

文章编号: 1000-0887(2001) 06_0561_06

裂纹与线夹杂垂直接触问题的奇性分析*

沈安, 陶敏, 汤任基

(上海交通大学 工程力学系, 上海 200030)

(我刊编委汤任基来稿)

摘要: 以短纤维复合材料等作为工程背景, 采用现有文献中单裂纹和单夹杂的基本解, 对无限平面(基体)上, 裂纹和线夹杂的垂直接触问题从断裂力学的角度作了研究, 得到了问题的积分方程, 推出了接触点的性态指数、奇性应力及以此表示的接触点附近三个区域内的应力强度因子表达式, 并给出了一些数值结果, 可供工程实际参考

关键词: 裂纹; 线夹杂; 垂直接触; 奇性应力; 应力强度因子

中图分类号: O346.1 **文献标识码:** A

引 言

目前, 已有大量文献讨论了孤立的裂纹、孔穴、夹杂以及裂纹与夹杂的相互干涉。然而, 裂纹与夹杂相接触的问题还似乎还没有得到广泛的研究。本文可视为现有文献如[1]关于裂纹和线夹杂相互作用的更进一步研究和推广。这种研究对于加肋板中的肋条或焊接结构焊缝附近的应力分析是一种很好的计算模型。

1 问题的积分方程

本文讨论的裂纹/夹杂相互作用问题如图 1 所示。假设所讨论的问题属于平面应变或广义平面应力问题, 并且平面尺寸比裂纹、夹杂的长度大得多, 因而可视为一个无限域问题, 并假定无限远处受图示外应力。

图中基体 Ω 的材料剪切弹性模量和泊松比为 (μ, ν) , 夹杂的剪切弹性模量和泊松比为 (μ_1, ν_1) , 并且假定 $\mu \rightarrow \infty, \nu = \nu_1$, 夹杂厚度 $h \ll a$, 因而可视为线夹杂。图(b)是图(a)的等效模型, 参照文献[2], 此处刚性线夹杂对平面域的受力影响可用分布体力 (p, q) 取代, 它们由夹杂两侧的法向和切向应力的间断决定:

$$\begin{cases} p(x_1) = \sigma_{yy}^I(x_1, -0) - \sigma_{yy}^I(x_1, +0) & -a < x_1 < a, \\ q(x_1) = \sigma_{xy}^I(x_1, -0) - \sigma_{xy}^I(x_1, +0) & -a < x_1 < a. \end{cases} \quad (1a, b)$$

此外, 由于讨论的问题几何形状与受力均关于 y_1 轴对称, 因此在略去刚体位移后, 刚性线夹杂没有初始转角 θ_0 。裂纹用位错密度函数表示(参照[3]), 记为 $g(x_2)$, 在裂纹坐标系 Ox_2y_2 中, 它由下式表示:

* 收稿日期: 1999_12_03; 修订日期: 2000_11_28

作者简介: 沈安(1973—), 女, 上海市人, 硕士; 陶敏(1969—), 女, 浙江湖州人, 讲师; 汤任基(1935—), 男, 上海市人, 教授。

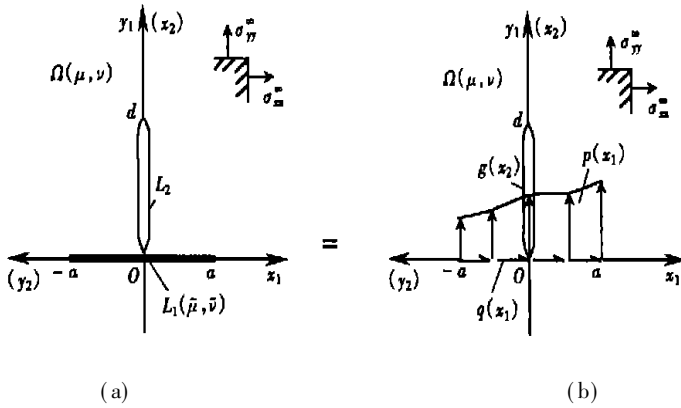


图 1 裂纹与刚性线夹杂垂直接触

$$g(x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2} [V^2(x_2, +0) - V^2(x_2, -0)] \quad 0 < x_2 < d, \quad (2)$$

