h\beta_j \boldsymbol{A})\boldsymbol{y}_{n+j} = 0.$$

令

$$Q(z) = \rho(z)\boldsymbol{I} - h\sigma(z)\boldsymbol{A},$$

其中

$$\rho(z)=\sum_{j=0}^{k}\alpha_j z^j,\quad \sigma(z)=\sum_{j=0}^{k}\beta_j z^j.$$

显然，我们有

引理 2.1 线性多步方法是 A_稳定的当且仅当对任意满足 $\lambda\in\sigma(hA)$, $\mathrm{Re}(\lambda)<0$ 以及 $|z|\geqslant 1$ 的 $\rho(z)\boldsymbol{I}-h\sigma(z)\boldsymbol{A}$ 是非奇异的. 这里 $\sigma(\boldsymbol{X})$ 表示矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的谱.

用线性多步方法(22)求解(1)、(2)，有

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j[\boldsymbol{y}_{n+j}-\boldsymbol{N}\boldsymbol{y}_{n+j-m(\tau)}]=h\sum_{j=0}^{k}\beta_j[\boldsymbol{L}\boldsymbol{y}_{n+j}+\boldsymbol{M}\boldsymbol{y}_{n+j-m(\tau)}],\tag{24}$$

其中对每个 i, $\delta_i\in[0,1)$ 表示实数，由 $\delta_i=m_i-\tau_i/h$ 给出，m_i 为正整数且 $m_i\geqslant r+1$，而近似值 $y_{n+j-m(\tau)}$ 由 Lagrange 插值得到，即

$$\boldsymbol{y}_{n+j-m(\tau)}=\Big(\sum_{p_1=-q}^{r}L_{p_1}(\delta_1)y^{(1)}_{n+j-m_1+p_1},\ \cdots,\ \sum_{p_d=-q}^{r}L_{p_d}(\delta_d)y^{(d)}_{n+j-m_d+p_d}\Big)^{\mathrm{T}}$$

对 $j=1,2,\cdots,k$，上标(l)表示向量的第 l 个分量，并且

$$L_p(\delta)=\prod_{k=-q,\,k\neq p}\frac{\delta-k}{p-k}.$$

假定(24)具有如下形式的解:

$$\boldsymbol{y}_{n+j}=z^{n+j}\boldsymbol{X},$$

其中 z 是复变量，$\boldsymbol{X}$ 是复 d_维向量:

$$\boldsymbol{X}=(\xi^{(1)},\xi^{(2)},\cdots,\xi^{(d)}).$$

此时

$$\boldsymbol{y}_{n+j-m(\tau)}=\Big(\sum_{p_1=-q}^{r}L_{p_1}(\delta_1)z^{n+j-m_1+p_1}\xi^{(1)},\ \cdots,\ \sum_{p_d=-q}^{r}L_{p_d}(\delta_d)z^{n+j-m_d+p_d}\xi^{(d)}\Big)^{\mathrm{T}}.$$

令

$$\boldsymbol{T}(z)=\mathrm{diag}\Big(\sum_{p_1=-q}^{r}L_{p_1}(\delta_1)z^{-m_1+p_1},\ \cdots,\ \sum_{p_d=-q}^{r}L_{p_d}(\delta_d)z^{-m_d+p_d}\Big),$$

则有

$$\boldsymbol{y}_{n+j-m(\tau)}=z^{n+j}\boldsymbol{T}\boldsymbol{X}.$$

将上式代入(24)得

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j[z^{n+j}\boldsymbol{X}-\boldsymbol{N}z^{n+j}\boldsymbol{T}(z)\boldsymbol{X}]=h\sum_{j=0}^{k}\beta_j[\boldsymbol{L}z^{n+j}+\boldsymbol{M}z^{n+j}\boldsymbol{T}(z)\boldsymbol{X}].$$

整理得

$$\sum_{j=0}^{k}[\alpha_j(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{N}\boldsymbol{T}(z))-\beta_j(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{M}\boldsymbol{T}(z))]z^{n+j}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0},\tag{25}$$

其中 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}h$, $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}h$，如果 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{N}\boldsymbol{T}(z)$ 是非奇异的，(25) 可写成

$$\sum_{j=0}^{k}[\alpha_j\boldsymbol{I}-\beta_j(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{N}\boldsymbol{T})^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{M}\boldsymbol{T}(z))]z^{n+j}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}.\tag{26}$$

若 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$，得特征方程:

$$\det\Big(\sum_{j=0}^{k}[\alpha_j\boldsymbol{I}-\beta_j(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{N}\boldsymbol{T}(z))^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{M}\boldsymbol{T}(z))]\Big)=0.\tag{27}$$

令

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{N}\boldsymbol{T}(z))^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{M}\boldsymbol{T}(z)),$$

(27)写为

$$\det(\rho(z)\boldsymbol{I}-\sigma(z)\boldsymbol{B})=0. \tag{28}$$

定义 2.1 设广义中立型系统(1)(2)满足条件 b),一数值方法称为 NP_G_稳定,如果数值解 $\{\boldsymbol{y}_n\}$ 满足:对任意 $h>0$, $m_i h=\tau_i$, $m_i\geqslant 1$ 是正整数,有

