应用数学和力学, 第 22 卷 第 7 期(2001 年 7 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

文章编号: 1000_0887(2001) 07_0749_04

一类具时滞的二阶非线性系统的定性分析*

彭奇林

(宿迁职业技术学院 基础课部, 江苏宿迁 223800)

(林宗池推荐)

摘要: 考虑具时滞的二阶非线性系统

$$x''(t)+f(x(t),x'(t))+g(x(t),x'(t))\phi(x(t-\tau))=p(t)\text{•}$$

借助李雅普诺夫函数方法, 得到了其零解稳定性, 解的有界性, 周期解的存在性和平稳振荡的存在唯一性•

关 键 词: 二阶非线性系统; 时滞; 李雅普诺夫函数
中图分类号: O175.12 文献标识码: A

二阶非线性系统的定性研究成果已相当丰富, 而且已有广泛的应用(见文[1～8])• 但对于具有时滞的非线性二阶系统, 由于时滞现象给系统的定性研究带来较大困难, 使得许多讨论仅限于某些较为特殊的情况• 即使加上一定的条件, 要得到比较完美的结果, 也不容易•

本文讨论如下较为一般的具有时滞的二阶非线性系统:

$$x''(t)+f(x(t),x'(t))+g(x(t),x'(t))\phi(x(t-\tau))=p(t) \tag{1}$$

的定性状态• 其中, 函数 f, g, p 关于其各自的变量均是连续的, 函数 ϕ 是关于其变量的可微函数, τ 是正的常数•

本文证明了系统(1)的零解稳定性, 解的有界性, 周期解的存在性和平稳振荡的存在唯一性等方面的四个定理:

定理 1 设函数 $p(t)\equiv 0, f(0,0)=0, g(0,0)\phi(0)=0$, 并且 f, g, ϕ 满足下列条件:

Ⅰ) $g(x,y)\phi(x)x>0$, 当 $x\neq 0$ 时, 对任意的 $y\in\mathbf{R}$;

Ⅱ) $\int_0^x g(\xi,y)\phi(\xi)\mathrm{d}\xi\to+\infty$, 当 $|x|\to+\infty$, 对任意的 $y\in\mathbf{R}$;

Ⅲ) $|g(x,y)\phi'(z)|\leqslant C$, 对任意的 $x,y,z\in\mathbf{R}$;

Ⅳ) $C\tau y^2<yf(x,y)$, 当 $y\neq 0$ 时, 对任意的 $x\in\mathbf{R}$,

其中 C 为正常数, 则系统(1)的零解是全局稳定的•

证明 取系统(1)的等价系统为:

$$\left.\begin{aligned}&x'(t)=y(t),\\&y'(t)=-f(x(t),y(t))-g(x(t),y(t))\phi(x(t))+\\&\qquad g(x(t),y(t))\int_{-\tau}^{0}\phi'_x(x(t+\eta))y(t+\eta)\mathrm{d}\eta\text{•}\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

* 收稿日期: 1999_12_21; 修订日期: 2001_01_08
作者简介: 彭奇林(1964—), 男, 湖北省天门市人, 副教授.

设(2)的李雅普诺夫函数为:

$$V(x,y)=\frac{1}{2}y^2+\int_0^x g(\xi,y)\phi(\xi)\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2}C\int_{-\tau}^{0}\int_{t+\eta}^{t}y^2(\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\cdot$$

