应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2001) 07_0753_05

超 KdV 方程的减缩摄动解法*

吕克璞, 孙建安, 段文山, 赵金保

(西北师范大学 物理系, 兰州 730070)

(许政范推荐)

摘要: 利用减缩摄动法(Reductive Perturbation Method) 将超 KdV 方程变换为普通 KdV 方程, 并求出了小振幅摄动解•

关 键 词: 超 KdV 方程; 减缩摄动法; KdV 方程
中图分类号: O29 文献标识码: A

引 言

所谓超 KdV 方程是指方程组

$$\left.\begin{aligned} &u_t - buu_x + 3hh_x + u_{xxx} = 0, \\ &h_t - buh_x - ahu_x + ch_{xx} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

其中 a, b, c($c \neq 0$) 都是常数•

文献[1]曾经用 Clarkson 和 Kruskal 提出的直接法给出了(1) 的相似解, 本文用减缩摄动法[2]把(1) 变换为普通 KdV 方程, 给出了小振幅摄动解• 为此将(1) 改写成矩阵向量方程

$$\boldsymbol{U}_t + \boldsymbol{A}\boldsymbol{U}_x + \boldsymbol{K}\boldsymbol{U}_{xxx} = \boldsymbol{0}, \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{U} = (u, h)^{\mathrm{T}}$, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{K}$ 分别是

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -bu & 3h \\ -ah & -bu \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}• \tag{3}$$

(2) 可视为向量形式的 KdV 方程•

1 减缩摄动法及 KdV 方程变换

设 $\boldsymbol{U}^{(0)} = (u_0, h_0)^{\mathrm{T}}$ 是(2) 的远方场定态解, 且

$$\boldsymbol{A}_0 = \begin{bmatrix} -bu_0 & 3h_0 \\ -ah_0 & -bu_0 \end{bmatrix}• \tag{4}$$

求解 $\boldsymbol{A}_0$ 的右、左特征问题

$$\left.\begin{aligned} &(\lambda_0\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_0)\boldsymbol{R}_0 = \boldsymbol{0}, \\ &\boldsymbol{L}_0(\lambda_0\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_0) = \boldsymbol{0}, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

得特征值和特征向量为

---

* 收稿日期: 1999_08_08; 修订日期: 2001_01_15
作者简介: 吕克璞(1945—) , 男, 甘肃平凉人, 教授.

$$\lambda_0 = -bu_0 \pm \sqrt{3ah_0}, \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{R}_0 &= (\sqrt{3},\ \pm\sqrt{a})^{\mathrm{T}}, \\ \boldsymbol{L}_0 &= (\sqrt{a},\ \pm\sqrt{3})^{\mathrm{T}}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

并求出特征函数 $\lambda(u, h) = -bu \pm \sqrt{3ah}$ 在 $\boldsymbol{U}^{(0)}$ 处的梯度向量, 即

$$\nabla\lambda|_{U^{(0)}} = (-b,\ \sqrt{3a}). \tag{8}$$

当 $\boldsymbol{U}^{(0)} \neq \boldsymbol{0}$, a, b 不全为零时, $\boldsymbol{A}_0$ 有非退化的实特征值 λ_0, 由 Friedrichs 定理知: "与定态相邻区域必然是简单波区域"。所以, 在远场定态解 $\boldsymbol{U}^{(0)}$ 附近以小参数 ε 将 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 渐近展开为

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}^{(0)} + \varepsilon\boldsymbol{U}^{(1)} + \varepsilon^2\boldsymbol{U}^{(2)} + \cdots, \tag{9}$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_0 + \varepsilon\boldsymbol{U}^{(1)}\nabla_u\boldsymbol{A}_0 + \cdots. \tag{10}$$

当 $\varepsilon \ll 1$ 时, (9) 的波振幅很小。对 $\lambda_0(= -bu_0 + \sqrt{3ah_0})$ 作空间和时间尺度变换

$$\xi = \varepsilon^r(x - \lambda_0 t), \qquad \tau = \varepsilon^{r+1}t, \tag{10}$$