上面两式中的下标 1 和 2 分别表示夹杂坐标系 Ox_1y_1 中的分量或裂纹坐标系 Ox_2y_2 中的分量。这样把文献[2, 3] 中的单夹杂和单裂纹的基本解以及远场外应力经过坐标转换后进行叠加, 则问题的总应力和总位移有以下极限条件:

$$\begin{cases} \lim_{y_2 \rightarrow 0^+} \alpha_y(x_2, y_2) = 0 & 0 < x_2 < d, \\ \lim_{y_1 \rightarrow 0^+} \partial u(x_1, y_1) / \partial x_1 = 0 & -a < x_1 < a, \\ \lim_{y_1 \rightarrow 0^+} \partial v(x_1, y_1) / \partial x_1 = 0 & -a < x_1 < a^* \end{cases} \quad (3a \sim c)$$

又由于对称性, 有 $p(t) = p(-t)$, $q(t) = -q(-t)$, $t \in (-a, a)$, 可得问题的积分方程组为

$$\frac{1}{\pi} \int_0^a \left(\frac{1}{t-x_1} - \frac{1}{t+x_1} \right) p(t) dt + \frac{\mu}{\kappa\pi} \int_0^d \left[-(\kappa+3) \frac{x_1}{t^2+x_1^2} + \frac{4x_1^3}{(t^2+x_1^2)^2} \right] g(t) dt = 0, \quad (4a)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^a \left(\frac{1}{t-x_1} + \frac{1}{t+x_1} \right) q(t) dt + \frac{\mu}{\kappa\pi} \int_0^d \left[(\kappa-1) \frac{t}{t^2+x_1^2} + \frac{4tx_1^2}{(t^2+x_1^2)^2} \right] g(t) dt = \\ - \frac{(1+\kappa)^2}{4\kappa} \left[\sigma_{xx}^\infty - \frac{3-\kappa}{1+\kappa} \sigma_{yy}^\infty \right], \end{aligned} \quad (4b)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^d \frac{g(t)}{t-x_2^2} dt + \frac{1}{4\pi\mu} \int_0^a \left[(\kappa-5) \frac{x_2}{t^2+x_2^2} + \frac{4x_2^3}{(t^2+x_2^2)^2} \right] p(t) dt + \\ \frac{1}{4\pi\mu} \int_0^a \left[(\kappa+3) \frac{t}{t^2+x_2^2} - \frac{4tx_2^2}{(t^2+x_2^2)^2} \right] q(t) dt = - \frac{1+\kappa}{2\mu} \sigma_{xx}^\infty, \end{aligned} \quad (4c)$$

其中 $x_1 \in (0, a)$, $x_2 \in (0, d)$ 。夹杂未知函数 (p, q) 只需在 $t \in (0, a)$ 上分析即可。

2 积分方程未知解的性态分析及约束条件

积分方程组(4), 是一组以 (p, q, g) 为未知函数的柯西型积分方程组。由柯西型奇异积分^[4]的端点性质可知, 未知函数 (p, q, g) 在它们的定义区间 $(0, a)$ 上必可表为:

$$p(t) = \frac{p^*(t)}{t^\alpha(a-t)^\beta}, \quad q(t) = \frac{q^*t}{t^\alpha(a-t)^\beta}, \quad g(t) = \frac{g^*(t)}{t^\alpha(a-t)^\gamma}, \quad (5a \sim c)$$

其中 $p^*(t)$, $q^*(t)$ 在 $[0, a]$ 上, $g^*(t)$ 在 $[0, d]$ 上有界, 指数 α 即为接触点处 O 的性态指数,

β, γ 分别为夹杂在 a 端及裂纹在 d 端的性态指数。

当 $x_1, x_2 \rightarrow 0^+$ 时, 积分方程中的各项可按柯西型奇异积分端点性质^[4] 进行计算, 例如:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^d \frac{x_1}{t^2 + x_1^2} g(t) dt = \frac{1}{2i} \int_0^d \left(\frac{1}{t - ix_1} - \frac{1}{t + ix_1} \right) g(t) dt = \frac{\pi \sin(\alpha\pi/2)}{\sin(\alpha\pi)} \frac{g^*(0)}{x_1^\alpha d^\gamma}, \quad (6a)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^d \frac{4x_1^3}{(t^2 + x_1^2)^2} g(t) dt = -2x_1^2 \frac{d}{dx_1} \int_0^d \frac{1}{t^2 + x_1^2} g(t) dt = 2(\alpha + 1) \frac{\pi \sin(\alpha\pi/2)}{\sin(\alpha\pi)} \frac{g^*(0)}{x_1^\alpha d^\gamma}. \quad (6b)$$