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{y}_n=\boldsymbol{0}$$

然而条件 $m_i h=\tau_i$ 在实际计算中不一定成立. 为此,需引进

定义 2.2 设广义中立型系统(1)、(2)满足条件 b),一数值方法称为 NGP_G_稳定,如果数值解 $\{\boldsymbol{y}_n\}$ 满足:对任意 $h>0$ 有

$$\lim_{n\to\infty}y_n=0.$$

为了分析用线性多步方法求解广义中立型系统的数值稳定性,引进多项式

$$\gamma(z,\delta_i)=\sum_{p=-q}^{r}L_p(\delta_i)z^{p+q}.$$

考察条件

$$|\gamma(z,\delta_i)|\leqslant 1 \qquad (\text{当}\ |z|=1,\ 0\leqslant\delta_i<1). \tag{29}$$

据 Strang[13], Iserles 和 Strang[14] 有

引理 2.1 i)(29)成立的充分必要条件是关系式 $q\leqslant r\leqslant q+2$, $|z|=1$ 和 $0\leqslant\delta_i<1$ 成立; ii)如果 $q+r>0$, $q\leqslant r\leqslant q+2$, $|z|=1$, $0<\delta_i<1$ 成立,则 $|\gamma(z,\delta_i)|=1$ 成立的充分必要条件是 $z=1$.

定理 2.1 设条件 b)成立,且 $q\leqslant r\leqslant q+2$, 那么求解广义中立型系统(1)、(2)的线性多步方法是 NGP_G_稳定的充分必要条件是线性多步方法是 A_稳定的.

证明 设线性多步方法是 A_稳定的,为了证明(22)是 $\mathrm{NGP_G}$_稳定的,我们必须证明对任意的 $\delta_i\in[0,1)$, $i=1,2,\dots,d$, 特征方程(28)的根满足 $|z|<1$.

事实上,设特征方程(28)的某个根 z 对任意 $\delta_i\in[0,1)$, $(i=1,2,\dots,d)$ 有 $|z|\geqslant 1$. 首先,我们证明对任意 $|z|\geqslant 1$.

$$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{NT}$$

是非奇异的.

令

$$R(z,\delta_i)=\sum_{p=-q}^{r}L_p(\delta_i)z^{p-m_i}=\gamma(z,\delta_i)z^{-(m_i+q)}.$$

若 z 在单位圆上,由引理 2.1 知 $|R(z,\delta_i)|\leqslant 1(\delta_i\in[0,1))$; 当 $|z|=\infty$ 时有 $|R(\infty,\delta_i)|=0(m_i\geqslant r+1)$. 因此由最大模原理知,当 $|z|\geqslant 1$, $\delta_i\in[0,1)$ 时有 $|R(z,\delta_i)|\leqslant 1$

利用上式得

$$\|\boldsymbol{T}\|=\left\|\mathrm{diag}\left(\sum_{p_1=-q}^{r}L_{p_1}(\delta_1)z^{-m_1+p_1},\ \dots,\ \sum_{p_d=-q}^{r}L_{p_d}(\delta_d)z^{-m_d+p_d}\right)\right\|\leqslant 1. \tag{30}$$

所以当 $\|\boldsymbol{N}\|<1$ 时,对 $|z|\geqslant 1$ 和 $\delta_i\in[0,1)$ 有 $\rho(\boldsymbol{NT})<1$, 即对 $|z|\geqslant 1$ 和 $\delta_i\in[0,1)$ $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{NT}$ 是非奇异的.

如果 $|z|\geqslant 1$ 满足

$$\det\left\{\sum_{j=0}^{k}[\alpha_j(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{NT}(z))-\beta_j(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{MT}(z))]z^j\right\}=$$

$$\det\left\{\rho(z)\boldsymbol{I}-\sigma(z)\boldsymbol{B}\right\}\times\det[(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{N}\boldsymbol{T}(z))^{-1}]=0,$$

其中 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{N}\boldsymbol{T}(z))^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{M}\boldsymbol{T}(z))$• 此时有

$$\det\left\{\rho(z)\boldsymbol{I}-\sigma(z\boldsymbol{B}\right\}=0,$$

即 $\rho(z)\boldsymbol{I}-\sigma(z)\boldsymbol{B}$ 是奇异的• 由条件 b) 和 $\|\boldsymbol{T}\|\leqslant 1$ 知 $\boldsymbol{B}$ 的特征值满足

$$\mathrm{Re}(\lambda_i(\boldsymbol{B}(z)))<0\quad(\delta_i\in[0,1);\ i=1,2,\cdots,d)•$$

