文章编号: 1000_0887(2001) 07_0743_06

非线性问题的参数迭代求解法

林建国

(大连海事大学 环境科学与工程学院, 大连 116026)

(戴世强、钟万勰推荐)

摘要: 提出一种对非线性问题的参数迭代求解法, 算例表明, 其一次迭代解便有很好的精度

关 键 词: 非线性; 参数迭代; 近似解

中图分类号: O241 81; O322 文献标识码: A

引 言

对于非线性问题的求解, 目前有较多的近似方法, 如各种摄动法可以解决许多弱非线性问题, 文[1] 提出的插值摄动法的精度对某些问题, 比多尺度法要好 本文提出一种新的方法, 将迭代的初始函数设为常数, 通过由此引入的参数, 在尽可能保留原微分方程特征的前提下, 将非线性项化为可积分的形式, 得到近似的一次迭代解, 将此一次迭代解代入原微分方程, 得到方程的余量, 再通过各种方法, 减小某一点或某一段区域的余量, 由此得到参数 本文求解了文[1] 的全部三个算例, 结果表明, 由本文方法得到的一次迭代解就有很高的精度

1 问 题

例 1 考虑圆球在粘性流体中的下落运动, 其无量纲方程为:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(t) + V(t)^2 = 1, \quad V(0) = 0 \tag{1}$$

将上式中的非线性项线性化, 为保留其基本特征, 令:

$$V(t) = W(t) + C, \tag{2}$$

其中, C 为待定参数, 由此, 使(1) 式变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}W(t) + W(t)^2 + 2W(t)C + C^2 = 1, \quad W(0) = -C \tag{3}$$

对(3) 式进行如下的局部线性化的迭代求解:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}W_i(t) + W_i(t)(W_{i-1}(t) + 2C) + C^2 = 1, \quad W_i(0) = -C \quad (i = 1, 2, \dots) \tag{4}$$

(4) 式的解为

$$W_i(t) = (\exp(-P_i(t)))\left[\int_0^t (1 - C^2)\exp(P_i(\tau))\,\mathrm{d}\tau - C\right], \tag{5}$$

其中:

收稿日期: 1999_12_12; 修订日期: 2000_11_26

作者简介: 林建国(1960) , 男, 大连人, 教授, 博士.

$$P_i(t) = \Big[\ {}_0^{t}(2C + W_{i-1}(\ ))\mathrm{d} \tag{6}$$

余量定义为:

$$R_i(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V_i(t) + V_i(t)^2 - 1 \tag{7}$$

取初始解为常数:

$$W_0(t) = C_0, \tag{8}$$

其中 C_0 是待定参数, 由(5)、(6)、(8) 式, 可得到一次迭代解为:

$$W_1(t) = -\frac{C^2 - 1 + (CC_0 + C^2 + 1)\exp(- t(2(C + C_0))}{2C + C_0} \tag{9}$$

接下来, 通过最小二乘法确定参数 C 和 C_0, 将上式代入(2)(7) 式, 得到一次迭代解的余量为:

$$R_1(t, C, C_0) = B_3\exp(- 2t(2C + C_0)) + B_2\exp(- t(2C + C_0)) + B_1, \tag{10}$$

其中:

$$B1 = \frac{(C^2 - 1)((C + C_0)^2 - 1)}{(2C + C_0)2}, \tag{11}$$

$$B_2 = \frac{(CC_0 + C^2 + 1)(C_0^2 + 2CC_0 + 2C^2 - 2)}{(2C + C_0)^2}, \tag{12}$$

$$B_3 = \frac{(C^2 + CC_0 + 1)^2}{(2C + C_0)^2} \tag{13}$$

令:

$$(C, C_0) = \lim_{A} \ {}_0^{A} R(t, C, C_0)^2\mathrm{d}t \tag{14}$$

将(10) 式代入上式, 在 $2C + C_0 > 0$ 的前提下, 可得:

$$(C, C_0) = B_1^2A + \frac{12B_1(B_3 + 2B_2) + 8B_2B_3 + 3B_3^2 + 6B_2^2}{12(2C + C_0)} \tag{15}$$