根据上式作类似的计算代入(4)后, 经过一系列的运算, 便得关于 $p^*(0), q^*(0)$ 及 $g^*(0)$ 的齐次方程组:

$$\left[\cot(\alpha\pi) - \frac{1}{\sin(\alpha\pi)} \right] \frac{p^*(0)}{a^\beta} - \frac{\mu(\kappa + 1 - 2\alpha)}{\kappa} \frac{\sin(\alpha\pi/2)}{\sin(\alpha\pi)} \frac{g^*(0)}{d^\gamma} = 0, \quad (7a)$$

$$\left[\cot(\alpha\pi) + \frac{1}{\sin(\alpha\pi)} \right] \frac{q^*(0)}{a^\beta} + \frac{\mu(\kappa - 1 + 2\alpha)}{\kappa} \frac{\cos(\alpha\pi/2)}{\sin(\alpha\pi)} \frac{g^*(0)}{d^\gamma} = 0, \quad (7b)$$

$$\cot(\alpha\pi) \frac{g^*(0)}{d^\gamma} + \frac{\kappa - 3 + 2\alpha}{2\mu} \frac{\sin(\alpha\pi/2)}{\sin(\alpha\pi)} \frac{p^*(0)}{a^\beta} + \frac{\kappa + 3 - 2\alpha}{2\mu} \frac{\cos(\alpha\pi/2)}{\sin(\alpha\pi)} \frac{q^*(0)}{a^\beta} = 0. \quad (7c)$$

由于 $p^*(0)/a^\beta, q^*(0)/a^\beta, g^*(0)/d^\gamma$ 不能同时为零, 最终得到性态指数 α 满足的特征方程:

$$2\kappa \cos(\alpha\pi) - [\kappa^2 - (2\alpha - 3)(2\alpha - 1)] = 0, \quad (8)$$

其中 $0 < \alpha < 1, \kappa = 3 - 4\nu$ (平面应变), 平面应力时 $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ 。

由于裂纹与夹杂未接触端点的性态指数就是单裂纹与单夹杂端点的性态指数, 因此直接得到 $\beta = \gamma = 1/2$ ($0 < \beta < 1, 0 < \gamma < 1$)。

结合上面的分析可知, 为使积分方程组(4)有定解, 未知函数在接触点的性态指数 α 必须严格满足特征方程(8), 因此由式(7)并考虑内裂纹的位移单值条件, 可得问题的约束方程:

$$\begin{cases} 2\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \cdot \frac{p^*(0)}{\sqrt{a}} + \frac{\mu(\kappa + 1 - 2\alpha)}{\kappa} \cdot \frac{g^*(0)}{\sqrt{d}} = 0, \\ 2\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \cdot \frac{q^*(0)}{\sqrt{a}} + \frac{\mu(\kappa - 1 + 2\alpha)}{\kappa} \cdot \frac{g^*(0)}{\sqrt{d}} = 0, \\ \int_0^d g(t) dt = 0. \end{cases} \quad (9a \sim c)$$

运用文献[5]中描述的数值方法, 容易得到由(4)和(9)以及(10)式组成的积分方程组的解。

3 接触点附近的奇性应力及应力强度因子

在接触点附近的应力如图2所示。其在①、②内对称, 因此, 只需研究②、③部分内的应力即可。同时为简化问题, 在②内接触点附近的奇性应力是指夹杂上岸右侧 $x_1 \rightarrow 0^+$ 时的应力, 而③内的奇性应力, 主要研究夹杂下岸, $y_1 \rightarrow 0^-$ 时对应的应力, 它们均可根据夹杂界面应力作渐进分析获得。在坐标系 Ox_1y_2 中, 略去具体计算过程, 夹杂界面应力为:

$$\sigma_{yy}(x_1, \pm 0) = \frac{1 - \kappa}{2\pi(1 + \kappa)} \int_0^a \left[\frac{1}{t - x_1} + \frac{1}{t + x_1} \right] q(t) dt + \frac{1}{2} p(x_1) + \frac{2\mu}{\pi(1 + \kappa)} \int_0^d \left[\frac{t}{t^2 + x_1^2} - \frac{2tx_1^2}{(t^2 + x_1^2)^2} \right] g(t) dt + \sigma_{yy}^\infty, \quad (10a)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{xy}(x_1, \pm 0) &= \frac{\kappa-1}{2\pi(1+\kappa)} \int_0^a \left(\frac{1}{t-x_1} - \frac{1}{t+x_1} \right) p(t) dt + \\ &\frac{1}{2} q(x_1) - \frac{2\mu}{\pi(1+\kappa)} \times \\ &\int_0^a \left[\frac{x_1}{t^2+x_1^2} - \frac{2x_1^3}{(t^2+x_1^2)^2} \right] g(t) dt \end{aligned} \quad (10b)$$