其中, r 是决定时间和空间尺度变化的待定常数。

把(9)、(10)、(11) 代入(2) 并消去 ε^{r+1} 后得

$$(-\lambda_0\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}_0)\frac{\partial\boldsymbol{U}^{(1)}}{\partial\xi} + \varepsilon\left[(-\lambda_0\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}_0)\frac{\partial\boldsymbol{U}^{(2)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\boldsymbol{U}^{(1)}}{\partial\tau} + \boldsymbol{U}^{(1)}\cdot\nabla_u\boldsymbol{A}_0\frac{\partial\boldsymbol{U}^{(1)}}{\partial\xi}\right] +$$
$$\varepsilon^{2r}\boldsymbol{K}\frac{\partial^3\boldsymbol{U}^{(1)}}{\partial\xi^3} + O(\varepsilon^{2r+1}) = \boldsymbol{0}.$$

为了在(11) 的变换下使得(2) 式不变, 应使 $\varepsilon^{2r} = \varepsilon$, 即 $r = 1/2$。于是, 上式变为

$$(-\lambda_0\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}_0)\frac{\partial\boldsymbol{U}^{(1)}}{\partial\xi} + \varepsilon\left[(-\lambda_0\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}_0)\frac{\partial\boldsymbol{U}^{(2)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\boldsymbol{U}^{(1)}}{\partial\tau} +\right.$$
$$\left.\boldsymbol{U}^{(1)}\cdot\nabla_u\boldsymbol{A}_0\frac{\partial\boldsymbol{U}^{(1)}}{\partial\xi} + \boldsymbol{K}\frac{\partial^3\boldsymbol{U}^{(1)}}{\partial\xi^3}\right] + O(\varepsilon^2) = \boldsymbol{0}, \tag{12}$$

略去(12) 中 $O(\varepsilon^2)$ 及以上的项, 分别取 ε 的零级近似和一级近似可得:

$$(-\lambda_0\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}_0)\frac{\partial\boldsymbol{U}^{(1)}}{\partial\xi} = 0, \tag{13}$$

$$(-\lambda_0\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}_0)\frac{\partial\boldsymbol{U}^{(2)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\boldsymbol{U}^{(1)}}{\partial\tau} + \boldsymbol{U}^{(1)}\cdot\nabla_u\boldsymbol{A}_0\frac{\partial\boldsymbol{U}^{(1)}}{\partial\xi} + \boldsymbol{K}\frac{\partial^3\boldsymbol{U}^{(1)}}{\partial\xi^3} = \boldsymbol{0}. \tag{14}$$

由(5) 知, $\partial\boldsymbol{U}^{(1)}/\partial\xi$ 应正比于 $\boldsymbol{A}_0$ 的右特征向量 $\boldsymbol{R}_0$, 为此设

$$\frac{\partial\boldsymbol{U}^{(1)}}{\partial\xi} = \phi_0(\xi, \tau)\boldsymbol{R}_0. \tag{15}$$

将(15) 式对 ξ 积分得

$$\boldsymbol{U}^{(1)} = \phi(\xi, \tau)\boldsymbol{R}_0 + \boldsymbol{v}_0(\tau), \tag{16}$$

其中, $\phi(\xi, \tau) = \int\phi_0(\xi, \tau)\mathrm{d}\xi$ 为待定函数, $\boldsymbol{v}_0(\tau)$ 为依赖于 τ 的积分常数, 一般依赖于边界条件, 本文要求 $|\xi| \to \infty$ 时, $\boldsymbol{U}^{(1)} \to \boldsymbol{0}$, 因而 $\phi \to 0$, 故取 $\boldsymbol{v}_0(\tau) = \boldsymbol{0}$。

对于(14), 用 $\boldsymbol{A}_0$ 的属于 λ_0 的左特征向量 $\boldsymbol{L}_0$ 左乘(14), 由(5) 式, 则这个方程解存在的必要条件是

$$\boldsymbol{L}_0\cdot\left[\frac{\partial\boldsymbol{U}^{(1)}}{\partial\tau} + (\boldsymbol{U}^{(1)}\cdot\nabla_u\boldsymbol{A}_0)\frac{\partial\boldsymbol{U}^{(1)}}{\partial\xi} + \boldsymbol{K}\frac{\partial^3\boldsymbol{U}^{(1)}}{\partial\xi^3}\right] = \boldsymbol{0}. \tag{17}$$

把(16) 代入(17), 最后得关于 $\phi(\xi, \tau)$ 的普通 KdV 方程

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tau} + \alpha\phi\frac{\partial\phi}{\partial\xi} + \beta\frac{\partial^3\phi}{\partial\xi^3} = 0, \tag{18}$$