由线性多步方法(22)是 A_稳定的假设以及不等式 $\mathrm{Re}(\lambda_i(\boldsymbol{B}(z)))<0$ 和 $|z|\geqslant 1$, 我们有

$$\det(\rho(z)\boldsymbol{I}-\sigma(z)\boldsymbol{B})\neq 0•$$

这与 $\rho(z)\boldsymbol{I}-\sigma(z)\boldsymbol{B}$ 是奇异的矛盾• 至此完成了充分性的证明•

反之, 由线性多步方法的 NGP_G_稳定性导出它对常微分方程来说是 A_稳定的, 这是显然的事•

至此, 我们完成了定理 2.1 的证明•

注记: 延时微分方程在许多实际问题中出现, 如: 控制论、种群的繁殖、人口的增长、环境科学、电力网络、生物学、生态学等• 一般说来, 常见的延时微分方程中, 只有极少数能够获得理论解的解析表达式, 因此, 对这类微分方程的数值处理就显得十分必要•

[参 考 文 献]

[1] Brayton R K, Willoughby R A. On the numerical intergration of a symmetric system of a difference_differential equations[J]. J Math Anal Appl, 1967, **18**(1): 182—189.

[2] Jackiewicz Z. One_step methods of any order for neutral functional differential equations[J]. SIAM J Numer Anal, 1984, **21**(3): 486—511.

[3] Bellen A, Jackiewicz Z, Zennaro M. Stability analysis of one_step methods for neutral delay_differential equations[J]. Numer Math, 1988, **52**(3): 605—619.

[4] KUANG Jiao_xun, XIANG Jia_xiang, TIAN Hong_jun. The asymptotic stability of one_parameter methods for neutral differential equations[J]. BIT, 1994, **34**(3): 400—408.

[5] HU Guang_da, Mitsui T. Stability of numerical methods for systems of neutral delay differential equations[J]. BIT, 1995, **35**(4): 504—515.

[6] HU Guang_di, HU Guang_da. Some simple criteria for stability of neutral delay_differential system [J]. Appl Math Compu, 1996, **80**(2_3): 257—271.

[7] QIU Lin, YANG Biao, KUANG Jiao_xun. The NGP_stability of Runge_Kutta methods for systems of neutral delay differential equations[J]. Numer Math, 1999, **81**(3): 451—459.

[8] ZHANG Cheng_jiang, ZHOU Shu_zi. Stability analysis of LMMs for systems neutral multidelay_differential equations[J]. J Computers and Mathematics With Application, 1999, **38**(1): 113—117.

[9] Koto T. A stability property of A_stable natural Runge_Kutta methods for systems of delay differential equations[J]. BIT, 1994, **34**(2): 262—267.

[10] In' t Hout K J. Stability analysis of Runge_Kutta methods for systems of delay differential equations [J]. IMA J Numer Anal. 1997, **17**(1): 17—27.

[11] Desoer A, Vidyasagas M. Feedback Systems: Input_Output Properties[M]. New York: Academic Press, 1975.

[12] Lancaster P, Tismenetsky M. The Theory of Matrices[M]. Orland, Florida: Academic press, 1985.

[13] Strang G. Trigonometric polynomials and difference methods of maximum accuracy[J]. J Math Phys, 1962, **41**(1): 147—154.

[14] Iserles A, Strang G. The optimal accuracy of difference schemes[J]. Trans Amer Math Soc, 1983, **277**(2): 299—303.

[15] Barwell V K. Special stability problem for functional differential equations[J]. BIT, 1975, **15**(2): 130—135.

[16] LIU Ming_zhu, Spijker M N. The stability of θ_methods in the numerical solution[J]. IMA Numer Anal, 1990, **10**(1): 31—48.

[17] In't Hout K J. A new interpolation procedure for adapting Runge_Kutta methods for delay differential equations[J]. BIT, 1992, **32**(4): 634—649.

[18] YANG Biao, QIU Lin, T Mitsui. GP_G_stability of Runge_Kutta methods for generalized delay differential systems[J]. J Computers and Mathematics With Application, 1999, **37**(1): 89—97.

[19] HU Guang_da, HU Guang_di. Stability of neutral delay_differential systems: boundary criteria[J]. Appl Math Compu[J]. 1997, **87**(2_3): 247—259.

[20] ZHANG Cheng_jian, ZHOU Shu_zi. The asymptotic stability of theoretical and numerical solutions for systems of neutral multidelay_differential equations[J]. Science in China. 1998, **41**(11): 1153—1157.

NGP_G_Stability of Linear Multistep Methods for Systems of Generalized Neutral Delay Differential Equations

CONG Yu_hao

(Department of Mathematics, Shanghai Normal University, Shanghai 200234, P R China)

Abstract: The stability analysis of linear multistep methods for the numerical solutions of the systems of generalized neutral delay differential equations is discussed. The stability behaviour of linear multistep methods was analysed for the solution of the generalized system of linear neutral test equations. After the establishment of a sufficient condition for asymptotic stability of the solutions of the generalized system, it is shown that a linear multistep method is NGP_G_stable if and only if it is A_stable.

Key words: generalized neutral delay differential system; asymptotic stability; linear multistep methods; NGP_G_stability