则利用式(6)中的若干积分结果,代入上式最终得:

$$\begin{aligned} \alpha_{yy}(0^+, +0) &= \frac{1}{2(1+\kappa)} \frac{1}{x_1^\alpha \sin(\alpha\pi/2)} \times \\ &\left[(1-\kappa) \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \cdot \frac{q^*(0)}{\sqrt{a}} + \right. \\ &\left. 2\mu(1-\alpha) \frac{g^*(0)}{\sqrt{d}} \right] - \frac{1}{2} \frac{p^*(0)}{\sqrt{ax_1^\alpha}} + \sigma_{yy}^\infty, \end{aligned} \quad (11a)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{xy}(0^+, +0) &= \frac{1}{2(1+\kappa)} \frac{1}{x_1^\alpha \cos(\alpha\pi/2)} \left[(1-\kappa) \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \cdot \frac{p^*(0)}{\sqrt{a}} + \right. \\ &\left. 2\mu\alpha \frac{g^*(0)}{\sqrt{d}} \right] - \frac{1}{2} \frac{q^*(0)}{\sqrt{ax_1^\alpha}}. \end{aligned} \quad (11b)$$

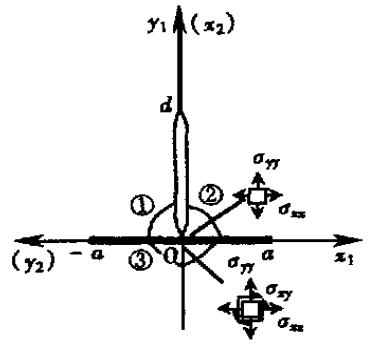


图 2

那么,夹杂上部接触点右侧(0^+)的I型和II型广义应力强度因子 K_I 和 K_{II} 可以定义如下:

$$\begin{cases} K_I(0^+) = \lim_{x_1 \rightarrow 0^+} [2(x_1-0)]^\alpha \alpha_{yy}(x_1, +0), \\ K_{II}(0^+) = \lim_{x_1 \rightarrow 0^+} [2(x_1-0)]^\alpha \alpha_{xy}(x_1, +0). \end{cases} \quad (12a, b)$$

解出方程组(4)后,这些应力强度因子可以求出为:

$$\begin{aligned} K_I(0^+) &= \frac{1}{2(1+\kappa)} \frac{2^\alpha}{\sin(\alpha\pi/2)} \left[(1-\kappa) \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \cdot \frac{q^*(0)}{\sqrt{a}} + \right. \\ &\left. 2\mu(1-\alpha) \frac{g^*(0)}{\sqrt{d}} \right] - \frac{2^{\alpha-1} p^*(0)}{\sqrt{a}}, \end{aligned} \quad (13a)$$

$$\begin{aligned} K_{II}(0^+) &= \frac{1}{2(1+\kappa)} \frac{2^\alpha}{\sin(\alpha\pi/2)} \left[(1-\kappa) \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \cdot \frac{p^*(0)}{\sqrt{a}} + \right. \\ &\left. 2\mu\alpha \frac{g^*(0)}{\sqrt{d}} \right] - \frac{2^{\alpha-1} q^*(0)}{\sqrt{a}}. \end{aligned} \quad (13b)$$

由上述接触点附近的应力强度因子表达式可知,在接触点处具有 α 次的奇异性。

又考虑下半平面,在 $x_1 = 0$ 线上,总应力为:

$$\begin{aligned} \alpha_{xx}(0, y_1; t) &= \frac{1}{\pi(\kappa+1)} \int_0^a \left[(\kappa-5) \frac{y_1}{t^2+y_1^2} + \frac{4y_1^3}{(t^2+y_1^2)^2} \right] p(t) dt + \frac{1}{\pi(\kappa+1)} \times \\ &\int_0^a \left[(\kappa+3) \frac{t}{t^2+y_1^2} - \frac{4ty_1^2}{(t^2+y_1^2)^2} \right] q(t) dt + \frac{2\mu}{\pi(1+\kappa)} \int_0^a \frac{g(t)}{t-y_1} dt + \sigma_{xx}^\infty, \end{aligned} \quad (14a)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{yy}(0, y_1; t) &= \frac{1}{\pi(\kappa+1)} \int_0^a \left[-(\kappa-1) \frac{y_1}{t^2+y_1^2} - \frac{4y_1^3}{(t^2+y_1^2)^2} \right] p(t) dt + \frac{1}{\pi(\kappa+1)} \times \\ &\int_0^a \left[-(\kappa-1) \frac{t}{t^2+y_1^2} + \frac{4ty_1^2}{(t^2+y_1^2)^2} \right] q(t) dt + \frac{2\mu}{\pi(1+\kappa)} \int_0^a \frac{g(t)}{t-y_1} dt + \sigma_{yy}^\infty. \end{aligned} \quad (14b)$$