其中

$$\alpha = \frac{L_0(R_0 \cdot \nabla \lambda_0) R_0}{L_0 R_0} = \frac{2a - 3b}{\sqrt{3}}, \tag{19}$$

$$\beta = \frac{L_0 K R_0}{L_0 R_0} = \frac{1 + c}{2}. \tag{20}$$

(19)、(20)清楚地表明，当(1)变换为单自由度 KdV 方程(18)后，其非线性系数 α 和色散项系数 β 准确地反映出与原方程中系数 a, b, c 之间的关系。如果取 ε 的一级近似

$$U = U^{(0)} + \varepsilon U^{(1)} \tag{21}$$

可通过求解(18)得到 ϕ，再由(16)求得 $U^{(1)}$，最后由(21)求得 U 的 ε 的一级小振幅摄动解。对于文献[1]列出的三种具有 Painleve 性质系数参数

$$a = b = 3, c = 1;\ a = 3, b = 6, c = 4;\ a = b = 6, c = 1$$

分别对应于 KdV 方程

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} - \sqrt{3}\phi \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial \xi^3} = 0, \tag{22}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} - 4\sqrt{3}\phi \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \frac{5}{2}\frac{\partial^3 \phi}{\partial \xi^3} = 0, \tag{23}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} - 2\sqrt{3}\phi \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial \xi^3} = 0. \tag{24}$$

2 KdV 方程求解

引入变换

$$\phi = \frac{6\beta^{(1/3)}}{\alpha}\varphi,\ \xi = \beta^{(1/3)} z, \tag{25}$$

则(18)变为规范 KdV 方程

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - 6\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z^3} = 0. \tag{26}$$

方程(26)可用散射反演法[3]求解。设(26)的 Schrödinger 方程有 N 个离散特征值

$$\lambda_i = -k_i^2 \quad (i = 1, 2, \cdots, N),$$

且 $k_1 < k_2 < \cdots < k_{N-1} < k_N$，当 $|\tau| \to \infty$ 时有解

$$\varphi(z, \tau) = -2\sum_{i=1}^{N} k_i^2 \operatorname{sech}^2(k_i z_i + \delta_i), \tag{27}$$

其中

$$\delta_i = \frac{1}{2}\log B_i, \quad B_i = \frac{C_i^2}{2k_i}\left[\prod_{j=1}^{i-1}\frac{(k_j - k_i)}{(k_j + k_i)}\right]^2, \tag{28}$$

这里 C_i 由(26)的初始条件确定。

1) 单孤立子波

对于方程(26)的以

$$\varphi_0 = -2\operatorname{sech}^2 z \tag{29}$$

为势的 Schrödinger 方程的特征问题，此时有一个离散特征值 $k_1 = 1$，由(27)式可得

$$\varphi(z, \tau) = -2\operatorname{sech}^2(z - 4\tau + \delta_1). \tag{30}$$

从而

$$\phi = \frac{\beta^{(1/3)}}{\alpha}\mathrm{sech}^2(\beta^{(1/3)}\xi - 4\tau + \delta_1). \tag{31}$$

最后得

$$u = u_0 + \varepsilon\sqrt{3}\,\frac{3\beta^{(1/3)}}{\alpha}\mathrm{sech}^2(\beta^{-(1/3)}\xi - 4\tau + \delta_1), \tag{32}$$

$$h = h_0 + \varepsilon\sqrt{a}\,\frac{3\beta^{(1/3)}}{\alpha}\mathrm{sech}^2(\beta^{-(1/3)}\xi - 4\tau + \delta_1). \tag{32}$$

当 $|\tau| \to \infty$ 时, $\lim\limits_{\tau\to\infty}\phi(z,\tau) + 2\mathrm{sech}^2(z - 4\tau) = 0$.

上式表明, 在远方场结构中, 初始扰动形成了一个单孤立子波.