当 A , 要求 有界, 则必须有:

$$B_1 = 0 \tag{16}$$

故, (15) 式变为:

$$(C, C_0) = \frac{8B_2B_3 + 3B_3^2 + 6B_2^2}{12(2C + C_0)} \tag{17}$$

由(11)、(16) 式得到 C, 代入(12), (13), (17) 式, 由最小二乘法$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}C_0} \quad = 0$确定 C_0, 经过推导, 得到一组合理的解为:

$$C_0 = \frac{\sqrt{66}}{6} - 2, \quad C = 1 \tag{18}$$

至此, 由(18)、(9)、(5)、(2) 式, 可得到一次及二次迭代解为:

$$V_1(t) = 1 - \exp\left(- \frac{\sqrt{66}}{6}t\right), \tag{19}$$

$$V_2(t) = 1 - \exp\left[- \left(2t + \frac{\sqrt{66}}{11}\exp\left(- \frac{\sqrt{66}}{6}t\right) - \frac{\sqrt{66}}{11}\right)\right] \tag{20}$$

文[1] 得到的近似解为:

$$V_y(t) = \sqrt{\frac{2t^2}{2+ \quad t^2}}, \tag{21}$$

本问题的精确解为

$$C_e(t) = \frac{1- \exp(- 2t)}{1+ \exp(- 2t)} \tag{22}$$

图1、图2为本文解、文[1]解与精确解的比较 从中可见, 本文一次迭代解的精度, 除了在初始一小段比文[1]解稍差外, 其余区间的精度均比文[1]解要好得多, 尤其在大时间段, 一次迭代解趋近精确解, 而文[1]解偏离很大, 本文二次迭代解的精度更好, 说明本文方法是非常有效的 如果用直接迭代法, 将非线性项放在方程的右边, 只能得到时间 t 的级数解, 其只能适用于初始的小时间段

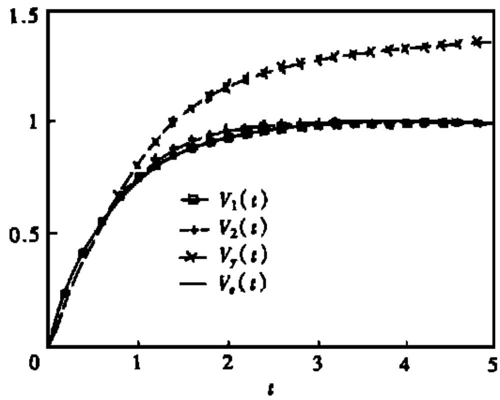

图 1

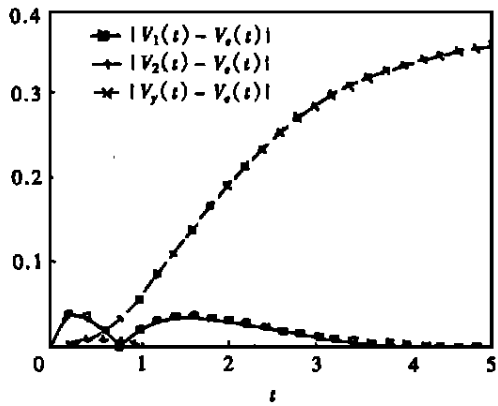

图 2

例2 求解下例边值问题:

$$x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}U(x) + \quad U(x) + \quad U(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}U(x) = 0, \qquad U(1) = 1 \tag{23}$$

设:

$$U(x) = C + W(x), \tag{24}$$

则(23)式变为:

$$(x + \quad W(x) + \quad C) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}U(x) + W(x) + C = 0, \qquad W(1) = 1 - C \tag{25}$$

(25)式的迭代方程为:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}W_i(x) + f(x)W_i(x) = - Cf(x), \qquad W_i(1) = 1 - C, \tag{26}$$

其中 $f(x) = 1/(x + \quad W_{i-1}(x) + \quad C)$, 要求: $x + \quad W_{i-1}(x) + \quad C \quad 0$ (26)式的解为:

$$W_i(x) = (\exp(- P_i(x))\left[\int_1^x \frac{- C\exp(P_i(\ ))}{\ + \quad W_{i-1}(\ ) + \quad C}\mathrm{d}\ + 1 - C\right], \tag{27}$$