式中最后一项为连续应力,不存在奇异性。现在区域③处令 $y_1 \rightarrow 0$,有以下主部积分方程:

$$\int_0^a \frac{t}{t^2 + y_1^2} q(t) dt = \frac{\pi i}{2\pi i} \int_0^a \left(\frac{1}{t + iy_1} + \frac{1}{t - iy_1} \right) q(t) dt = \frac{\pi \cos(\frac{\alpha\pi}{2})}{\sin \alpha\pi} \frac{q^*(0)}{\sqrt{a(-y_1)}^\alpha}, \quad (15a)$$

$$\int_0^a \frac{4ty_1^2}{(t^2 + y_1^2)^2} q(t) dt = -2y_1 \frac{d}{dy_1} \int_0^a \frac{t}{t^2 + y_1^2} q(t) dt = -\frac{2\alpha\pi \cos(\frac{\alpha\pi}{2})}{\sin \alpha\pi} \frac{q^*(0)}{\sqrt{a(-y_1)}^\alpha}. \quad (15b)$$

根据上式作类似运算代入(14), 略去具体过程, 夹杂下部接触点(0)的广义应力强度因子可按下列式定义:

$$K_I(0) = \lim_{y_1 \rightarrow 0^-} [2(0 - y_1)]^\alpha \sigma_{xx}(0, y_1) = \frac{2^\alpha}{(k+1)\sin(\alpha\pi)} \left[(-k - 2\alpha + 3) \sin \frac{\alpha\pi}{2} \times \frac{p^*(0)}{\sqrt{a}} + (k - 2\alpha + 3) \cos \frac{\alpha\pi}{2} \cdot \frac{q^*(0)}{\sqrt{a}} + \frac{2\mu g^*(0)}{\sqrt{d}} \right], \quad (16a)$$

$$K_{II}(0) = \lim_{y_1 \rightarrow 0^-} [2(0 - y_1)]^\alpha \sigma_{yy}(0, y_1) = \frac{2^\alpha}{(k+1)\sin(\alpha\pi)} \left[(k + 2\alpha + 1) \sin \frac{\alpha\pi}{2} \times \frac{p^*(0)}{\sqrt{a}} + (-k + 2\alpha + 1) \cos \frac{\alpha\pi}{2} \cdot \frac{q^*(0)}{\sqrt{a}} + \frac{2\mu g^*(0)}{\sqrt{d}} \right]. \quad (16b)$$

$K_I(0)$ 是使用奇性应力 $\sigma_{xx}(0, y_1)$ 引进的表示裂纹若穿越夹杂沿 y_1 轴开裂的应力强度因子。由于本文的夹杂为刚性, 因此这里的应力强度因子实质上是很小的。

4 数值结果

作为方法的验证和各种参数影响的研究, 这里采用文献[5, 6]的数值离散方法, 进行了一些数值计算, 外载为远处的均布外应力 σ_{xx}^∞ 。并采用如下坐标变换, 及无量纲参数:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{a}{2} \zeta_1 + \frac{a}{2}, & t = \frac{a}{2} \tau_1 + \frac{a}{2} \\ t \in (0, a), & x_1 \in (0, a), \\ x_2 = \frac{d}{2} \zeta_2 + \frac{d}{2}, & t = \frac{d}{2} \tau_2 + \frac{d}{2} \\ t \in (0, d), & x_1 \in (0, d), \\ P(\tau_1) = p(t)/\mu, & Q(\tau_1) = q(t)/\mu, \\ G(\tau_2) = g(t). \end{cases} \quad (17)$$