2) 双孤立子波相互作用问题

对于方程(26) 的以

$$\varphi_0 = -6\mathrm{sech}^2 z \tag{34}$$

为势的Schrödinger 方程的特征问题, 此时有两个离散特征值 $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -4$, 由(27) 式可得

$$\varphi(z,\tau) = -12\,\frac{3 + 4\cosh(2z - 8\tau) + \cosh(4z - 64\tau)}{[3\cosh(z - 28\tau) + \cosh(3z - 36\tau)]^2}, \tag{35}$$

所以

$$\phi = 72\,\frac{\beta^{(1/3)}}{\alpha}\,\frac{3 + 4\cosh(2\beta^{-(1/3)}\xi - 8\tau) + \cosh(4\beta^{-(1/3)}\xi - 64\tau)}{[3\cosh(\beta^{-(1/3)}\xi - 28\tau) + \cosh(3\beta^{-(1/3)}\xi - 36\tau)]^2}, \tag{36}$$

$$u = u_0 + \varepsilon 72\sqrt{3}\,\frac{\beta^{(1/3)}}{\alpha}\cdot\frac{3 + 4\cosh(2\beta^{-(1/3)}\xi - 8\tau) + \cosh(4\beta^{-(1/3)}\xi - 64\tau)}{[3\cosh(\beta^{-(1/3)}\xi - 28\tau) + \cosh(3\beta^{-(1/3)}\xi - 36\tau)]^2}, \tag{37}$$

$$h = h_0 + \varepsilon 72\sqrt{a}\,\frac{\beta^{(1/3)}}{\alpha}\,\frac{3 + 4\cosh(2\beta^{-(1/3)}\xi - 8\tau) + \cosh(4\beta^{-(1/3)}\xi - 64\tau)}{[3\cosh(\beta^{-(1/3)}\xi - 28\tau) + \cosh(3\beta^{-(1/3)}\xi - 36\tau)]^2}. \tag{38}$$

对于特征值 $\lambda_1 = -1$, 当 $|\tau| \to \infty$ 时, (35) 的极限为

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{\tau\to\infty}\varphi_1(z,\tau) + 2\mathrm{sech}^2(z - 4\tau - \theta_1) = 0, \\ &\lim_{\tau\to\infty}\varphi_1(z,\tau) + 2\mathrm{sech}^2(z - 4\tau - \delta_1) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

其中, $\theta_1 = \frac{1}{2}\ln 3$, $\delta_1 = -\frac{1}{2}\ln 3$. 对于特征值 $\lambda_1 = -4$, 当 $|\tau| \to \infty$ 时, (35) 的极限为

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{\tau\to\infty}\varphi_2(z,\tau) + 8\mathrm{sech}^2[2(z - 16\tau - \theta_2)] = 0, \\ &\lim_{\tau\to\infty}\varphi_2(z,\tau) + 8\mathrm{sech}^2[2(z - 16\tau - \delta_2)] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

其中, $\theta_2 = -\frac{1}{4}\ln 3$, $\delta_2 = \frac{1}{4}\ln 3$.

式(35) ~ (40) 表明两个波作用后将在其传播方向上各自改变一个相位, 但总的相位变化为零. 这表明整个系统运动守恒. 由初值问题所决定Schrödinger 方程的特征值, 其每一个离散的特征值都对应于一个孤波. 解(35) 描述了两个服从 KdV 方程的孤立波在相互作用时形成的双波结构.

3 结束语

综上所述, 对于小振幅运动, 在远方场渐近意义上, 利用减缩摄动法, 可以把像超 KdV 方程这样一类非线性方程, 变换为单自由度普通 KdV 方程求解是比较简便的.

[参 考 文 献]

[1] 俞慧丹, 张解放. 超 KdV 方程的相似解[J]. 应用数学和力学, 1995, **16**(9): 839—842.
[2] 谷内俊弥, 西原功修(日). 非线性波动[M]. 徐福元, 张家泰, 丁启明译. 北京: 原子能出版社, 1981, 99—119.
[3] 艾克霍思 W, 范哈顿. 逆散射变换和孤立子理论[M]. 黄迅成 译. 上海: 上海科学技术文献出版社, 1984, 35—110.

Reductive Perturbation Method of Super KdV Equations

LÜ Ke_pu, SUN Jian_an, DUAN Wen_shan, ZHAO Jin_bao
(Department of Physics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, P R China)

Abstract: By using reductive perturbation method, super KdV equations are changed into ordinary KdV equations, small amplitude perturbation solutions are obtained.

Key words: super KdV equation; reductive perturbation method; KdV equation