据条件Ⅰ),Ⅱ),知函数 $V(x,y)$ 是定正的无限大函数,而其关于系统(2)的全导数

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(2)}=\ & y(t)[-f(x(t),y(t))-g(x(t),y(t))\phi(x(t))+\\ & g(x(t),y(t))\int_{-\tau}^{0}\phi'_x(x(t+\eta))y(t+\eta)\mathrm{d}\eta]+\\ & g(x(t),y(t))\phi(x(t))y(t)+\frac{1}{2}C\int_{-\tau}^{0}[y^2(t)-y^2(t+\eta)]\mathrm{d}\eta=\\ & -y(t)f(x(t),y(t))+y(t)g(x(t),y(t))\int_{-\tau}^{0}\phi'_x(x(t+\eta))y(t+\eta)\mathrm{d}\eta+\\ & \frac{1}{2}C\int_{-\tau}^{0}[y^2(t)-y^2(t+\eta)]\mathrm{d}\eta\leqslant-y(t)f(x(t),y(t))+\\ & \int_{-\tau}^{0}|y(t)||g(x(t),y(t)\phi'_x(x(t+\eta))||(y(t+\eta)|\mathrm{d}\eta+\\ & \frac{1}{2}C\int_{-\tau}^{0}[y^2(t)-y^2(t+\eta)]\mathrm{d}\eta\leqslant\\ & -y(t)f(x(t),y(t))+\frac{1}{2}C\int_{-\tau}^{0}[y^2(t)+y^2(t+\eta)]\mathrm{d}\eta+\\ & \frac{1}{2}C\int_{-\tau}^{0}[y^2(t)-y^2(t+\eta)]\mathrm{d}\eta=C\tau y^2(t)-y(t)f(x(t),y(t))\cdot\end{aligned}$$

据条件Ⅳ),知 $\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(2)}$ 是常负函数,当且仅当 $x(t)=y(t)\equiv0$ 时有 $\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(2)}=0\cdot$

因此,系统(1)的零解是全局稳定的· 证毕·

定理2 设函数 $p(t)$ 有界,且函数 f,g,ϕ 满足下列条件:

Ⅰ) $m\leqslant g(x,y)\leqslant M$,对任意的 $x,y\in\mathbf{R}$;

Ⅱ) $|g(x,y)\phi'(z)|\leqslant C_1$,对任意的 $x,y,z\in\mathbf{R}$;

Ⅲ) $\frac{f(x,y)}{y}\geqslant C_2$,当 $|y|\geqslant H$ 时,对任意的 $x\in\mathbf{R}$;

Ⅳ) $C_1\tau\sqrt{\frac{M}{m}}<C_2$;

Ⅴ) $\int_0^x g(\xi,y)\phi(\xi)\mathrm{d}\xi\to+\infty$,对任意的 $y\in\mathbf{R}$,

其中 m,M,C_1,C_2,H 均为正常数,则系统(1)的一切解都是一致最终有界的·

证明 取系统(1)的等价系统为:

$$\left.\begin{aligned}&x'(t)=y(t),\\&y'(t)=-f(x(t),y(t))-g(x(t),y(t))\phi(x(t))+\\&\qquad g(x(t),y(t))\int_{-\tau}^{0}\phi'_x(x(t+\eta))y(t+\eta)\mathrm{d}\eta+p(t)\cdot\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

由条件Ⅳ),存在常数 $C_0>1$,使得

$$C_0C_1\tau\sqrt{\frac{M}{m}}<C_2\ \text{且}\ C_0\sqrt{\frac{M}{m}}|y(t)|\geqslant|y(t+\eta)|,\text{当}\ |y|\geqslant H\ \text{时}\cdot$$

设(3)的李雅普诺夫函数为:

$$V(x,y)=\frac{1}{2}y^2+\int_0^x g(\xi,y)\phi(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

据条件, 易知函数 $V(x,y)$ 是定正的和连续的, 且具有无穷大性质. 又 $V(x,y)$ 不显含 t, 因此存在一个正的连续增函数 $a(r)$, 使得 $V(x,y)\leqslant a(r)$, 同时存在一个非负的连续增函数 $b(r)$, 使得

$$b(r)\leqslant V(x,y)\ 且 \lim_{r\to+\infty}b(r)=+\infty,$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$. 而函数 $V(x,y)$ 对系统(3) 的全导数

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(3)}={}&y(t)[-f(x(t),y(t))-g(x(t),y(t))\phi(x(t))+g(x(t),y(t))\cdot\\&\int_{-\tau}^0\phi_x'(x(t+\eta))y(t+\eta)\mathrm{d}\eta+p(t)]+g(x(t),y(t))\phi(x(t))y(t)=\\&y(t)g(x(t),y(t))\int_{-\tau}^0\phi_x'(x(t+\eta))y(t+\eta)\mathrm{d}\eta+\\&-y(t)f(x(t),y(t))+y(t)p(t)\leqslant\\&\int_{-\tau}^0|y(t)||g(x(t),y(t))\phi_x'(x(t+\eta))||y(t+\eta)|\mathrm{d}\eta+\\&|y(t)||p(t)|-y(t)f(x(t),y(t))\leqslant\\&-y(t)f(x(t),y(t))+C_0C_1\tau\sqrt{\frac{M}{m}}|y^2(t)|+|y(t)||p(t)|=\\&-\left[\frac{f(x(t),y(t))}{y(t)}-C_0C_1\tau\sqrt{\frac{M}{m}}-\frac{|p(t)|}{|y(t)|}\right]y^2(t)\leqslant\\&-\left[C_2-C_0C_1\tau\sqrt{\frac{M}{m}}-\frac{|p(t)|}{|y(t)|}\right]y^2(t).\end{aligned}$$