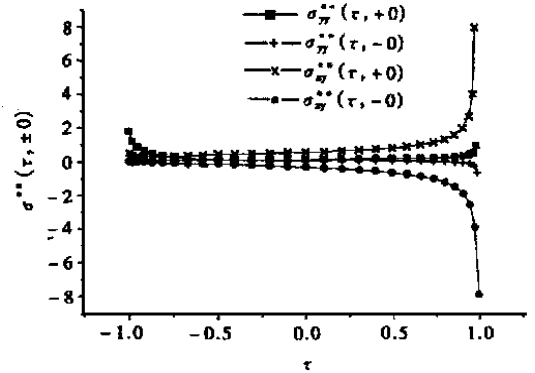


图3 界面应力 $\sigma_{yy}^*(\tau, \pm 0)$, $\sigma_{xy}^*(\tau, \pm 0)$ (右半段)

1 界面应力

如图3是夹杂与裂纹接触时, 刚性线夹杂右半段上下两侧界面应力图。此时在远处, 令 $\sigma_{yy}^\infty = 0, \sigma_{xx}^\infty \neq 0$, 取 $N = 30, a/d = 1$, 平面应变问题 $k = 1.8, \alpha = 0.28883$ 。

$$\sigma_{yy}^*(\tau, \pm 0) = \sigma_{yy}(\tau, \pm 0)/\sigma_{xx}^\infty, \quad \sigma_{xy}^*(\tau, \pm 0) = \sigma_{xy}(\tau, \pm 0)/\sigma_{xx}^\infty, \quad (18a, b)$$

式中 τ 为无量纲量, $x_1 = a\tau/2 + a/2, \tau \in (-1, 1)$ 。

2 应力强度因子

如表1, 列出了夹杂上岸右侧接触点附近的应力强度因子 $K_I^{**}(0^+), K_{II}^{**}(0^+)$, 它们以无量纲的形式出现:

$$K_{I}^{**}(0^+) = \frac{K_I(0^+)}{(\sigma_{xx}^\infty \cdot a^a)/\sqrt{2}}, \quad K_{II}^{**}(0^+) = \frac{K_{II}(0^+)}{(\sigma_{xx}^\infty \cdot a^a)/\sqrt{2}}, \quad (19a, b)$$

表 1 只受 σ_{xx}^∞ 作用

| a/b | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1.0 | 1.2 | 1.4 | 1.6 | 1.8 | 2.0 |
|--------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $K_I^{**}(0^+)$ | 0.845 2 | 0.443 1 | 0.508 3 | 0.549 0 | 0.503 6 | 0.449 2 | 0.422 2 | 0.427 8 | 0.470 8 | 0.570 6 |
| $K_{II}^{**}(0^+)$ | 0.255 5 | 0.134 0 | 0.153 7 | 0.166 0 | 0.152 2 | 0.135 8 | 0.127 6 | 0.129 3 | 0.142 3 | 0.172 5 |

以上这些数值结果, 仅供工程实际参考。

[参 考 文 献]

- [1] Hasebe N, Keer L M, Nemat-Nasser S. Stress analysis kinked crack initiating g from a rigid line inclusion, Part I Formulation[J]. Mech Mat, 1984, 3(2): 131—145.
- [2] 张明焕. 平面与反平面线夹杂力学的工程理论[D]. 博士论文. 上海: 上海交通大学, 1994.
- [3] Dundurs J. Elastic interaction of dislocations with inhomogeneities[A]. In: T Mura Ed. Mathematical Theory of Dislocations[C]. New York: Asme, 1969, 70—115.
- [4] Muskhelishvili N I. 奇异积分方程[M]. 朱季纳译. 上海: 上海科学技术出版社, 1996.
- [5] Erdogan F, Gupta G D. On the numerical solution of singular integral equations[J]. Quart Appl Math, 1972, 29(4): 525—534.
- [6] Erdogan F, Gupta G C, Cook T S. Numerical solution of singular integral equations[A]. In: G C Sih Ed. Fracture of Mechanics, I[C]. Leyden: Noordhoff, 1973, 368—425.

Analyses of the Singularity for the Vertical Contact Problem of Line Crack Inclusion

SHEN An, TAO Fang_min, TANG Ren_ji

(Department of Engineering Mechanics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, P R China)

Abstract: Taking the short_fiber composite materials as engineering background, utilizing the existing basic solutions of single inclusion and single crack, the plane problem of vertical contact interactions between line crack and rigid line inclusion in infinite plane (matrix) from the viewpoint of crack fracture mechanics is studied. According to boundary conditions, a set of standard Cauchy_type singular integral equations of the problem is obtainable. Besides, singular indexes, stresses and stress intensity factors around the contact point are expressed. Numerical examples are given to provide references to engineering.

Key words: crack; line inclusion; the vertical contact point; singular stress; stress intensity factor