其中:

$$P_i(x) = \int_1^x \frac{1}{\ + \quad W_{i-1}(\ ) + \quad C}\mathrm{d} \tag{28}$$

余量定义为:

$$R_i(x) = x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}U_i(x) + U_i(x) + \quad U_i(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}U_i(x) \tag{29}$$

同样, 初始解设为: $W_0(x) = C_0$, 由(27)式不难得到一次迭代解为:

$$W_1(x) = \frac{1+ \quad C+ \quad C_0}{x+ \quad C+ \quad C_0}\left(\frac{(1- \ x)C}{1+ \quad C+ \quad C_0} + 1- \ C\right) \tag{30}$$

将上式代入原方程(24)、(29)式, 得到其余量为:

$$R(x, C, C_0) = \frac{(C_1+1)(C_1 x+ \quad C_1(C_1-1)-1)}{(C_1+x)^3}, \tag{31}$$

其中 $C1 = C + C_0$ 为简单, 令:

$$C = 0 \tag{32}$$

以及令余量的平均值为零, 即:

$${}^{1}_{0}R(x, 0, C_0)\,\mathrm{d}x = 0, \tag{33}$$

可得:

$$C_0 = \frac{+ \sqrt{2 + \ ^2}}{2} \tag{34}$$

将(30)、(32)、(34)代入(23), 可得本文的一次迭代解为:

$$U(x) = \frac{2+ \quad + \sqrt{2 + \ ^2}}{2x+ \quad + \sqrt{2 + \ ^2}} \tag{35}$$

文[1]的插值摄动解为:

$$U_I(x) = 1+ \sqrt{\frac{2}{}}\left(a\tan\sqrt{\frac{2}{}} - a\tan\left(\frac{2}{}x\right)\right) \tag{36}$$

文[1]的多尺度摄动解为:

$$U_M(x) = \frac{1}{x} + \frac{}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) \tag{37}$$

本问题的精确解[2]:

$$U_e(x) = \frac{1}{}\left(\sqrt{x^2 + 2 + \ ^2} - x\right) \tag{38}$$

图 3(= 0 1)、图 4(= 1) 为结果比较, 可见, 无论 的值如何, 本文解远比文[1] 插值摄动解为好, 多尺度摄动解因为在 $x = 0$ 处有奇性, 不易在图中表示, 数值结果表明, 其精度最差

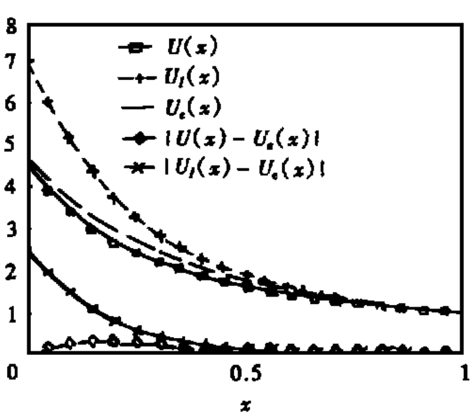

图　3

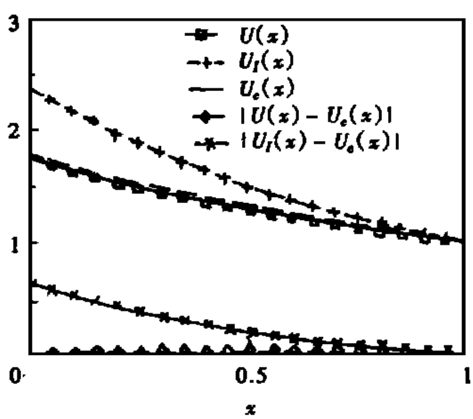

图　4

例 3　考虑如下的二阶初始问题:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}U(t) - U(t) + U(t)^4 = 0, \quad U(0) = 1, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U(0) = b, \tag{39}$$

不难得到其精确解为:

$$\int_0^U \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{b^2 + u^2 - 1 - \frac{2}{5}(u^5 - 1)}} = t(U) \tag{40}$$

要想由上式得到 $U(t)$ 的解析表达式是十分困难的, 只能通过数值计算得到 下面, 我们对 (39) 式求近似解 对其积分一次, 可得:

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U(t)\right)^2 = U(t)^2 - \frac{2}{5}U(t)^5 + C, \tag{41}$$

其中, C 为积分常数 (41) 式的一次迭代解方程可近似为:

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U(t)\right)^2 = C_1U(t)^2 + C, \tag{42}$$

其中:

$$C_1 = 1 - \frac{2}{5}C_0^3, \tag{43}$$

C_0 为 $U(t)$ 的初始迭代值, 假设: $C_1 > 0$, 则(42) 的解为:

$$U(t) = \frac{C_2^2\exp(2\sqrt{C_1}t) - C}{2C_2\sqrt{C_1}\exp(\sqrt{C_1}t)}, \tag{44}$$

积分常数 C、C_2 由(39) 式中的初始条件得到如下:

表 1

= 0 1				= 1			
t	精解	本文	文[1]	精解	本文	文[1]	文[3]
0 0	1 000 0	1 000 0	1 000 0	1 000 0	1 000 0	1 000 0	1 000 0
0 1	0 944 3	0 944 6	0 943 5	0 940 0	0 942 8	0 935 2	0 938 7
0 2	0 897 3	0 898 2	0 896 6	0 881 9	0 891 3	0 861 8	0 875 4
0 3	0 858 2	0 860 5	0 858 0	0 826 3	0 845 1	0 781 3	0 811 0
0 4	0 827 8	0 831 0	0 827 5	0 774 3	0 804 0	0 695 5	0 746 0
0 5	0 805 1	0 809 5	0 804 9	0 726 5	0 767 7	0 606 6	0 681 2
0 6	0 789 7	0 795 8	0 790 1				
0 7		0 789 8	0 783 0				
0 8		0 791 3	0 783 6				
0 9		0 800 6	0 791 7				
1 0		0 817 3	0 807 6				

$$C = b^2 - C_1, \quad C_2 = \sqrt{C_1} + b \tag{45}$$

将(45) 式代入原方程(39) 式, 得到余量, 令余量在 $t = 0$ 时等于零, 可以得到:

$$C_1 = 1 - \frac{2}{5} \quad (< 2\ 5) \tag{46}$$

(46) 式代入(43) 式, 可得 $C_0 = 1$, 即相当于将初始迭代值取为 1 综合以上各式, 可得到

本文的近似解为:

$$U(t) = \frac{\left(\sqrt{1-2/5}+b\right)^2 \exp\left(2\sqrt{1-2/5}\,t\right) - b^2 + (1-2/5)}{2\sqrt{1-2/5}\left(\sqrt{1-2/5}+b\right)\exp\left(\sqrt{1-2/5}\,t\right)} \qquad (47)$$

表 1 为本文解与文[1]、文[3]及精确解的比较(按文[1], $b = -0\ 601\ 4$), 其中, 文[1]、文[3]解的数值摘自文[1], 精确解由(40)式数值求解得到, $t > 0\ 5$ 的精确解很难收敛, 故无结果, 文[3]解只适用于 $= 1$ 从中可见, 本文近似解具有很高的精度, 相对说来, 本文解的过程、解的形式简单, 易于应用

2 结 束 语

以上仅就文[1]的三个算例, 说明了本文提出的参数迭代法对非线性问题的有效性 作者用此方法已得到了许多问题的近似解, 如平板层流边界层的相似性方程、具有小参数的 Duffing 方程等, 限于篇幅, 本文略

[参 考 文 献]

[1] 袁镒吾. 非线性问题的插值摄动解法[J]. 应用数学与力学, 1997, **18**(11): 1041 1048.

[2] 钱伟长. 奇异摄动理论及其在力学中的应用[M]. 北京: 科学出版社, 1981, 48.

[3] A H 奈弗. 摄动方法习题集[M]. 宋家骕、戴世强译. 上海: 上海翻译出版社, 1990, 125.

Parameter Iteration Method for Solving Nonlinear Problem

LIN Jiang_guo

(Institute of Marine Environment, Dalian Maritime University, Dalian 116026, P R China)

Abstract: The parameter iteration method was developed for solving the nonlinear problem in this paper. The results of several examples show that even the first iteration solution has very good accuracy.

Key words: nonlinear; parameter iteration; approach solution