据 $p(t)$ 的有界性, 并适当选取正数 $H_1\geqslant H$ 使得 $|y(t)|\geqslant H_1$, 即知存在常数 $C^*>0$, 使得

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(3)}\leqslant -C^*y^2(t)\leqslant 0.$$

综上所述, 系统(1) 的一切解都是一致最终有界的(见[7] p126 定理 2.4). 证毕.

定理 3 设系统(1) 满足定理 2 的条件, 且 $p(t)$ 还是周期为 T 的周期函数, 则系统(1) 至少存在一个周期为 T 的周期解.

证明 由定理 2 知系统(1) 的所有解在区间 $0\leqslant t<+\infty$ 上均有界. 又 $p(t)$ 是周期为 T 的周期函数, 据马塞拉定理(见[7], p353), 知系统(1) 至少存在一个周期为 T 的周期解. 证毕.

定理 4 设系统(1) 满足定理 3 条件, 且对系统(1) 的任意两个解 $x_1(t)$ 与 $x_2(t)$, 当 $t\to\infty$ 时, 都有 $x_1(t)-x_2(t)\to 0$, $x_1'(t)-x_2'(t)\to 0$, 则系统(1) 存在唯一的一个平稳振荡.

证明 由定理 3 知系统(1) 至少存在一个周期为 T 的周期解, 又对系统(1) 的任意两个解 $x_1(t)$ 与 $x_2(t)$, 当 $t\to\infty$ 时都有 $x_1(t)-x_2(t)\to 0$, $x_1'(t)-x_2'(t)\to 0$, 知系统(1) 存在唯一的一个周期为 T 的周期解. 因此据拉萨尔定理(见[7], p366), 易知系统(1) 存在唯一的一个平稳振荡. 证毕.

[参 考 文 献]

[1] 赵杰民, 黄克累, 陆启韶. 一类泛函微分方程周期解的存在性与应用[J]. 应用数学和力学, 1995, **15**(1): 49—58.

[2] Burton T A. Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional Differential Equations [M]. Orlando: Academic Press, 1985.
[3] 徐道义. 具有滞后的变系数系统的稳定性[J]. 应用数学学报, 1989, **12**(1): 124－128.
[4] Edmund Pinney. Ordinary Difference_Differential Equations [M]. Los Angeles: University of California Press, 1958.
[5] 彭奇林. 一类二阶非线性系统的定性分析[J]. 吉林化工学院学报, 1999, **16**(增刊): 131－133.
[6] Burton T A, Mohfouf W E. Stability criteria for Volterra equations[J]. Trans Amer Math Soc, 1983, **270**(1): 143－174.
[7] 秦元勋, 王慕秋, 王联. 运动稳定性理论与应用[M]. 北京: 科学出版社, 1981.
[8] 王联, 王慕秋. 非线性微分方程定性分析[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1987.

Qualitative Analysis for a Class of Second Order Nonlinear System with Delay

PENG Qi_lin
(Department of Basic Science, Suqian Vocational and Technological College, Suqian, Jiangsu 223800)

Abstract: The second order nonlinear system with delay
$$x''(t)+f(x(t),x'(t))+g(x(t),x'(t))\phi(x(t-\tau))=p(t)$$
being considered. Four theorems on the stability of zero solution, the boundedness of the solutions, the existence of the periodic solutions, the existence and uniqueness of the stationary oscilation are obtained by means of the Liapunov' s second method. The conclusion in the literatures are generalized.

Key words: second order nonlinear differential equation; delay; Liapunov functional